MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY

M27

Urszula Radoń

Zastosowanie metody FORM w analizie niezawodności konstrukcji kratowych podatnych na przeskok

Kielce 2012

MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY NR M27

Redaktor Naukowy serii
NAUKI TECHNICZNE - BUDOWNICTWO
dr hab. inż. Tomasz KOZŁOWSKI, prof. PŚk

Recenzenci
prof. dr inż. Adam PODHORECKI
prof. dr inż. Jakub MARCINOWSKI

Redakcja
Elżbieta WIKŁO

Redakcja techniczna
Irena PRZEORSKA-IMIOŁEK

Projekt okładki
Tadeusz UBERMAN

PL ISSN 1897-2691

Samodzielna Sekcja „Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej"
25-314 Kielce, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7
tel./fax 41 34 24 581
e-mail: wydawca@tu.kielce.pl
www.tu.kielce.pl/organizacja/wydawnictwo

Spis treści

Wykaz ważniejszych oznaczeń

$\boldsymbol{\sigma}$, $\Delta\boldsymbol{\sigma}$	–	wektor naprężeń, wektor przyrostów naprężeń
$\boldsymbol{\varepsilon}$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$	–	wektor odkształceń, wektor przyrostów odkształceń
μ, $\Delta\mu$	–	mnożnik obciążenia, przyrost mnożnika obciążenia
E	–	moduł Younga
A	–	pole powierzchni przekroju poprzecznego
EA	–	sztywność osiowa pręta
K_T^e	–	styczna macierz sztywności elementu
$\boldsymbol{K}_T$	–	styczna macierz sztywności konstrukcji
SPS	–	skalarny parametr sztywności
$\mathbf{P}$	–	wektor obciążenia porównawczego
V	–	energia potencjalna
$\boldsymbol{q}$, $\Delta\boldsymbol{q}$	–	wektor współrzędnych uogólnionych, wektor przyrostu współrzędnych uogólnionych
$g(\boldsymbol{X})$	–	funkcja graniczna zmiennych losowych $\boldsymbol{X}$
P_f	–	prawdopodobieństwa awarii
$f_X(X)$	–	funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X
$F_X(X)$	–	dystrybuanta zmiennej losowej X
σ_x	–	odchylenie standardowe zmiennej losowej X
μ_x	–	wartość oczekiwana zmiennej losowej X
β	–	współczynnik niezawodności Hasofera-Linda
Φ	–	dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego

1

Wstęp

1.1. Przedmiot rozważań

W niniejszej pracy przedmiotem rozważań są konstrukcje kratowe słabo wyniosłe podatne na utratę stateczności poprzez przeskok węzła. Konstrukcje prętowe są często stosowane w wielu współczesnych konstrukcjach inżynierskich. Wykorzystuje się je między innymi jako przekrycia obiektów o dużej powierzchni. Do podstawowych zalet konstrukcji prętowych należy ich niewielki ciężar własny przy stosunkowo dużej nośności. W projektowaniu tego typu konstrukcji decydujące znaczenie mogą mieć zjawiska związane z ich statecznością [81, 91, 100]. Zjawiska utraty stateczności konstrukcji prętowych mają różny charakter. Przez pojęcie utraty stateczności globalnej rozumie się utratę stateczności konstrukcji jako całości, związaną z bifurkacją położenia równowagi lub zjawiskiem przeskoku. Możliwa jest również utrata stateczności konstrukcji spowodowana wyboczeniem pojedynczych prętów układu lub lokalnym przeskokiem węzła. Przykłady zrealizowanych ciekawych konstrukcji prętowych przedstawiono na rysunkach 1.1 i 1.2.

Analiza konstrukcji kratowych, w których mogą pojawić się duże gradienty przemieszczeń nie powinna być przeprowadzona bez uwzględnienia efektów nieliniowych. Podstawowym problemem w numerycznej analizie zagadnień nieliniowych jest występowanie na ścieżce równowagi konstrukcji punktów osobliwych. W punktach tych zawodzą standardowo stosowane algorytmy rozwiązywania układów równań. W niniejszej pracy do określenia ścieżki równowagi wykorzystano metodę skalarnego parametru sztywności i metodę stałej długości łuku. Analizę numeryczną zagadnienia przeprowadzono stosując wariacyjne podejście metody elementów skończonych. Polega ono na skonstruowaniu funkcjonału wariacyjnego, którego warunkami stacjonarności będą odpowiednie równania problemu. Użycie funkcjonału wariacyjnego umożliwia skoncentrowanie w jednym wyrażeniu wszystkich skomplikowanych równań opisujących problem. Rozpatrywany funkcjonał – w naszym przypadku energia potencjalna – ma określony sens fizyczny, jego wartość jest niezależna od wybranego układu współrzędnych. W pracy, korzystając z twierdzenia o minimum energii potencjalnej, otrzymano przyrostowe równania równowagi konstrukcji.

Rys. 1.1. *Astrodrom w Houston*

Rys. 1.2. *Złote Tarasy w Warszawie*

Oryginalnym elementem pracy jest propozycja połączenia dwóch obszarów analizy konstrukcji, tj. stateczności i niezawodności. Postawmy sobie teraz pytanie, co daje nam włączenie do analizy stateczności metod analizy niezawodności? Odpowiedź jest następująca. Korzystając z metod analizy niezawodności możemy (poruszając się po ścieżce równowagi konstrukcji) określić, z jakim poziomem prawdopodobieństwa awarii zbliżamy się do punktu granicznego. Efektywne numerycznie, a także zapewniające wystarczającą dokładność są tzw. metody FORM i SORM. Metody te wykorzystują liniową bądź kwadratową aproksymację obszaru awarii. Ich zastosowanie jest ograniczone do przypadków, w których funkcje określające stany graniczne są różniczkowalne, nie pojawiają się wielokrotne punkty projektowe, funkcja stanu granicznego nie jest silnie nieliniowa. Jeżeli warunki te nie są spełnione, wówczas stosowana jest metoda Monte Carlo, najczęściej wraz z metodami redukcji wariancji, np. Importance Sampling. Nowym, bardzo ciekawym rozwiązaniem jest wykorzystanie w analizie niezawodności sztucznych sieci neuronowych.

W tradycyjnym projektowaniu konstrukcji wykorzystuje się deterministyczne wartości parametrów projektowych. Bezpieczeństwo konstrukcji związane ze zmiennością parametrów konstrukcyjnych zapewnia się poprzez konserwatywny dobór ich wartości i uwzględnienie w równaniach stanów granicznych współczynników bezpieczeństwa. Wykorzystanie zmiennych losowych do reprezentacji parametrów konstrukcyjnych pozwala na jawne uwzględnienie losowości w procesie projektowania. W rezultacie możliwa jest budowa modelu matematycznego, który pozwala oszacować, jakie jest prawdopodobieństwo określonego zachowania konstrukcji. Ze względu na to, że dostępne wyniki badań są na ogół niewystarczające do prowadzenia analiz probabilistycznych (abstrahując od złożoności analiz), wśród inżynierów widoczny jest opór przed stosowaniem metod probabilistycznych. Dotyczy to również probabilistycznych metod numerycznych, których złożoność jest w istocie ukryta wewnątrz programów komputerowych. Dodatkowy wysiłek użytkownika programu jest potrzebny przy charakteryzowaniu danych dwoma parametrami (wartością oczekiwaną i odchyleniem standardowym) w miejsce jednego parametru wymaganego w metodach deterministycznych. Konieczne jest więc dostarczenie inżynierom algorytmów umożliwiających oszacowanie parametrów statystycznych zmiennych występujących w analizie, na podstawie podręcznych danych.

W pracy za miarę niezawodności przyjęto wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda, wyznaczany z wykorzystaniem iteracyjnej procedury Rackwitza-Fiesslera. Dokładność wyników otrzymywanych przy użyciu tego wskaźnika jest wystarczająca dla potrzeb praktycznych i dlatego też zyskał on dużą popularność jako miara niezawodności, szczególnie w połączeniu z metodami transformacji wykorzystującymi pełną informację o rozkładach zmiennych losowych.

Jako zmienne losowe przyjęto następujące parametry modelowanych układów konstrukcyjnych: sztywność osiowa, mnożniki schematów obciążenia, współrzędne węzłów. Rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych przyjmowane są spośród kilku, najczęściej stosowanych w praktyce. Rozkład normalny możemy przyjmować do opisu losowości położenia węzłów konstrukcji, jak również losowości mnożnika obciążeń stałych. Rozkład logarytmiczno-normalny stosowany jest do opisu losowych parametrów materiałowych, pól przekrojów prętów, mnożników niektórych obciążeń. Rozkład Gumbela używany jest do opisu zmienności maksymalnych wartości obciążeń występujących w rozpatrywanym okresie czasu, na przykład rocznych maksimów parcia wiatru. Rozkład Frecheta jest rozkładem maksimów drugiego typu. Podobnie jak rozkład Gumbela stosowany jest często w opisie maksimów obciążeń zmiennych działających na konstrukcję. Rozkład Weibulla jest rozkładem minimów trzeciego typu. Często stosowany jest do opisu losowych parametrów materiałowych.

Rozpatrywane są dwa typy warunków granicznych: warunek nieprzekroczenia dopuszczalnych przemieszczeń węzłów konstrukcji, warunek nieprzekroczenia dopuszczalnego mnożnika obciążenia. W niniejszej pracy pręty tworzące konstrukcję nie są prętami krępymi, w związku z czym można się było ograniczyć do dwóch funkcji granicznych bez badania warunku wytrzymałościowego. Powyższe warunki muszą być spełnione z prawdopodobieństwem nie mniejszym od pewnej minimalnej wartości, ustalonej przez projektanta.

Funkcja graniczna jest zazwyczaj niejawną funkcją zmiennych losowych, stąd też w pracy koniecznością stało się zbudowanie pomostu pomiędzy modułem autorskim MES KRATA a programem do analizy niezawodnościowej STAND, opracowanego przez zespół pracowników Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN. Oprogramowanie STAND umożliwia także ocenę niezawodności metodami drugiego rzędu (SORM), co dało możliwość zweryfikowania poprawności rozwiązań uzyskanych metodą FORM.

Należy w tym miejscu podkreślić, że zagadnienia niezawodności konstrukcji nie są problemami oderwanymi od rzeczywistości. Wprowadzone w 2010 r. Eurokody Konstrukcyjne [111, 40] wspólne dla całej Unii Europejskiej w dużej mierze w swoich sformułowaniach opierają się na tzw. podejściu probabilistycznym. Zgodnie z nim normy projektowania i normy obciążeń powinny być tak opracowane, aby zwymiarowane na ich podstawie elementy konstrukcyjne miały zapewniony odpowiednio wysoki poziom niezawodności. Najbardziej obiektywną miarą ryzyka awarii jest jej prawdopodobieństwo P_f. W rezultacie, jako miarę niezawodności, przyjmuje się tzw. wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda β, który jest tym większy, im to prawdopodobieństwo jest mniejsze $P_f = \Phi(-\beta)$ (Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego standaryzowanego). Ustalenie docelowego poziomu niezawodności dla nowo opracowywanych norm ciągle jest przedmiotem badań. Należy pamiętać, że na inny wskaźnik projektujemy płytę stropową, na inny żebra, na których wsparta jest ta płyta, na jeszcze inny – podciąg wspierający żebra.

Przedstawiona praca jest więc znaczącą „kroplą w morzu” badań, jakie powinny być zrealizowane, aby prawidłowo ocenić docelowy wskaźnik niezawodności dla różnych przypadków projektowania konstrukcji budowlanych. Krytyczne uwagi i nowe propozycje dotyczące wprowadzania Eurokodów na rynek polski przedstawiono w pracach [105, 106, 151, 152].

1.2. Cele, założenia i zakres pracy

Przyjęto, że w pracy realizowane będą następujące cele:
- sprawdzenie możliwości zastosowania metody FORM w analizie niezawodności konstrukcji kratowych słabo wyniosłych podatnych na utratę stateczności poprzez przeskok węzła,
- badanie wrażliwości wskaźnika niezawodności na zmiany charakterystyk probabilistycznych rozważanych zmiennych losowych,
- sprawdzenie numerycznej efektywności metody FORM w porównaniu do innych metod niezawodności, tj. metody SORM, Monte Carlo, Importance Sampling,
- próba zbudowania modelu obliczeniowego, który dobrze opisywałby rzeczywisty wpływ losowości poszczególnych parametrów zadania,
- przeprowadzenie dyskusji problemów związanych z realizacją metody FORM w analizie niezawodności przeskoku węzła konstrukcji kratowych słabo wyniosłych.

W pracy przyjęto następujące założenia:
- materiał, z którego wykonano konstrukcję jest liniowo-sprężysty, izotropowy,
- rozważa się obciążenia quasi-statyczne, konserwatywne, jednoparametrowe, losowe,
- więzi podporowe są ustalone (skleronomiczne), nie zależą od czasu,
- odkształcenia pozostają w zakresie umożliwiającym stosowanie liniowych związków konstytutywnych,
- możliwe są duże gradienty przemieszczeń węzłów konstrukcji,
- węzły struktur kratowych są idealnymi przegubami kulistymi,
- w rozważanych zagadnieniach nie uwzględnia się jawnie czasu,
- nie uwzględnia się wzajemnej korelacji przyjętych zmiennych losowych,
- rozpatruje się jedną funkcję stanu graniczną (kryterium awarii).

Rozprawa składa się z siedmiu rozdziałów. Poza zawierającym wstęp pierwszym rozdziałem opisują one następujące zagadnienia. W rozdziale drugim opisano wybrane problemy nieliniowej analizy konstrukcji. W rozdziale trzecim przedstawiono podstawowe informacje dotyczące analizy stateczności układów dyskretnych. W punkcie 3.2 pracy opisano kryterium stateczności, w punkcie 3.3 – konstrukcję ścieżki równowagi, a w punkcie 3.4 – stosowane techniki numeryczne.

Rozdział czwarty poświęcony jest omówieniu metod analizy niezawodności. W punkcie 4.2 zdefiniowano podstawowe miary niezawodności, w tym wskaźnik niezawodności Cornella (obecnie mający już znaczenie historyczne) oraz wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda. Punkt 4.3 pracy zawiera przedstawienie metod wykorzystujących informacje o rozkładach prawdopodobieństwa zmiennych losowych. Wśród nich możemy znaleźć metodę FORM, SORM, Monte Carlo i Importance Sampling. Rozdział piąty zawiera propozycję wykorzystania metody analizy niezawodności pierwszego rzędu FORM w analizie przeskoku węzła słabo wyniosłych konstrukcji kratowych. Rozdział szósty zawiera wnioski, a siódmy podsumowanie. Całość pracy kończy wykaz literatury niezbędnej do powstania niniejszej publikacji.

1.3. Przegląd literatury

Niniejsza praca obejmuje swoim zakresem takie dziedziny nauki, jak: teoria niezawodności, analiza stateczności konstrukcji oraz metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice. Współczesna teoria niezawodności konstrukcji jest już dobrze ugruntowaną dyscypliną naukową. Można wymienić szereg podręczników oraz monografii, z których najbardziej znane to: Madsena, Krenka i Linda [92], Melchersa [98], Ditlevsena i Madsena [37], Thoft-Christensena i Bakera [160], Augusti, Baratta i Casciati [5]. Na szczególną uwagę zasługują książki Harra [53] oraz Nowaka i Collinsa [104], prezentujące podstawowe pojęcia teorii niezawodności ze szczególnym uwzględnieniem ich zastosowań w inżynierii lądowej. W Polsce, probabilistycznej analizie konstrukcji poświęcone są prace Śniadego, Biernata, Bryji, Mironowicza, Śniadej, Sieniawskiej, Żukowskiego [14, 19, 97, 99, 138, 139, 153, 155, 156], Kamińskiego [65], Chmielewskiego [22], Kotulskiego, Sobczyka [78], Murzewskiego [101, 102], Biegusa [12, 13], Kowala, Paczkowskiego, Dziubdzieli, Kopocińskiego [79, 80], Stockiego, Tauzowskiego, Knabela, Kolanka, Kleibera, Jendo, Szolca, Dolińskiego, Rojka, Siemaszko [70, 72, 75, 146, 148, 149, 150, 157], Wolińskiego, Wróbel [176], Górskiego [51], Silickiej [140] oraz wielu innych.

Za pierwszy, ważny krok w kierunku współczesnych metod pozwalających na efektywną i dokładną ocenę bezpieczeństwa konstrukcji należy uznać pracę Hasofera i Linda [54] opublikowaną w 1974 roku. Zawarto w niej ideę lokalizacji tzw. „punktu projektowego”, to jest takiej realizacji zmiennych losowych z obszaru awarii, której odpowiada największa wartość funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Linearyzacja funkcji granicznej w punkcie projektowym pozwala otrzymać miarę niezawodności, która jest niezmiennicza ze względu na równoważne sformułowania warunku granicznego, tzw. wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda. Właśnie ten brak niezmienniczości był podstawową słabością stosowanego poprzednio wskaźnika Cornella [27]. Utrudniał on stosowanie tej miary niezawodności do porównania stopnia bezpieczeństwa różnych konstrukcji.

Ideę wskaźnika Hasofera-Linda wykorzystali w 1978 roku Rackwitz i Fiessler w pracy [113]. Zastosowali oni ponadto transformacje niezależnych zmiennych losowych o dowolnych rozkładach prawdopodobieństwa do standardowych zmiennych normalnych oraz zaproponowali algorytm poszukiwania punktu projektowego. W pracy [59] Hohenbichler i Rackwitz zaproponowali wykorzystanie transformacji Rosenblatta [128] do transformacji zależnych zmiennych losowych do przestrzeni standardowej. Transformacja Rosenblatta oraz wykorzystana po raz pierwszy przez Der Kiureghiana i Liu w pracy [36] transformacja Natafa są obecnie najczęściej używane i umożliwiają analizę problemów niezawodności, zarówno w przypadku gdy znany jest łączny rozkład prawdopodobieństwa zmiennych losowych, jak też gdy znane są tylko rozkłady brzegowe zmiennych i macierz korelacji. Aproksymacja funkcji granicznej w punkcie projektowym funkcją pierwszego lub drugiego stopnia prowadzi, odpowiednio, do metod analizy niezawodności pierwszego rzędu (FORM) lub drugiego rzędu (SORM).

We wczesnych zastosowaniach metod FORM i SORM przyjmowano najczęściej, że funkcja graniczna jest jawną funkcją zmiennych losowych. Niestety, za wyjątkiem niewielu prostych przykładów, taka zależność funkcyjna nie może być wyspecyfikowana, a w większości przypadków dana jest za pośrednictwem określonej procedury numerycznej, np. metody elementów skończonych. Poczynając jednak od pierwszych prac Der Kiureghiana oraz współpracowników, problematyka wykorzystania metody elementów skończonych w ramach metod analizy niezawodności zaczęła się bardzo intensywnie rozwijać. Testy różnych metod dyskretyzacji można znaleźć w pracy Li i Der Kiureghiana [23] i Matthiesa [96]. Przegląd popularnych programów komputerowych, takich jak: ANSYS PDS DesignXplorer, CalREL/FERUM/OpenSees, COSSAN, NESSUS, PERMAS-RA/STRUREL, PHIMECA-SOFT, PROBAN, PROFES, UNIPASS zawarty jest w pracach [34, 49, 84, 85, 110, 124, 135, 159, 163, 177].

Spośród ciekawych przykładów analizy niezawodności z wykorzystaniem metody FORM oraz metody elementów skończonych wymienić można pracę Lee i Anga [82], w której rozpatrywano problem niezawodności rozciąganej tarczy z pęknięciem, pracę Engelstada i Reddy'ego [41], poświęconą analizie niezawodności geometrycznie nieliniowych warstwowych powłok kompozytowych, pracę Mahadevana i Mehty [93], gdzie analizowano przykład niezawodności konstrukcji ramowej poddanej ruchom podłoża wywołanym trzęsieniem ziemi.

Odrębną grupę metod analizy niezawodności stanowią metody symulacyjne. Najlepiej znana to klasyczna metoda Monte Carlo (Zieliński [184], Rubinstein [129]). W metodzie symulacyjnej Monte Carlo oszacowanie prawdopodobieństwa awarii polega na n-krotnym generowaniu podstawowych zmiennych losowych, zgodnie z ich łączną funkcją gęstości prawdopodobieństwa i określeniu liczby trafień w obszar awarii. Im mniejsze jest prawdopodobieństwo awarii, które chcemy oszacować, tym więcej symulacji należy przeprowadzić, aby błąd tego oszacowania mieścił się w dostatecznie małym przedziale ufności z dostatecznie dużym prawdopodobieństwem. Przy przewidywanym prawdopodobieństwie awarii konstrukcji budowlanych rzędu od 10^{-4} do 10^{-7} liczba potrzebnych symulacji wynosi od 10^{6} do 10^{9}, co nawet przy wykorzystaniu współczesnych komputerów jest zadaniem ogromnym, jeśli w ogóle wykonalnym w możliwym do zaakceptowania czasie. Olbrzymi nakład obliczeniowy dyskwalifikuje więc, zdaniem autorki, przydatność klasycznej metody Monte Carlo do analizy praktycznych problemów niezawodności konstrukcji budowlanych.

W celu uzyskania szybszej zbieżności w metodach symulacyjnych, należy tak zmodyfikować metodę Monte Carlo, aby otrzymać redukcję wariancji estymatora prawdopodobieństwa awarii. Jednym ze sposobów redukcji wariancji jest symulacja ważona (*the importance sampling technique*). Technika ta została zaproponowana przez Kahna i Marshalla [63].

Poprzez odpowiedni dobór funkcji gęstości prawdopodobieństwa, według której generuje się zmienne losowe, można znacznie zmniejszyć obszar próbkowania oraz liczbę symulacji. Spośród prac jej poświęconych warto wymienić artykuły Schuëllera i Stixa [136], Hohenbichlera i Rackwitza [58] oraz Dolińskiego [38], Melchersa [98]. Inną odmianą metod symulacyjnych jest metoda symulacji kierunkowej (*directional sampling*). Nadaje się ona najlepiej do analizy problemów, w których powierzchnia graniczna ma kształt zbliżony do hipersfery.

Całkiem odmienną próbą rozwiązania problemu nieefektywności metody Monte Carlo w analizie niezawodności konstrukcji jest wykorzystanie sztucznych sieci neuronowych, w skrócie SSN. Idea tego podejścia polega na zastąpieniu programów MES, generujących zwykle próbki podczas symulacji, sztucznymi sieciami neuronowymi. W pracach poświęconych zastosowaniu SSN w analizie niezawodności spotkać można trzy różne podejścia:

1. SSN stanowią system ekspercki, tzn. zadaniem tych sieci jest rozpoznanie bezpośrednio zawodności analizowanej konstrukcji na podstawie wprowadzonych do sieci danych o charakterze rozmytym. W takim podejściu, przygotowanie zbiorów wzorców uczących i testujących SSN polega na przeprowadzeniu analiz niezawodności konstrukcji, w wyniku których otrzymuje się wartości prawdopodobieństwa zawodności odpowiadające ustalonym wartościom danych wejściowych. Przykład takiego sposobu wykorzystania SSN przedstawiony jest w pracy [21].
2. SSN wykorzystywane są do aproksymowania powierzchni stanu granicznego. Aproksymowana przez sieć powierzchnia zastępuje wielomianowe funkcje stanu granicznego wykorzystywane w metodach FORM i SORM. Takie

podejście prezentowane jest w pracach [20, 131]. W artykule [60] sieci określają powierzchnie stanu granicznego działając jako klasyfikatory, a właściwa analiza niezawodności konstrukcji przeprowadzana jest metodą symulacji Monte Carlo.

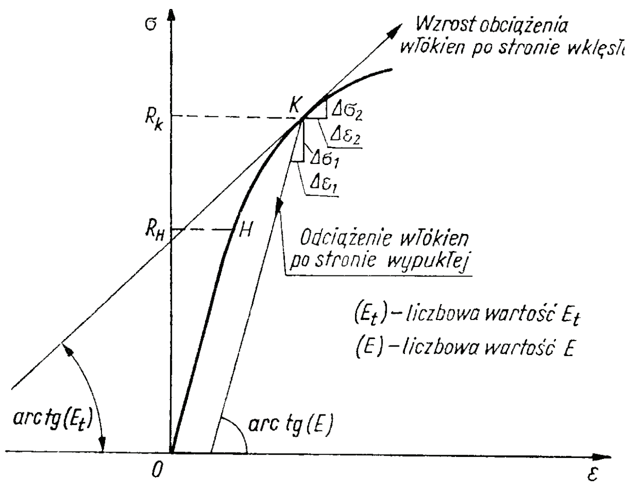
3 SSN wykorzystywane są do aproksymowania granicznej nośności konstrukcji. Wzorce uczące i testujące takie sieci przygotowywane są za pomocą programów opartych na MES. Nauczona sieć oblicza później próbki w probabilistycznej analizie niezawodności konstrukcji przeprowadzanej metodą symulacji Monte Carlo. Podejście takie po raz pierwszy zaproponował Papadrakakis w pracy [109], w której analizowano tą metodą konstrukcje ramowe. Bardzo ciekawe prace, które opublikowano w Polsce to prace Kaliszuk, Waszczyszyna, Pabisek, Marcinowskiego, Ziemiańskiego [64, 108, 168, 169, 170, 171].

Przegląd różnych metod symulacyjnych można znaleźć w pracach Rubinsteina [129], Melchersa [98]. W prezentowanej pracy metody symulacyjne były stosowane jedynie do weryfikacji poprawności obliczeń. Podstawową metodą badawczą była jedna z metod aproksymacyjnych FORM. Obliczenia probabilistyczne przeprowadzono na przykładzie konstrukcji kratowych, których geometria (mały kąt nachylenia prętów) sprawia, że decydującym warunkiem w procesie projektowania jest możliwość utraty stateczności poprzez przeskok węzła.

Zjawisko utraty stateczności prostej postaci pręta osiowo ściskanego nazywamy wyboczeniem. Wzory określające siłę krytyczną dla osiowo ściskanych prętów pryzmatycznych zostały wyprowadzone w XVIII wieku przez matematyka szwajcarskiego Eulera. Założył on idealną sprężystość i jednorodność materiału, idealnie prostą pierwotną oś pręta oraz osiowość przyłożenia siły. Sile eulerowskiej towarzyszy jednoosiowy stan naprężenia w materiale pręta, scharakteryzowany jednoznacznie naprężeniem normalnym w kierunku osi pręta.

Jeśli naprężenie to przekroczy granicę proporcjonalności materiału, czyli nie jest spełnione prawo Hooke'a, to wzór na siłę eulerowską traci sens. Okazuje się, że w technicznie ważnych przypadkach wyboczenia prętów mamy na ogół do czynienia z wyboczeniem pozasprężystym. Considere i Engesser pierwsi wskazali na możliwość ekstrapolacji wzoru Eulera na zakres pozasprężysty, dzięki wprowadzeniu zmiennego modułu sprężystości. Przyjmując zależność naprężeń od odkształceń $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ przedstawioną na rysunku 1.3 zauważymy, że do granicy proporcjonalności R_H moduł E jest stały i równy tangensowi kąta między prostoliniowym odcinkiem wykresu a osią ε. Powyżej granicy proporcjonalności moduł $E_t = E_t(\varepsilon)$ jest zmienny i równy tangensowi kąta zawartego między styczną do wykresu i osią ε (moduł styczny). Po korekcie Jasińskiego Engesser wprowadził wielkość E_r zależną od modułów E i E_t oraz kształtu przekroju pręta. Do takich samych wyników doszedł

Karman. Określając siłę krytyczną wyboczenia pozasprężystego założył, że siła ściskająca pręt ma wartość stałą. Od tej zasady odstąpił Shanley. Po sporządzeniu wykresu zależności naprężeń krytycznych od smukłości pręta krzywa otrzymana na podstawie teorii Shanley'a zajmuje pośrednie położenie między krzywymi Engessera (według pierwotnej koncepcji) a Engessera-Karmana. Wartości naprężeń krytycznych dla wyboczenia niesprężystego można również określić na podstawie bezpośrednich badań doświadczalnych. Pierwsze długoletnie doświadczenia przeprowadził na początku XX wieku Tetmajer. Według niego naprężenie krytyczne określone jest w zakresie niesprężystym zależnością liniową. Wkrótce po sformułowaniu przez Tetmajera wzorów liniowych, Johnson i Ostenfeld wystąpili z koncepcją funkcji kwadratowej (Jastrzębski, Muttermich, Orłowski [62]).



Rys. 1.3. *Zależność $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ według Engessera i Karmana*

Oddzielną problematykę stanowią konstrukcje wykonywane z prętów cienkościennych, które cechuje wielopostaciowość form utraty stateczności. W elementach tych odkształcona oś pręta nie jest krzywą płaską, a przekroje poprzeczne doznają równoczesnych obrotów dookoła jego osi. Ponieważ otrzymane z obliczeń i potwierdzone doświadczalnie siły krytyczne prętów tego typu wykazywały wartości mniejsze od siły eulerowskiej, problem wyboczenia skrętnego i giętno-skrętnego ma ogromne znaczenie praktyczne. Wyboczenie prętów cienkościennych należy również rozpatrywać w obszarze sprężystym i pozasprężystym (Weiss, Giżejowski [172]).

Najczęściej utrata stateczności pręta między węzłami nie jest przyczyną ogólnej utraty stateczności w słabo wyniosłych konstrukcjach prętowych, natomiast przeskok węzła (zwłaszcza rozwijający się na większą liczbę węzłów) może prowadzić do niestateczności konstrukcji.

Zagadnienie przeskoku węzła zostało po raz pierwszy rozwiązane przez Misesa w 1925 r. Problem ten pojawia się w słabo wyniosłych kratownicach. Geometria stalowych kopuł prętowych odpowiada tym warunkom bardzo często. Dlatego też zagadnienie to stało się przedmiotem badań projektantów konstrukcji stalowych. Interesującą propozycję szacowania nośności granicznej kopuł prętowych metodą kolejnych przybliżeń oraz badania doświadczalne sprężysto-plastycznych prętów przedstawili Bródka, Karczewski, Giżejewski, Czmoch, Barszcz [18, 48, 66, 67]. Rządkowski i Grycak w pracy [52] zaproponowali estymację parametrów liczbowych losowej nośności granicznej jednowarstwowych kopuł kratowych. Obecnie stosując nieliniową analizę stateczności możemy określić nie tylko wartość obciążenia krytycznego, ale również ścieżkę równowagi konstrukcji, która pozwala nam oceniać stany pokrytyczne konstrukcji. Nieocenionym narzędziem pracy jest metoda elementów skończonych wraz z przyrostowo-iteracyjnymi technikami poruszania się po ścieżkach równowagi. Podstawowym problemem w numerycznej analizie zagadnień nieliniowych jest występowanie na ścieżce równowagi punktów osobliwych. W punktach tych zawodzą standardowo stosowane algorytmy rozwiązywania układów równań. W pracy do określenia ścieżki równowagi konstrukcji wykorzystano metodę skalarnego parametru sztywności i metodę stałej długości łuku. Po wprowadzeniu metody stałej długości łuku przez Riksa [125, 126] i Wempnera [173] uzyskała ona szeroką akceptację w analizie konstrukcji MES. Crisfield [28, 29] podał modyfikację metody i zaproponował tzw. cylindryczną długość łuku. Forde i Stiemer [44] wyprowadzili ogólną procedurę długości łuku opartą na zasadach ortogonalności. Kolejne modyfikacje pojawiły się w opracowaniach Al-Rasby [3], Fafard and Massicotte [42], Teng, Luo [158], Zhou, Murray [182] i innych. Interesujące omówienie problemów stateczności można znaleźć w publikacjach Bathe'a [7], Belytschko, Liu, Moran [8], Crisfielda [30], Bathe'a, Cimento [6], Besselinga [11], Ramma [123].

2

Wybrane problemy nieliniowej analizy konstrukcji

2.1. Wprowadzenie

W problemach nieliniowych zmiany położenia i kształtu deformowanego ciała w kolejnych, dyskretnych punktach czasowych wymuszają przyjęcie odpowiednich układów, w których opis ten jest dokonywany. Poszczególne stany mogą być opisywane:

a) w układzie nieruchomym, ustalonym (wszystkie niewiadome funkcje odnosimy do stałego układu współrzędnych, przyjętego na początku procesu i w którym opisana jest konfiguracja początkowa) – opis Lagrange'a;
b) w układzie ruchomym, konwekcyjnym, zawiązanym z deformowanym elementem – opis Eulera.

W mechanice konstrukcji dominuje opis Lagrange'a. Opis Eulera stosuje się w mechanice płynów. Opis Lagrange'a ma dwie reprezentacje:

a) opis stacjonarny (*Total Lagrangian* – TL), w którym wszystkie niewiadome funkcje odnosimy do stałego układu współrzędnych, przyjętego na początku rozpatrywanego procesu i w którym opisana jest konfiguracja początkowa,
b) uaktualniony opis Lagrange'a (*Updated Lagrangian* – UL), w którym wprowadza się konwekcyjny układ współrzędnych, związany z określonym stanem i elementem. Układ ten „zamraża się" na początku określonej chwili czasowej i dokonuje się opisu względem tego zamrożonego układu.

Zagadnienia nieliniowe można podzielić na trzy grupy:

grupa pierwsza – nieliniowość występuje tylko w równaniach konstytutywnych. Gradienty przemieszczeń i odkształceń przyjmuje się jako małe;

grupa druga – występują duże gradienty przemieszczeń, ale małe odkształcenia. Równania konstytutywne mogą być liniowe lub nieliniowe. Jeżeli zastosujemy w tym przypadku opis TL, to należy użyć dla naprężeń drugiego tensora Pioli-Kirchhoffa, a dla odkształceń – tensora Greena-Lagrange'a. Przy opisie UL naprężenia wyrażamy tensorem Cauchy'ego, a odkształcenia tensorem Almansiego;

grupa trzecia – występują tutaj duże gradienty przemieszczeń i duże odkształcenia. Związki konstytutywne mogą być liniowe lub nieliniowe. Przy opisie TL należy użyć dla naprężeń drugiego tensora Pioli-Kirchhoffa, a dla odkształceń tensora Greena-Lagrange'a. Przy opisie UL dla naprężeń należy stosować tensorowy współczynnik Jaumanna oraz tensor prędkości odkształceń.

W praktyce inżynierskiej w zakresie inżynierii lądowej dominują problemy nieliniowe grupy pierwszej (występują w praktyce jako problemy samoistne lub jako faza przejściowa ‹‹plastyczność›› do dużych gradientów przemieszczeń, czyli do nieliniowości geometrycznej) oraz drugiej (występują w analizie smukłych i wysokich konstrukcji prętowych, cienkich powłok i ogólnie w stateczności sprężystej).

Zagadnienia z grupy trzeciej pojawiają się w konstrukcjach z miękkich materiałów gumopodobnych lub w mechanice gruntów organicznych.

Problemy analizowane w pracy należą do grupy drugiej. Ze względów praktycznych i z uwagi na ograniczony tematycznie zakres naszych rozważań, będziemy operować wyłącznie ortogonalnymi układami kartezjańskimi. W pracy zastosowano stacjonarny (całkowity) opis Lagrange'a. W kolejnych rozdziałach zdefiniowano wielkości charakteryzujące stan odkształcenia i naprężenia. Te ogólne rozważania przystosowano do analizowanego zagadnienia tj. konstrukcji kratowych. Ciekawe prace poświęcone mechanice ośrodków ciągłych to prace Ostrowskiej-Maciejewskiej [107], Rymarza [130], Funga [46], Podhoreckiego [112].

2.2. Równania geometryczne

Rozpatrujemy ciało stałe zajmujące w początkowej konfiguracji obszar B_0, który jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej R^3. Przez B_0 oznaczamy wnętrze tego obszaru, przez ∂B_0 jego brzeg, którego elementami są zbiory ∂B_{0t}, ∂B_{0u}, przez $\rho_0 f_0$ siły masowe, przez $\hat{t}_0$ siły powierzchniowe (rys. 2.1). Odpowiednie wielkości bez indeksu dolnego 0 opisują konfigurację aktualną.

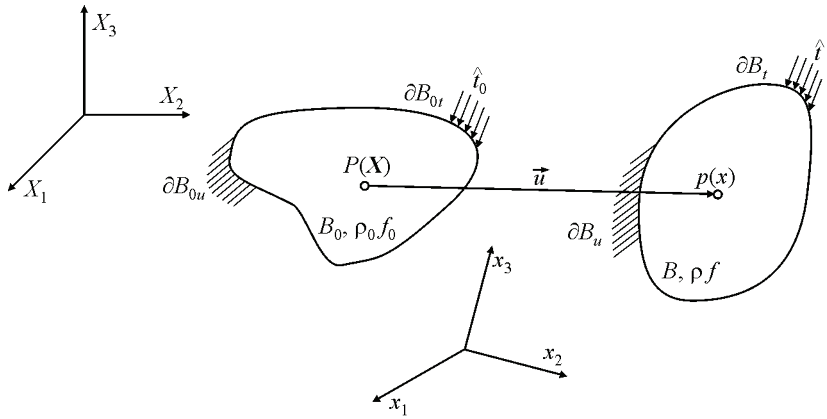
Do określenia deformacji użyjemy stacjonarnego opisu Lagrange'a $\boldsymbol{X}$. Jeżeli korzystamy z tego samego kartezjańskiego układu współrzędnych do opisu konfiguracji pierwotnej i aktualnej (rys. 2.2), to przemieszczenia opisuje się w następującej postaci wektorowej:

$$\vec{u}(\boldsymbol{X}) = \vec{r}(\boldsymbol{X}) - \vec{R}(\boldsymbol{X}) \tag{2.1}$$

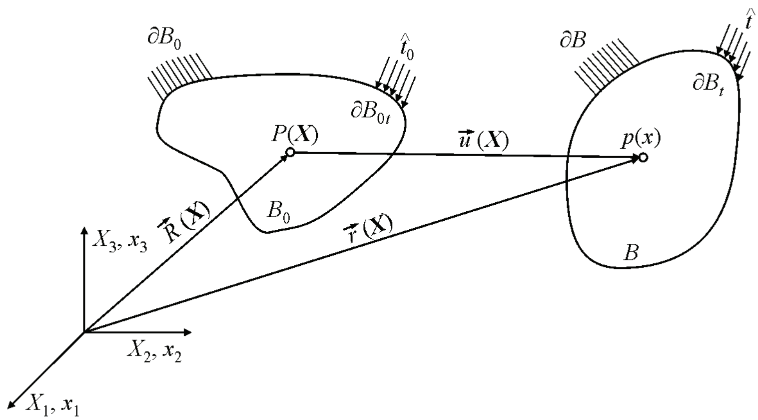
lub skalarnie

$$u_i(\boldsymbol{X}) = x_i - X_i \qquad i = 1,2,3 \tag{2.2}$$

gdzie u_i oznaczają współrzędne wektora $\vec{u}$.



Rys. 2.1. *Analizowane ciało stałe*



Rys. 2.2. *Przemieszczenie punktu P analizowanego ciała*

W teorii skończonych deformacji odkształcenia opisuje się tensorem Greena w postaci [46]:

$$E_{ij}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{X} \in B_0 \qquad i, j, k = 1,2,3$$

Jest to tensor symetryczny, gdyż $E_{ij} = E_{ji}$ dla $i \neq j$. Miarami odkształcenia mogą być też wydłużenia względne ε i odkształcenia postaciowe γ, które w odróżnieniu od składowych tensora Greena mają interpretację geometryczną [46]:

$$\varepsilon_{kk} = \sqrt{1+2E_{kk}} - 1 \tag{2.4}$$

$$\cos\gamma_{ik} = \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}} \tag{2.5}$$

$$i \neq k \quad i,k = 1,2,3$$

Wyrażenia (2.5) i (2.4) można rozwinąć w szeregi potęgowe:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{kk} = E_{kk}\left(1 - \frac{1}{2}E_{kk} + \frac{1}{2}E_{kk}E_{kk} - \ldots\right) \\ |2E_{kk}| \leq 1 \quad k = 1,2,3\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}\gamma_{ik} = \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}}\left[1 + \frac{2E_{ik}E_{ik}}{3(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})} + \ldots\right] \\ \left|\frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}}\right| < 1 \quad i \neq k \quad i,k = 1,2,3\end{gathered} \tag{2.7}$$

Następnie odkształcenia ε_{ij} (zawierające ε_{kk} oraz γ_{ik}) zapisuje się w postaci rozwiniętej [112]:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jk}\varepsilon_{kk} + \frac{1}{2}\left(\delta_{kk}\delta_{ik}\delta_{il} - \delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{jk}\right)\gamma_{kl} \tag{2.8}$$

gdzie $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j \\ 0 & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$ jest deltą Kroneckera.

Po wprowadzeniu do tej postaci szeregów (2.7) i (2.6) uzyskuje się:

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkk}E_{kk} + b_{ijkl}E_{kl} \tag{2.9}$$

gdzie:

$$a_{ijkk} = \delta_{ik}\delta_{jk}\left(1 - \frac{1}{2}E_{kk} + \frac{1}{2}E_{kk}E_{kk} - \ldots\right)$$

$$b_{ijkl} = \frac{\delta_{kk}\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{jk}}{\sqrt{(1+2E_{kk})(1+2E_{ll})}}\left[1 + \frac{2E_{kl}E_{kl}}{3(1+2E_{kk})(1+2E_{ll})} + \ldots\right]$$

2.3. Opis pola naprężeń

W liniowej teorii sprężystości obowiązuje założenie bardzo małych przemieszczeń, co pozwala na utożsamianie konfiguracji początkowej ${}^0C$ i aktualnej ${}^1C$. W przypadku dużych gradientów przemieszczeń konfiguracje ${}^0C$ i ${}^1C$ stają się zasadniczo różne. Elementarna powierzchnia dA w konfiguracji ${}^0C$ zmienia się przy przejściu do konfiguracji ${}^1C$. Poszukiwany stan naprężenia określony jest więc na nieznanej konfiguracji ciała zdeformowanego. W rozwiązywaniu praktycznych zadań korzystne jest odniesienie stanu naprężenia w konfiguracji ${}^1C$ do konfiguracji ${}^0C$, która jest znana. W teorii skończonych deformacji rozróżniamy trzy podstawowe tensory naprężenia [46]:

a) Cauchy'ego – σ_{ij},

b) I tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa – T_{ij},

c) II tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa – S_{ij}.

Tensor naprężenia Cauchy'ego σ_{ij} opisuje naprężenia w konfiguracji aktualnej i jest do niej odniesiony. Jest to tensor symetryczny. I tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa T_{ij} opisuje naprężenia w konfiguracji aktualnej i jest odniesiony do konfiguracji początkowej. Między tym tensorem a tensorem Cauchy'ego istnieje następująca zależność:

$$T_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \cdot \sigma_{mj} \tag{2.10}$$

gdzie na podstawie prawa zachowania masy otrzymuje się:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \det\left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right| \tag{2.11}$$

Tensor ten nie jest na ogół symetryczny.

II tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa S_{ij} to I tensor Pioli-Kirchhoffa sprowadzony do postaci symetrycznej. Między nimi zachodzi następująca zależność [46]:

$$T_{ij} = S_{ip} \frac{\partial x_j}{\partial X_p} \tag{2.12}$$

lub we współrzędnych Lagrange'a:

$$T_{ij} = S_{ip}\left(\delta_{jp} + \frac{\partial u_j}{\partial X_p}\right) \tag{2.13}$$

gdzie δ_{jp} jest deltą Kroneckera.

2.4. Związki konstytutywne

Związki opisujące zależności między odkształceniami a naprężeniami to związki konstytutywne. Rzeczywiste materiały zachowują się na ogół w dość złożony sposób. Żadne więc związki matematyczne nie są w stanie uwzględnić wszystkich obserwowanych zjawisk zachodzących w różnych procesach. W tej sytuacji opisuje się jedynie pewne materiały wyidealizowane, tzw. modele ośrodka, np. model ciała sprężystego, ciała plastycznego. W pracy analizowany jest ośrodek sprężysty. Materiał sprężysty może być opisany w zmiennych Lagrange'a w postaci [46]:

$$S_{ij} = \alpha(E_{ij}) = \alpha'(\varepsilon_{ij}) \tag{2.14}$$

gdzie α lub α' jest funkcją jednowartościową, natomiast E_{ij} jest tensorem odkształcenia Greena (2.3), a ε_{ij} inną miarą odkształcenia (2.9).

Możliwa jest do przyjęcia następująca zależność naprężenia T_{ij} od odkształceń ε_{ij}:

$$T_{ij} = C'_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.15}$$

Z uwagi na brak symetrii tensora T_{ij}, prawo (2.15) nie jest zbyt wygodne w stosowaniu. Dlatego też do definiowania prawa konstytutywnego używa się symetrycznego II tensora Pioli-Kirchhoffa S_{ij}:

$$S_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.16}$$

Tensor C_{ijkl} zawiera parametry materiałowe o 81. składowych. W przypadku ośrodka izotropowego, jednorodnego, liczba ta maleje do dwóch (stałe Lamego).

2.5. Równania równowagi

Zgodnie z wcześniejszymi założeniami stosujemy stacjonarny opis Lagrange'a ***X***. Przyjmujemy, że wypadkowe siły masowe są takie same w konfiguracji początkowej i aktualnej [112]:

$$\int_{B_0} f_{0i}\rho_0 dB_0 = \int_B f_i \rho dB \tag{2.17}$$

W takim przypadku różniczkowe równanie równowagi przyjmuje postać:

$$\frac{\partial T_{ji}}{\partial \boldsymbol{X}_j} + \rho_0 f_{0i} = 0 \qquad \boldsymbol{X} \in B_0 \qquad j, i = 1,2,3 \tag{2.18}$$

Równanie (2.18) lepiej zapisać wykorzystując tensor S_{ij}, który jest symetryczny:

$$\frac{\partial}{\partial X_j}\left[S_{jk}\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] + \rho_0 f_{0i} = 0 \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{X} \in B_0 \qquad i, j, k = 1,2,3$$

2.6. Warunki brzegowe

Na jednej części powierzchni granicznej znane są obciążenia ∂B_{0t}, a na drugiej przemieszczenia ∂B_{0u} (rys. 2.1). Przyjmujemy, że obciążenia powierzchniowe mają charakter obciążeń niezmienniczych, tzn. wypadkowe tych sił są jednakowe w obu konfiguracjach:

$$\int_{\partial B_{0t}} \hat{t}_{0i} d(\partial B_0) = \int_{\partial B_t} \hat{t}_i d(\partial B) \tag{2.20}$$

Jeżeli stosujemy opis Lagrange'a, to warunki brzegowe typu statycznego wyrażamy II tensorem Pioli-Kirchhoffa następująco:

$$\hat{t}_{0i} - S_{jp}\left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p} \right) \nu_{0j} = 0 \tag{2.21}$$

gdzie: $\hat{t}_{0i}$ – składowa obciążenia zewnętrznego, ν_{0j} – wektor normalny elementu powierzchni ∂B_{0t}.

Na innej (lub tej samej) części powierzchni granicznej znane są przemieszczenia:

$$u_i = \hat{u}_i \qquad \boldsymbol{X} \in \partial B_{0u} \qquad i = 1,2,3 \tag{2.22}$$

2.7. Równanie zasady pracy wirtualnej

Wyprowadzone wcześniej równania geometryczne, równania fizyczne, równania równowagi, warunki brzegowe stanowią lokalne sformułowanie zagadnienia brzegowego. Zastosowanie metody elementów skończonych wymaga globalnego (całkowego) sformułowania tego zagadnienia. W tym celu możemy zastosować zasadę pracy wirtualnej [112]. Rozważmy klasę dowolnych przemieszczeń $u_i + \delta u_i$, zgodnych z więzami ciała, co prowadzi do zanikania wariacji przemieszczeń δu_i na powierzchni brzegowej ∂B_{0u}. Nadajmy rozpatrywanemu ciału wirtualne przemieszczenia δu_i. Teraz wykorzystamy wyprowadzone uprzednio różniczkowe równania równowagi (2.19) i warunki brzegowe (2.21). Pierwsze i drugie równanie mnożymy przez δu_i, całkujemy odpowiednio po B_0, ∂B_{0t} i dodajemy:

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_0} \delta u_i \left\{ \frac{\partial}{\partial X_j} \left[S_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] + \rho_0 f_{0i} \right\} dB_0 + \\
&+ \int_{\partial B_{0t}} \delta u_i \left[\hat{t}_{0i} - S_{jp} \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p} \right) \nu_{0j} \right] d(\partial B_0) = 0
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

gdzie δu_i to wariacja przemieszczeń zgodnych z więzami ciała.

Przekształcamy część pierwszą pierwszej całki [112]:

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_0} \delta u_i \frac{\partial}{\partial X_j} \left[S_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] dB_0 = \\
&= \int_{B_0} \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\delta u_i S_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] dB_0 - \int_{B_0} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial X_j} \cdot S_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) dB_0
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego, piewsza całka (2.24) przyjmuje postać:

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_0} \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\delta u_i S_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] dB_0 = \int_{\partial B_0} \delta u_i \left[S_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] \nu_{0j} d(\partial B_0) = \\
&= \int_{\partial B_{0t}} \delta u_i \left[S_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] \nu_{0j} d(\partial B_0) + \int_{\partial B_{0u}} \delta u_i \left[S_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] \nu_{0j} d(\partial B_0) = \\
&= \int_{\partial B_{0t}} \delta u_i \left[S_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] \nu_{0j} d(\partial B_0)
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Przekształcamy drugą całkę (2.24):

$$\int_{B_0} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_j} S_{jk}\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\right) dB_0 = \int_{B_0} S_{jk}\left[\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_k}\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right)\right] dB_0 \tag{2.26}$$

Zajmijmy się wyrażeniem podcałkowym ostatniej całki [112]:

$$\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_j}\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\right) = \frac{\partial(\delta u_k)}{\partial X_j} + \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_j}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial X_k} = \delta E_{kj} + \delta\Omega_{kj} \tag{2.27}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \delta E_{kj} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\delta u_k)}{\partial X_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial X_k} + \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial Xj}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\cdot\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_k}\right] \\ \partial\Omega_{kj} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\delta u_k)}{\partial X_j} - \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial X_k}\right] \end{aligned} \tag{2.28}$$

Związek (2.27) wprowadzamy do (2.26) i otrzymujemy:

$$\int_{B_0} S_{jk}\left[\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_j}\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\right)\right] dB_0 = \int_{B_0} \delta E_{ij} S_{ij} dB_0 + \int_{B_0} \delta\Omega_{ij} S_{ij} dB_0 = \int_{B_0} \delta E_{ij} S_{ij} dB_0 \tag{2.29}$$

We wzorze (2.29) wykorzystujemy własność zerowania się iloczynu tensora symetrycznego S_{ij} i antysymetrycznego $\delta\Omega_{ij}$.

Ostatecznie całka (2.24) przyjmie postać

$$\begin{aligned} &\int_{B_0} \delta u_i \cdot \frac{\partial}{\partial X_j}\left[S_{jk}\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\right)\right] dB_0 = \\ &\int_{\partial B_{0t}} \delta u_i \left[S_{jk}\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\right)\right] \nu_{0j} d(\partial B_0) - \int_{B_0} \delta E_{ij} S_{ij} dB_0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Równanie (2.23) zapiszemy następująco po uwzględnieniu (2.30):

$$\int_{B_0} \delta u_i \cdot \rho_0 f_{0i} dB_0 + \int_{\partial B_{0t}} \hat{t}_{0i} \delta u_i d(\partial B_0) = \int_{B_0} S_{ij} \delta E_{ij} dB_0 \tag{2.31}$$

Równanie (2.31) stanowi zasadę pracy wirtualnej. Treść tej zasady brzmi: siły rozłożone na powierzchni ciała stałego oraz siły masowe działające w obszarze B_0 wykonują na wirtualnych przemieszczeniach pracę równą wewnętrznej energii zgromadzonej w rozpatrywanym ciele.

Odpowiednikiem zasady prac wirtualnych przy wirtualnym stanie wielkości geometrycznych i rzeczywistych wielkościach statycznych jest zasada minimum całkowitej energii potencjalnej V.

Jeżeli przez $W = \int\limits_{B_0} \rho_0 f_{0i} u_i dB_0 + \int\limits_{\partial B_{0i}} \hat{t}_{0i} u_i d(\partial B_0)$ oznaczymy pracę obciążeń, a przez $U = \frac{1}{2} \int\limits_{B_0} S_{ij} E_{ij} dB_0$ energię potencjalną odkształceń, to możemy zapisać zasadę minimum całkowitej energii potencjalnej w następującej postaci:

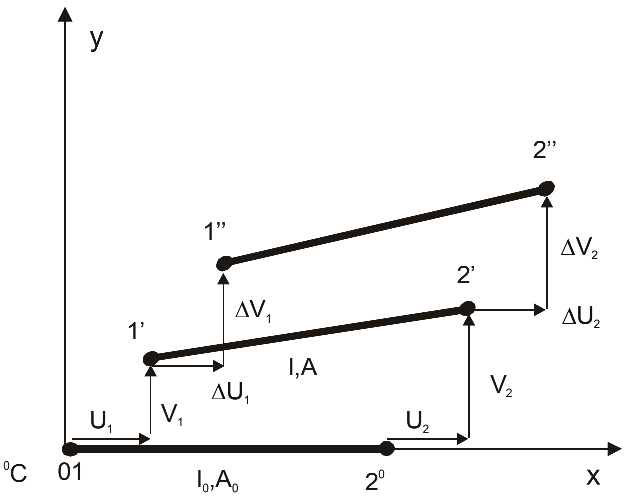
$$\delta(U - W) = \delta V = 0 \tag{2.32}$$

Układ zachowawczy jest więc w stanie równowagi, jeżeli pierwsza wariacja całkowitej energii potencjalnej V jest równa zero. Przy spełnieniu równowagi, warunek stacjonarności (wraz z warunkiem $\delta^2(V)>0$) odpowiada minimum, co implikuje następującą zasadę: ze wszystkich kinematycznie dopuszczalnych konfiguracji, konfiguracja odpowiadająca równowadze wywołuje minimalną wartość całkowitej energii potencjalnej. W trzecim rozdziale zasada ta będzie wykorzystywana do określenia kryterium stateczności.

2.8. Opis płaskiego elementu kratowego

Opisaną w poprzednim rozdziale zasadę prac wirtualnych wykorzystamy obecnie do sformułowania przyrostowych równań równowagi płaskiego elementu kratowego. Rozważmy płaski, kratowy element skończony w konfiguracji początkowej ${}^0C$ i konfiguracji ${}^1C$ w chwili $t + \Delta t$. Przyjmijmy następujące oznaczenia: l_0 – długość pręta w konfiguracji ${}^0C$, A_0 – pole powierzchni pręta w konfiguracji ${}^0C$, l – długość pręta w konfiguracji ${}^1C$, A – pole powierzchni pręta w konfiguracji ${}^1C$ (rys. 2.3).

Sformułujmy zasadę prac wirtualnych dla tego elementu kratowego stosując opis Lagrange'a. Przyjmujemy, że obciążenie jest przykładane w węzłach kratownicy tak, że w elemencie jest stała siła podłużna S. Tensor odkształceń ogranicza się do jednej niezerowej wielkości tensora Greena-Lagrange'a charakteryzującej wydłużenie pręta $E_{11}= \varepsilon$. Pozostałe składniki tensora odkształceń są równe zero. Pominęliśmy tu odkształcenia prostopadłe do osi pręta, określone przez współczynnik Poissona, co nie ma jednak znaczenia w rozpatrywanym jednowymiarowym zagadnieniu. Wielkością sprzężoną w stosunku do tensora Greena-Lagrange'a w opisie naprężeń jest drugi symetryczny tensor Pioli-Kirchhoffa. W związku z tym, że korzystamy z pierwotnej (nieodkształconej) konfiguracji odniesienia, siła osiowa S zdefiniowana jako $S = EA\,\varepsilon$ nie jest rzeczywistą siłą panującą w pręcie. Odzwierciedla ona składową $S_{11}=\sigma$ drugiego symetrycznego tensora naprężeń Pioli-Kirchhoffa. Rzeczywista siła zdefiniowana w oparciu o tensor naprężeń Cauchy'ego jest równa $S' = Sl/l_0$.



Rys. 2.3. *Przyrost przemieszczeń od chwili t do chwili t + Δt*

Odkształcenie ε będące funkcją przemieszczeń węzłowych skrajnych przekrojów elementu $\varepsilon = \varepsilon(u_2, u_1, v_2, v_1)$, możemy zapisać w postaci:

$$\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{l_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{u_2 - u_1}{l_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_2 - v_1}{l_0}\right)^2 \tag{2.33}$$

Zapiszmy teraz przyrost odkształceń od chwili t do chwili $t + \Delta t$:

$$\Delta\varepsilon = {}^{t+\Delta t}\varepsilon - {}^{t}\varepsilon = \varepsilon(u_2 + \Delta u_2, u_1 + \Delta u_1, v_2 + \Delta v_2, v_1 + \Delta v_1) - \varepsilon(u_2, u_1, v_2, v_1) \tag{2.34}$$

gdzie: u_1, v_1, u_2, v_2 – przemieszczenia na początku przyrostu (wielkości znane – chwila t) zgrupowane w wektor $\boldsymbol{q}$, $\Delta u_1, \Delta v_1, \Delta u_2, \Delta v_2$ – przyrosty przemieszczeń odpowiadające chwili $t + \Delta t$ zgrupowane w wektor $\Delta\boldsymbol{q}$.

Odpowiadający przemieszczeniom węzłowym wektor sił węzłowych określamy dalej w pracy jako **Q**, natomiast ich przyrost jako Δ**Q**.

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta u_2 - \Delta u_1}{l_0}\left(1 + \frac{u_2 - u_1}{l_0}\right) + \left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{l_0}\right)\left(\frac{v_2 - v_1}{l_0}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u_2 - \Delta u_1}{l_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{l_0}\right)^2 \tag{2.35}$$

$$\Delta\varepsilon = \Delta e + \Delta\eta \tag{2.36}$$

gdzie:

$\Delta e = \frac{\Delta u_2 - \Delta u_1}{l_0}\left(1 + \frac{u_2 - u_1}{l_0}\right) + \left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{l_0}\right)\left(\frac{v_2 - v_1}{l_0}\right)$ – człon liniowy ze względu na przyrosty przemieszczeń,

$\Delta\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u_2 - \Delta u_1}{l_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{l_0}\right)^2$ – człon nieliniowy ze względu na przyrosty przemieszczeń.

Obliczmy teraz wariancję przyrostu odkształceń od chwili t do chwili $t + \Delta t$:

$$\delta^{t+\Delta t}\varepsilon = \delta\left({}^{t}\varepsilon + \Delta\varepsilon\right) = \delta^{t}\varepsilon + \delta\Delta\varepsilon = \delta\Delta\varepsilon = \delta\left(\Delta e + \Delta\eta\right) = \delta\Delta e + \delta\Delta\eta \tag{2.37}$$

Zauważmy, że

$$\delta^{t}\varepsilon = 0 \tag{2.38}$$

ponieważ ${}^{t}\varepsilon$ – stałe w chwili t

$$\delta\Delta e = \frac{\delta\Delta u_2 - \delta\Delta u_1}{l_0}\left(1 + \frac{u_2 - u_1}{l_0}\right) + \frac{\left(\delta\Delta v_2 - \delta\Delta v_1\right)}{l_0}\frac{\left(v_2 - v_1\right)}{l_0} \tag{2.39}$$

$$\delta\Delta\eta = \frac{\left(\Delta u_2 - \Delta u_1\right)\left(\delta\Delta u_2 - \delta\Delta u_1\right)}{l_0^2} + \frac{\left(\Delta v_2 - \Delta v_1\right)\left(\delta\Delta v_2 - \delta\Delta v_1\right)}{l_0^2} \tag{2.40}$$

Zapiszmy wariancję przyrostu wektora $\boldsymbol{q}$ od chwili t do chwili $t + \Delta t$:

$$\delta^{t+\Delta t}\boldsymbol{q} = \delta({}^{t}\boldsymbol{q} + \Delta\boldsymbol{q}) = \delta^{t}\boldsymbol{q} + \delta\Delta\boldsymbol{q} = \delta\Delta\boldsymbol{q} \tag{2.41}$$

Podobnie jak we wzorze (2.38)

$$\delta\,{}^{t}\boldsymbol{q} = 0 \tag{2.42}$$

ponieważ ${}^{t}\boldsymbol{q}$ – stałe w chwili t.

Sformułujmy zasadę prac wirtualnych przy wirtualnym stanie wielkości geometrycznych i rzeczywistych wielkościach statycznych:

$$\int_{V_0} \delta^{t+\Delta t}\varepsilon^{T\,t+\Delta t}\sigma dV_0 = (\delta(\boldsymbol{q}^t + \Delta\boldsymbol{q}))^T\cdot(\Delta\mathbf{Q} + {}^t\mathbf{Q}) \qquad \text{chwila } t+\Delta t \tag{2.43}$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t}\sigma + \Delta\sigma \tag{2.44}$$

$$\int_{V_0} \delta\Delta\varepsilon^T\cdot\left({}^t\sigma + \Delta\sigma\right)dV_0 = \delta\Delta\ \boldsymbol{q}^T(\Delta\mathbf{Q} + {}^t\mathbf{Q}) \tag{2.45}$$

Zapiszmy związek fizyczny pomiędzy przyrostem odkształceń i przyrostem naprężeń w postaci klasycznego prawa Hooke'a:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \tag{2.46}$$

gdzie E to moduł Younga.

Wykorzystajmy związek fizyczny (2.46) w równaniu (2.45):

$$A_0\int_{l_0} {}^t\sigma\delta\Delta\varepsilon dx_0 + A_0E\int_{l_0}\Delta\varepsilon\delta\Delta\varepsilon dx_0 = \delta\Delta\ \boldsymbol{q}^T(\Delta\mathbf{Q} + {}^t\mathbf{Q}) \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} A_0\int_{l_0} {}^t\sigma\delta\Delta\varepsilon dx_0 + A_0E\int_{l_0}\Delta\varepsilon\delta\Delta\varepsilon dx_0 &= A_0\int_{l_0} {}^t\sigma\left(\delta\Delta e + \delta\Delta\eta\right)dx_0 + \\ &+ A_0E\int_{l_0}\left(\Delta e + \Delta\eta\right)\cdot\left(\delta\Delta e + \delta\Delta\eta\right)dx_0 = \delta\Delta\boldsymbol{q}^T\,(\Delta\mathbf{Q} + {}^t\mathbf{Q}) \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned} & A_0\left\{\int_{l_0} {}^t\sigma\delta\Delta e dx_0 + \int_{l_0} {}^t\sigma\delta\Delta\eta dx_0\right\} + A_0E\left\{\int_{l_0}\Delta e\left(\delta\Delta e\right)dx_0 + \int_{l_0}\Delta e\left(\delta\Delta\eta\right)dx_0 + \right. \\ & \left. + \int_{l_0}\Delta\eta\left(\delta\Delta e\right)dx_0 + \int_{l_0}\Delta\eta\left(\delta\Delta\eta\right)dx_0\right\} = \delta\Delta\boldsymbol{q}^T\,(\Delta\mathbf{Q} + {}^t\mathbf{Q}) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Równanie (2.49) spełnione dla dowolnego $\delta\Delta\boldsymbol{q}$, różnego od zera, po dalszych żmudnych przekształceniach opisanych dokładnie w pracach [165, 167] możemy zapisać w formie macierzowej następująco:

$$\boldsymbol{K}_T^e \cdot \Delta\boldsymbol{q} = ({}^t\mathbf{Q} - \boldsymbol{F}^e) + \Delta\mathbf{Q} \tag{2.50}$$

$$\boldsymbol{K}_T^e = \boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{K}_{u_1} + \boldsymbol{K}_{u_2} + \boldsymbol{K}_\sigma \tag{2.51}$$

gdzie $\boldsymbol{K}_T^e$ to styczna macierz sztywności elementu,

$$\boldsymbol{K}_0 = \frac{EA_0}{l_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{K}_\sigma = \frac{S}{l_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_{u_1} = \frac{EA_0}{l_0^2}\begin{bmatrix} 2\Delta_u & \Delta_v & -2\Delta_u & -\Delta_v \\ \Delta_v & 0 & -\Delta_v & 0 \\ -2\Delta_u & -\Delta_v & 2\Delta_u & \Delta_v \\ -\Delta_v & 0 & \Delta_v & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_{u_2} = \frac{EA_0}{l_0^3}\begin{bmatrix} \Delta_u^2 & \Delta_u\Delta_v & -\Delta_u^2 & -\Delta_u\Delta_v \\ \Delta_u\Delta_v & \Delta_v^2 & -\Delta_u\Delta_v & -\Delta_v^2 \\ -\Delta_u^2 & -\Delta_u\Delta_v & \Delta_u^2 & \Delta_u\Delta_v \\ -\Delta_u\Delta_v & -\Delta_v^2 & \Delta_u\Delta_v & \Delta_v^2 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_u = u_2 - u_1, \quad \Delta_v = v_2 - v_1,$$

$\boldsymbol{F}^e$ – wektor sił wewnętrznych elementu,

$$\boldsymbol{F}^e = S\begin{bmatrix} -1 - \dfrac{\Delta_u}{l_0} \\ -\dfrac{\Delta_v}{l_0} \\ 1 + \dfrac{\Delta_u}{l_0} \\ \dfrac{\Delta_v}{l_0} \end{bmatrix}.$$

3

Analiza stateczności układów dyskretnych

3.1. Wprowadzenie

Prawidłowo zaprojektowana konstrukcja powinna spełniać warunki wytrzymałości, sztywności oraz stateczności. Do niedawna w projektowaniu posługiwano się głównie sformułowaniem stateczności lokalnej. Było to spowodowane dostępną teorią utraty stateczności poszczególnych fragmentów konstrukcji. Matematyczny opis zjawiska wyboczenia pręta ściskanego po raz pierwszy sformułował Euler. Traktowały o tym prace Timoshenko i Gere [161], Bogusza [15] i wielu innych. Brak było natomiast skutecznych metod pozwalających ująć problem stateczności całej konstrukcji.

Początek nowoczesnej teorii stateczności wiąże się z pracą doktorską Koitera [77], która zapoczątkowała badania teoretyczne nad zachowaniem się konstrukcji w otoczeniu stanów krytycznych i wskazywała niezbędność wyjścia poza analizę liniową. Pojawienie się maszyn cyfrowych, a następnie rozwój metod komputerowych, głównie metody elementów skończonych MES, przyczynił się do zweryfikowania wiedzy o stateczności konstrukcji.

Stateczność ma wiele znaczeń i definiuje się ją różnie w różnych dziedzinach. W mechanice przyjmuje się za powszechnie obowiązującą definicję Lapunowa (Huseyin [61], Ziegler [183]). Przytoczymy ją za Massenetem [95] w brzmieniu bliskim intuicyjnemu rozumieniu stateczności równowagi:

> ***Konfiguracja stanu równowagi układu mechanicznego jest stateczna wtedy i tylko wtedy, gdy układ wraca do niej po dowolnie małych, chwilowych zakłóceniach.***

Te zakłócenia mogą być wywołane małymi siłami przyłożonymi na krótko do układu.

Załóżmy, że badany ustrój statyczny jest zachowawczy. Oznacza to, że działające nań obciążenia są zachowawcze i potencjalne. Sam ustrój może być złożony z elementów doskonale sztywnych lub odkształcalnych. Określone położenie jest położeniem równowagi wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono punktem stacjonarności energii potencjalnej, tzn. gdy $\delta V = 0$. Fakt ten nosi nazwę zasady stacjonarności energii potencjalnej. Tak więc badanie rodzaju położenia równowagi jest równoznaczne z badaniem typu punktu stacjonarności energii potencjalnej.

Położenie równowagi układu zachowawczego nazywamy:

– statecznym,
– niestatecznym,
– obojętnym,
– krytycznym,

jeżeli nagromadzona w tym położeniu energia osiąga odpowiednio:

– minimum właściwe,
– maksimum właściwe,
– jest stała w pewnym otoczeniu,
– ma punkt stacjonarności, nie będący żadnym z wymienionych wyżej.

Istnieją przypadki, w których zachodzi potrzeba śledzenia położeń równowagi po przekroczeniu krytycznych parametrów obciążenia lub krytycznych wartości przemieszczeń. Takie stany równowagi noszą nazwę stanów pokrytycznych.

Jeżeli krytycznym parametrom obciążenia odpowiadają różne jakościowo położenia równowagi lub możliwe są jakościowo różne stany pokrytyczne, to położenie równowagi krytycznej nosi nazwę *bifurkacyjnego*. Zjawisko bifurkacji możliwe jest tylko w układach wyidealizowanych lub w układach rzeczywistych, w których nieprawidłowości geometryczne są ortogonalne w stosunku do pierwszej postaci utraty stateczności. Bifurkacja jest charakterystyczna dla prętów ściskanych osiowo, ram o ortogonalnej siatce prętów, w której mamy zazwyczaj silnie obciążone słupy, konstrukcji powierzchniowych, zwłaszcza powłok. W układach rzeczywistych istniejące początkowe imperfekcje prawie zawsze zawierają składowe mające wpływ na postać utraty stateczności układu idealnego i punkty bifurkacji „przechodzą” w punkty graniczne. Prowadzi to do zmniejszenia obciążenia krytycznego, które w tym przypadku nazywamy obciążeniem granicznym. Punkty bifurkacyjne mogą również „przechodzić” w punkty przegięcia. W tym przypadku dla konstrukcji rzeczywistej „znika” punkt krytyczny. Obciążenia odpowiadającego punktowi przegięcia nie należy utożsamiać z obciążeniem krytycznym, ponieważ taka konstrukcja nie ulega zniszczeniu na skutek bifurkacji czy przeskoku, lecz wskutek osiągnięcia przez nią nadmiernych deformacji.

Jeżeli po przekroczeniu stanu równowagi krytycznej występują jedynie niestateczne położenia równowagi, odpowiadające wartościom parametrów obciążenia mniejszym od krytycznych, wówczas krytyczne położenie równowagi nosi nazwę *granicznego*. Odpowiadające mu obciążenie krytyczne nazywa się obciążeniem granicznym, czyli maksymalnym, jakie jest w stanie przenieść ustrój pozostający w konfiguracji zbliżonej do wyjściowej. Czasem dalszy wzrost przemieszczeń może spowodować przejście ustroju w inne odległe położenie równowagi, które może okazać się statecznym. Takie zachowanie układu nazywa się *przeskokiem*. Opisany typ równowagi krytycznej jest charakterystyczny dla łuków, słabo wyniosłych kratownic oraz powłok.

Jako ciekawostkę można dodać, że dla niektórych klas konstrukcji obciążenie bifurkacyjne konstrukcji idealnej może różnić się znacznie od obciążenia granicznego konstrukcji rzeczywistej. Przykładowo, dla powłoki walcowej obciążonej wzdłuż pobocznicy walca obciążenie bifurkacyjne jest około 300% większe od obciążenia granicznego tej samej powłoki z niedokładnościami. Ciekawe pozycje traktujące o problemach stateczności przedstawiono w pracach Kleibera [68, 71, 73, 74], Marcinowskiego [94], Waszczyszyna, Cichonia, Radwańskiej [24, 25, 26, 164, 165, 166, 167], Wieczorka [31, 174], Witkowskiego, Gomulińskiego [50, 175].

3.2. Kryterium stateczności

Bezpośrednie wykorzystanie definicji i twierdzeń zawartych w cytowanych już pracach (Huseyin [61], Ziegler [183]) w konkretnych problemach jest kłopotliwe. Pomocne są tu kryteria stateczności, których spełnienie jest równoznaczne ze spełnieniem warunków definicji Lapunowa. Wśród nich wyróżniamy kryteria: dynamiczne i statyczne. Kryterium energetyczne jest bodaj najsilniejszym kryterium statycznym. Stosuje się je w przypadku statycznych układów konserwatywnych, to znaczy układów, w których obciążenia mają potencjał.

Załóżmy, że dowolną konfigurację aktualną rozważanego pręta można jednoznacznie opisać za pomocą wektora współrzędnych uogólnionych $\boldsymbol{q}$. Energia potencjalna V tego ustroju jest funkcją tego wektora oraz parametrów obciążenia zewnętrznego, których nie będziemy wprowadzać w sposób jawny.

Zbadamy dwie sąsiednie konfiguracje układu określone za pomocą wektora $\tilde{\boldsymbol{q}}$ i $\tilde{\boldsymbol{q}} + \delta\boldsymbol{q}$. Na podstawie wzoru Taylora możemy zapisać:

$$V^* = V(\tilde{\boldsymbol{q}} + \delta\boldsymbol{q}) = V(\tilde{\boldsymbol{q}}) + \delta\boldsymbol{q}^T \frac{\partial V(\tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{q}^T \frac{\partial V^2(\tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial\boldsymbol{q}^2}\delta\boldsymbol{q} + 0(|\delta\boldsymbol{q}|^2) \tag{3.1}$$

gdzie: $0(|\delta\boldsymbol{q}|^2)$ – reszta, która jest małą co najmniej drugiego rzędu względem modułu wektora $|\delta\boldsymbol{q}|$.

Załóżmy, że pierwsza z konfiguracji jest konfiguracją równowagi. Wówczas zgodnie z zasadą stacjonarności energii potencjalnej jest:

$$\delta V(\tilde{\boldsymbol{q}}) = \delta\boldsymbol{q}^T \frac{\partial V(\tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial\boldsymbol{q}} = 0\,. \tag{3.2}$$

Zależność (3.1) przyjmie teraz postać:

$$V^* = V(\tilde{\boldsymbol{q}}) + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{q}^T \frac{\partial V^2(\tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial\boldsymbol{q}^2}\delta\boldsymbol{q} + 0(|\delta\boldsymbol{q}|^2) \tag{3.3}$$

Mogą teraz wystąpić następujące przypadki:

Przypadek 1

Macierz $\frac{\partial V^2(\tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial\boldsymbol{q}^2} = 0$ oraz reszta $0(|\delta\boldsymbol{q}|^2) = 0$.

Uwzględniając to w wyrażeniu (3.3) mamy $V(\tilde{\boldsymbol{q}} + \delta\boldsymbol{q}) = V(\tilde{\boldsymbol{q}})$. Dla dowolnej wartości $\delta\boldsymbol{q}$ energia potencjalna ma wartość stałą w położeniu równowagi określonym wektorem $\tilde{\boldsymbol{q}}$. Taki rodzaj równowagi nazywamy *równowagą obojętną*.

Przypadek 2

Macierz $\frac{\partial V^2(\tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial\boldsymbol{q}^2}$ jest dodatnio określona:

$$\delta\boldsymbol{q}^T \frac{\partial V^2(\tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial\boldsymbol{q}^2}\delta\boldsymbol{q} > 0 \Rightarrow V(\tilde{\boldsymbol{q}} + \delta\boldsymbol{q}) - V(\tilde{\boldsymbol{q}}) > 0 \tag{3.4}$$

Dla dowolnej wartości $\delta\boldsymbol{q}$ energia potencjalna osiąga minimum właściwe dla takiego położenia równowagi. W stosunku do konfiguracji określonej wektorem $\tilde{\boldsymbol{q}}$ każda inna sąsiednia konfiguracja charakteryzuje się większą wartością energii potencjalnej. Konstrukcja znajdująca się w położeniu równowagi określonym wektorem $\tilde{\boldsymbol{q}}$ i wyprowadzona z tego położenia o wektor $\delta\boldsymbol{q}$ będzie do niego powracać. Taki rodzaj równowagi nazywamy *równowagą stateczną*.

Przypadek 3

Macierz $-\frac{\partial V^2(\tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial\boldsymbol{q}^2}$ jest dodatnio określona:

$$\delta\boldsymbol{q}^T \frac{\partial V^2(\tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial\boldsymbol{q}^2}\delta\boldsymbol{q} < 0 \Rightarrow V(\tilde{\boldsymbol{q}} + \delta\boldsymbol{q}) - V(\tilde{\boldsymbol{q}}) < 0 \tag{3.5}$$

Dla dowolnej wartości $\delta\boldsymbol{q}$ energia potencjalna osiąga dla tego położenia maksimum właściwe. W stosunku do konfiguracji określonej wektorem $\tilde{\boldsymbol{q}}$ każda inna sąsiednia konfiguracja opisana wektorem $\tilde{\boldsymbol{q}} + \delta\boldsymbol{q}$ charakteryzuje się mniejszą wartością energii potencjalnej. Konstrukcja znajdująca się w położeniu równowagi określonym wektorem $\tilde{\boldsymbol{q}}$ i wyprowadzona z tego położenia o wektor $\delta\boldsymbol{q}$ nie będzie już do niego powracać. Taki rodzaj równowagi nazywamy *równowagą niestateczną*.

Przypadek 4

Macierz $\dfrac{\partial V^2(\tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial \boldsymbol{q}^2}$ jest zerowa, ale reszta $0(|\delta\boldsymbol{q}|^2)$ nie jest tożsamościowo równa zeru, należy rozważyć kolejne, nie równe tożsamościowo zeru, wyrazy rozwinięcia funkcji $V = V(\boldsymbol{q})$.

Przypadek 5

Macierze $\dfrac{\partial V^2(\tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial \boldsymbol{q}^2}$ oraz $-\dfrac{\partial V^2(\tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial \boldsymbol{q}^2}$ nie są dodatnio określone, ani też nie są zerowe.

W tym przypadku mamy nieekstremalny punkt stacjonarności energii potencjalnej. Dla takiego położenia równowagi istnieje niebezpieczny kierunek, po objęciu którego układ zostanie wyprowadzony z położenia równowagi. Wektor współrzędnych $\tilde{\boldsymbol{q}}$ oznacza krytyczne położenie równowagi układu.

3.3. Ścieżka równowagi

Przedstawmy energię potencjalną jako funkcję wektora współrzędnych uogólnionych $\boldsymbol{q}$ oraz wektora obciążenia **Q**:

$$V = V(\boldsymbol{q}, \mathbf{Q}) \tag{3.6}$$

Wektor obciążenia **Q** potraktujemy jako obciążenie proporcjonalne, zachowawcze, jednoparametrowe:

$$\mathbf{Q} = \mu \cdot \boldsymbol{P} \tag{3.7}$$

gdzie: μ – mnożnik obciążenia; $\boldsymbol{P}$ – wektor obciążenia porównawczego.

Przy zmieniającym się parametrze μ zmienia się stan przemieszczeń układu opisany wektorem $\boldsymbol{q}$. Kolejne rozwiązania tworzą pewną krzywą w $(N + 1)$-wymiarowej przestrzeni $(q_1, q_2, ..., q_N, \mu)$. Krzywa ta nazywana jest *ścieżką równowagi*.

Załóżmy, że znamy pewien punkt $A(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})$ na ścieżce równowagi, który nie jest punktem osobliwym i nie znajduje się w jego pobliżu. Zmianę stanu układu możemy opisać zmianą parametru μ od wartości $\mu = \tilde{\mu}$ do wartości $\mu^* = \tilde{\mu} + \Delta\mu$. Poszukujemy nowego punktu $B(\tilde{\boldsymbol{q}} + \Delta\boldsymbol{q}, \tilde{\mu} + \Delta\tilde{\mu})$ na ścieżce równowagi:

$$V_B = V(\tilde{\boldsymbol{q}} + \Delta\boldsymbol{q}, \tilde{\mu} + \Delta\tilde{\mu}) = V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu}) + \frac{\partial V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}}\Delta\boldsymbol{q} + \frac{\partial V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \mu}\Delta\mu +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}^2}(\Delta\boldsymbol{q})^2 + 2\frac{\partial^2 V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}\partial\mu}\Delta\boldsymbol{q}\Delta\mu + \frac{\partial^2 V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \mu^2}(\Delta\mu)^2\right] + \ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\left[\sum \binom{n}{k}\frac{\partial^n V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}^{n-k}\partial\mu^k}(\Delta\boldsymbol{q})^{n-k}(\Delta\mu)^k\right] \tag{3.8}$$

Rozwińmy teraz w szereg Taylora pierwszą pochodną energii potencjalnej $\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{q}}$ w otoczeniu punktu A określonego przez $\tilde{\boldsymbol{q}}$ i $\tilde{\mu}$:

$$\frac{\partial V_B}{\partial \boldsymbol{q}} = \frac{\partial V(\tilde{\boldsymbol{q}} + \Delta\boldsymbol{q}, \tilde{\mu} + \Delta\mu)}{\partial \boldsymbol{q}} = \frac{\partial V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}} + \left[\frac{\partial^2 V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}^2}\Delta\boldsymbol{q} + \frac{\partial^2 V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}\partial\mu}\Delta\mu\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^3 V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}\partial\mu^2}(\Delta\mu)^2 + 2\frac{\partial^3 V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}^2\partial\mu}\Delta\boldsymbol{q}\Delta\mu + \frac{\partial^3 V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}^3}(\Delta\boldsymbol{q})^2\right] \tag{3.9}$$

Uwzględniając warunek stacjonarności energii potencjalnej w punkcie A $\dfrac{\partial V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}} = 0$, a następnie odrzucając w powyższym wyrażeniu wyrazy nieliniowe względem przyrostów $\Delta\boldsymbol{q}$ i $\Delta\mu$, oraz zakładając, że konfiguracja zdefiniowana przez $(\tilde{\boldsymbol{q}} + \Delta\boldsymbol{q})$ i $(\tilde{\mu} + \Delta\mu)$ jest także konfiguracją równowagi, dochodzimy do klasycznego zlinearyzowanego układu przyrostowych równań równowagi:

$$\frac{\partial^2 V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}^2}\Delta\boldsymbol{q} + \frac{\partial^2 V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}\partial\mu}\Delta\mu = 0 \tag{3.10}$$

Jeżeli obciążenie zewnętrzne **Q** jest zachowawcze, czyli ma potencjał, to obowiązuje zależność (zgodnie z zasadą Castigliano):

$$\boldsymbol{P} = -\frac{\partial^2 V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q} \partial \mu} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial^2 V(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{\mu})}{\partial \boldsymbol{q}^2} = \boldsymbol{K}_T$$

Wykorzystując powyższe zależności, przyrostowy układ równań równowagi konstrukcji zapiszemy w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{q}, \mu) \cdot \Delta \boldsymbol{q} - \Delta \mu \boldsymbol{P} = 0 \tag{3.12}$$

gdzie: $\boldsymbol{K}_T$ – styczna macierz sztywności konstrukcji.

3.4. Techniki numeryczne

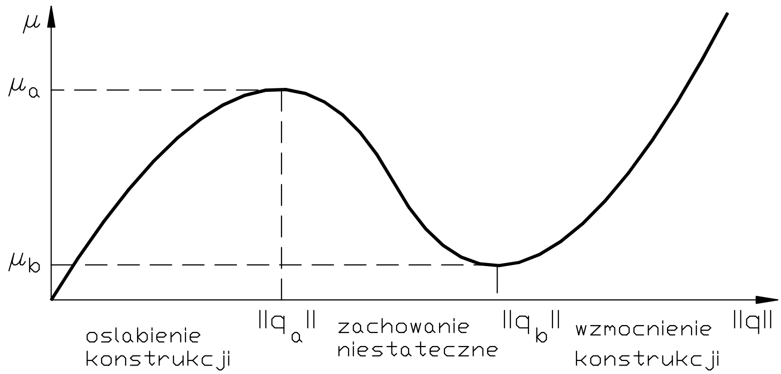
Podstawowym problemem w numerycznej analizie zagadnień nieliniowych jest występowanie na ścieżce równowagi punktów osobliwych. W punktach tych zawodzą standardowo stosowane algorytmy rozwiązywania układów równań liniowych. W pracy wykorzystano powszechnie znaną *metodę skalarnego parametru sztywności* (SPS) oraz *metodę stałej długości łuku*. Podstawowa idea metody skalarnego parametru sztywności polega na scharakteryzowaniu zachowania się wielowymiarowego układu nieliniowego przez jedną skalarną wielkość. Autorami metody są Bergan i Soreide [9, 10]. Tą skalarną wielkością jest stosunek dwóch form kwadratowych utworzonych dla macierzy sztywności w chwilach początkowej i aktualnej:

$$SPS = \frac{\Delta \boldsymbol{q}^{0T} \boldsymbol{K}^0 \Delta \boldsymbol{q}^0}{\Delta \boldsymbol{q}^{iT} \boldsymbol{K}^i \Delta \boldsymbol{q}^i} \tag{3.13}$$

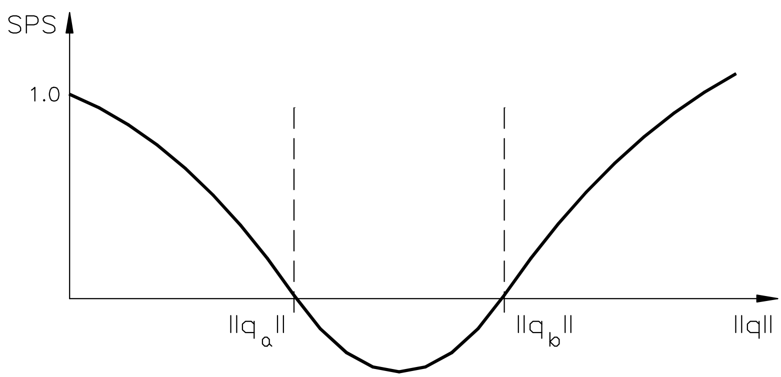
Jest to miara zmian macierzy stycznej układu przy poruszaniu się w N-wymiarowej, przemieszczeniowej przestrzeni rozwiązań. Skalarny parametr sztywności może mieć wiele różnych zastosowań, takich jak:

- ocena stanu sztywności układu poprzez zmieniającą się wartość,
- ocena stabilności badanego odcinka ścieżki równowagi poprzez zmieniający się znak,
- dobór efektywnej długości kroku,
- sterowanie w pobliżu punktów granicznych,
- jakościowa ocena punktów bifurkacji.

W celu przeanalizowania zachowania się skalarnego parametru sztywności SPS rozpatrzmy typowy problem nieliniowej mechaniki konstrukcji w postaci zagadnienia przeskoku. Na rysunku 3.1 przedstawiono zależność parametru obciążenia μ od pewnej normy $\|\boldsymbol{q}\|$ charakteryzującej stan przemieszczenia. Na rysunku 3.2 pokazano krzywą zmienności SPS wraz ze zmianą $\|\boldsymbol{q}\|$. W punktach ekstremalnych krzywej obciążenie-przemieszczenie parametr SPS przyjmuje wartości zerowe (macierz sztywności jest osobliwa). Parametr SPS jest dodatni dla statecznych stanów równowagi, ujemny zaś dla stanów niestatecznych.

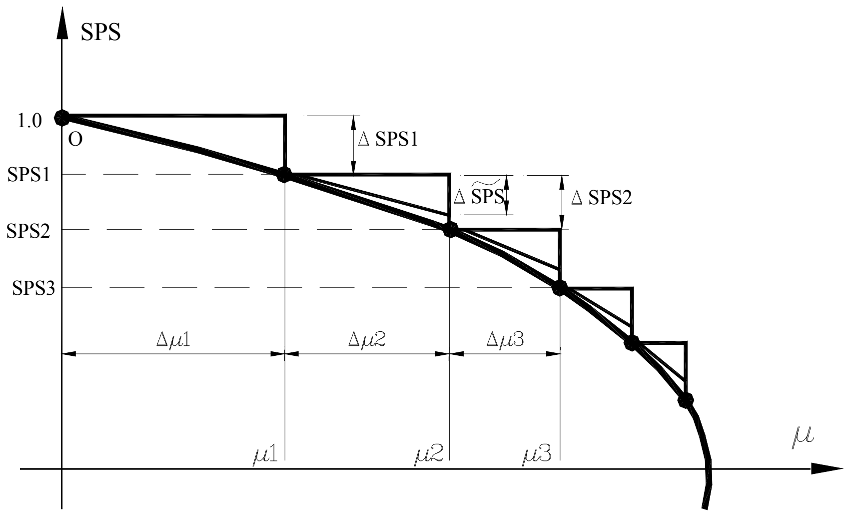


Rys. 3.1. *Zależność parametru obciążenia μ od normy $\|\boldsymbol{q}\|$, wg [9], [10]*



Rys. 3.2. *Zależność parametru SPS od normy $\|\boldsymbol{q}\|$, wg [9], [10]*

Skalarny parametr sztywności można wykorzystać do automatycznego doboru wielkości przyrostów obciążenia. Przez pojęcie automatyczny rozumiemy dobór dokonywany przez program bez potrzeby ingerencji użytkownika. Idea tego podejścia polega na postulowaniu zbliżonych do siebie zmian SPS na kolejnych krokach. Tym samym chwilowa, styczna sztywność układu powinna doznawać w ramach rozpatrywanego kroku zmian odpowiadających zadanej zmianie SPS (rys. 3.3). Żądaną zmianę SPS na poszczególnym kroku oznaczamy $\Delta\widetilde{\mathrm{SPS}}$ i wprowadzamy do programu wraz z innymi danymi wejściowymi.



Rys. 3.3. *Automatyczna generacja przyrostów obciążenia, wg [9], [10]*

SPS znajduje zastosowanie w analizie otoczenia punktów bifurkacji stanów równowagi. W tym celu definiuje się tzw. wskaźnik bifurkacji W_b jako:

$$W_b = \frac{S_p^- \cdot S_p^+}{S_p^- - S_p^+} \tag{3.14}$$

gdzie: S_p^- – wartość skalarnego parametru sztywności przed napotkaniem punktu bifurkacji; S_p^+ – wartość skalarnego parametru sztywności po napotkaniu punktu bifurkacji.

W tabeli 3.1 przedstawiono charakterystykę typów bifurkacji przy użyciu wskaźnika bifurkacji W_b.

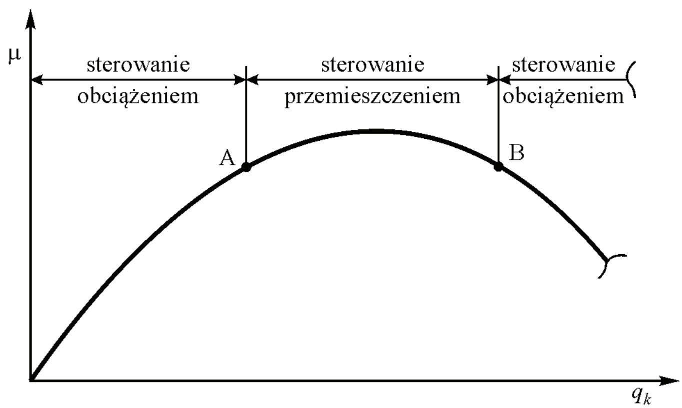
Skalarny parametr sztywności może być wykorzystany do sterowania procesem iteracyjnym w otoczeniu punktów typu maksimum obciążenia (rys. 3.4).

Zmodyfikowany algorytm Newtona-Raphsona jest rozbieżny w otoczeniu punktu granicznego przy sterowaniu obciążeniem. Po ustaleniu pewnej granicznej wartości SPS_{gr}, dostatecznie oddalonej od sytuacji osobliwej danej równaniem SPS = 0, proces śledzenia ścieżki równowagi może przebiegać następująco. Dla $|\mathrm{SPS}| > \mathrm{SPS}_{gr}$

sterowanie obciążeniem (na rysunku 3.4 fragment ścieżki do punktu A i od punktu B). Dla pozostałych fragmentów ścieżki przejść na sterowanie wybranym przemieszczeniem uogólnionym, wartość SPS_{gr} należy przyjmować równą 0,05-0,1 (zgodnie z zaleceniami autorów metody).

Tabela 3.1. *Charakterystyka typów bifurkacji przy użyciu wskaźnika bifurkacji W_b, [9, 10]*

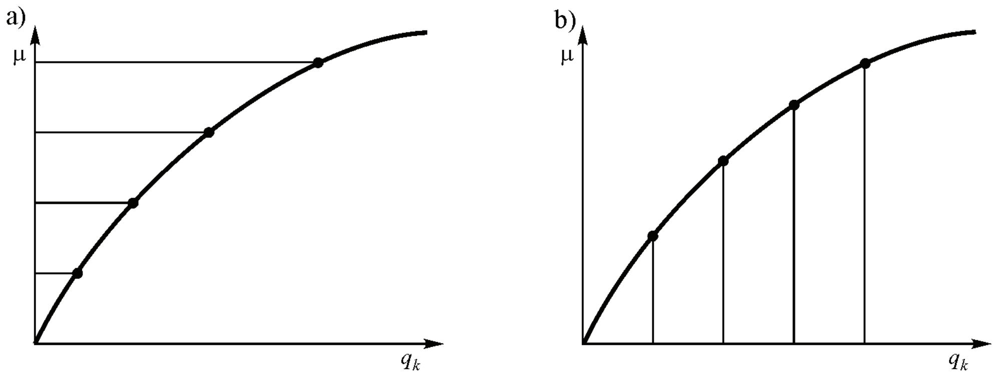
W_b	Typ bifurkacji
∞	brak bifurkacji
$\infty > W_b > 0$	stateczna gałąź ścieżki
0	równowaga krytyczna
$0 > W_b > -0{,}5$	umiarkowana wrażliwość systemu na bifurkację (gałąź niestateczna)
$-0{,}5 \geq W_b > -1{,}0$	wysoka wrażliwość systemu na bifurkację (gałąź niestateczna)
$-1{,}0 \geq W_b > -\infty$	bardzo wysoka wrażliwość systemu na bifurkację (gałąź niestateczna)



Rys. 3.4. *Sterowanie procesem iteracyjnym w otoczeniu punktów typu maksimum obciążenia (q_k – dowolnie wybrane przemieszczenie)*

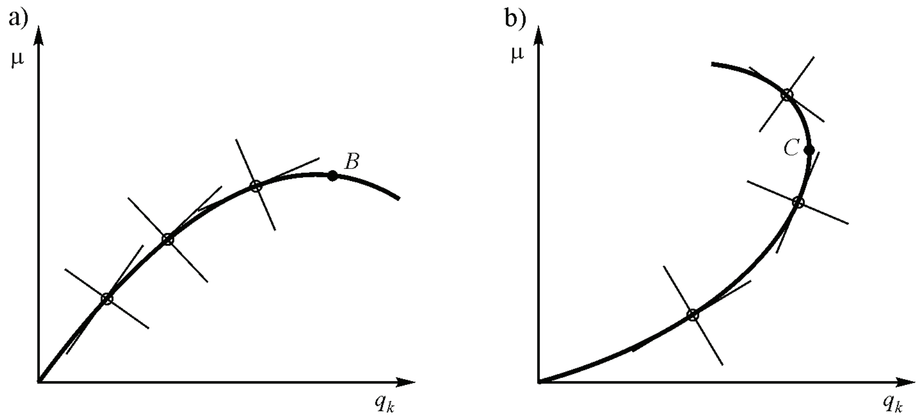
Druga metoda przedstawiona w pracy jest to *metoda stałej długości łuku*, której zaletą jest umiejętne sterowanie procesem przyrostowym. Sterowanie przy pomocy pewnego parametru η oznacza, że zmianę stanu układu na kolejnym i-tym kroku wymuszamy niejako przez nadanie temu parametrowi przyrostu $\Delta\eta_i = \eta_i - \eta_{i-1}$. Przemieszczenia i parametr obciążenia są przy tym uzależnione od parametru η.

Dwa najprostsze sposoby sterowania procesem przyrostowym to: $\mu = \eta_i$ i $q_k = \eta_i$ (rys. 3.5). W pierwszym przypadku parametrem sterującym jest parametr obciążenia μ. Kolejne punkty ścieżki równowagi otrzymujemy jako punkty przecięcia tej krzywej w (N + 1)-wymiarowej przestrzeni z hiperpłaszczyznami $\mu = \eta_i$. Analogicznie w drugim przypadku parametrem sterowania jest wybrane przemieszczenie ($q_k = \eta_i$).



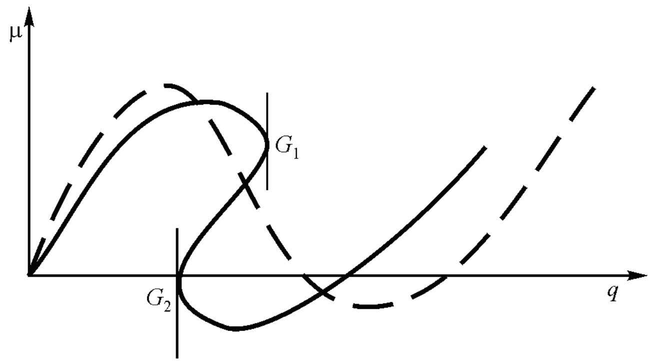
Rys. 3.5. *Sterowanie procesem przyrostowym za pomocą: a) obciążenia, b) przemieszczenia*

Obie metody zawodzą w pobliżu punktów lokalnych ekstremów parametru sterującego (na przykład na rysunku 3.6 są to punkty B, C).

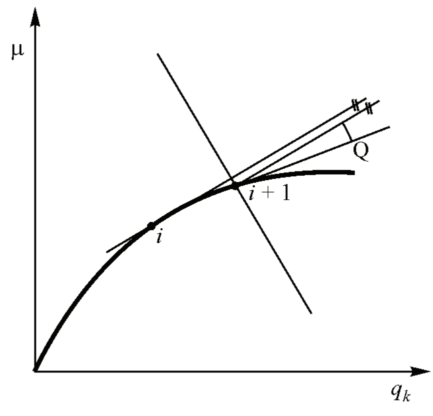


Rys. 3.6. *Idealna procedura sterowania (nierealna), kąt $\theta = 0$ (θ – kąt między styczną do ścieżki równowagi a normalną do hiperpłaszczyzny)*

Na rysunku 3.7 ścieżka narysowana linią ciągłą nie będzie miała charakteru funkcyjnego. W pobliżu punktów G_1, G_2 (punkty zwrotne) musi dojść do rozbieżności algorytmu opartego na sterowaniu przemieszczeniem. Można temu zapobiec zmieniając parametr sterujący. Nigdy się nie zdarza, aby wszystkie parametry węzłowe wykazywały taką tendencję. Zawsze można znaleźć parametry, które w tym samym procesie dają charakterystykę, jak ta pokazana linią przerywaną na rysunku 3.7. Aby usprawnić proces obliczeń, spośród wszystkich parametrów przemieszczeniowych wybiera się do kontynuacji śledzenia ścieżki ten, który wykazuje najmniejszy stosunek $\Delta\mu/\Delta q_k$ w ostatnim kroku procedury odtwarzania ścieżki równowagi. Procedurę można zautomatyzować, a sygnałem do jej zainicjowania jest spadek zbieżności, który objawia się wzrostem liczby iteracji newtonowskich. Praktycznie wzrost liczby iteracji do trzech jest sygnałem do wywołania procedury zmiany parametru sterującego.



Rys. 3.7. *Ścieżka z punktami zwrotnymi*



Rys. 3.8. *Sterowanie procesem przyrostowym w metodzie Riksa*

Zauważmy, że w punktach granicznych ścieżka równowagi jest styczna do odpowiedniej hiperpłaszczyzny i kąt θ między styczną do ścieżki równowagi a normalną do hiperpłaszczyzny jest równy $\pi/2$. Możemy na podstawie tej obserwacji stwierdzić, że przecięcie ścieżki równowagi z tą hiperpłaszczyzną jest dobrze określone, gdy kąt θ jest równy lub bliski zeru, a źle określone, gdy kąt θ jest równy lub bliski $\pi/2$. W tym sensie idealna będzie rodzina powierzchni, które przecinają ścieżkę równowagi prostopadle, tzn. tak, aby dla każdego η kąt θ był równy zero (rys. 3.6). Oczywiście, nie jest możliwe skonstruowanie równania opisującego „idealną” rodzinę powierzchni, ponieważ wymagałoby to znajomości ścieżki równowagi, którą dopiero mamy wyznaczyć. Możemy jednak zadowolić się pewnym przybliżeniem, tak aby kąt θ był bliski zero. Załóżmy, że znamy pewien punkt na ścieżce równowagi oraz potrafimy określić w tym punkcie wektor styczny. Riks [125, 126] zaproponował równanie sterujące w postaci:

$$\dot{\boldsymbol{q}}_\alpha^T(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_\alpha)+\dot{\mu}_\alpha(\mu-\mu_\alpha)=(\eta-\eta_\alpha) \tag{3.15}$$

gdzie kropki $(\cdot)$ oznaczają pochodne względem długości łuku.

Równanie (3.15) definiuje hiperpłaszczyznę prostopadłą do wektora $(\dot{\boldsymbol{q}}_\alpha\ \dot{\mu}_\alpha)$ i odległą od punktu $(\boldsymbol{q}_\alpha\ \mu_\alpha)$ o $(\eta-\eta_\alpha)$. Będzie ona przecinać ścieżkę równowagi prawie prostopadle, gdy odległość $\eta-\eta_\alpha$ będzie dostatecznie mała. Równania równowagi wraz z równaniem sterującym tworzą układ $(N+1)$ równań wyznaczających kolejne punkty ścieżki równowagi. Macierz współczynników przy niewiadomych nie jest już symetryczna. Wadę asymetrii w pełni rekompensuje fakt, że powyższa macierz jest osobliwa jedynie w punktach bifurkacji. W punktach granicznych osobliwość nie występuje. Stosując powyższą metodę do automatycznego wyznaczania podstawowej ścieżki równowagi postulujemy stały przyrost na każdym kroku przyrostowym, stąd wzięła się nazwa metody. Przejście przez punkty graniczne nie napotyka tu na żadne komplikacje numeryczne, natomiast przejście przez punkty bifurkacji w większości przypadków również kończy się sukcesem, jeżeli tylko kolejne rozwiązania są dostatecznie od nich odległe.

Numerycznym problemom sterowania procesem przyrostowym w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych poświęcone są prace między innymi Sokoła i Witkowskiego [141-145]. Na podstawie procedur numerycznych Tomasza Sokoła z Politechniki Warszawskiej autorka po odpowiednich modyfikacjach zaimplementowała program MES KRATA.

4

Metody analizy niezawodności konstrukcji

4.1. Wprowadzenie

Do lat trzydziestych XIX wieku bezpieczeństwo konstrukcji wynikało ze stosowania w projektowaniu tzw. metody obciążeń niszczących, wywodzącej się od koncepcji Ch. Coulomba (1736-1806). Pod wpływem prac L. Naviera (1785-1836) ukształtowała się metoda naprężeń dopuszczalnych. Powyższe metody stosowane były w różnych wersjach w normach projektowania konstrukcji budowlanych do końca lat siedemdziesiątych XX wieku. Radykalną zmianę podejścia do projektowania i oceny bezpieczeństwa konstrukcji zapoczątkowały niezależne prace W. Wierzbickiego i N. Streleckiego. W pracach tych zaproponowano, aby bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych traktować jako zdarzenie losowe i analizować metodami rachunku prawdopodobieństwa. Na podstawie tych koncepcji opracowano, stosowaną obecnie, **półprobabilistyczną metodę stanów granicznych**.

W metodzie tej nie operuje się bezpośrednio zmiennymi losowymi X, lecz ich wartościami charakterystycznymi i obliczeniowymi. Wartość charakterystyczna X_k zmiennej losowej X to wartość, która może zostać przekroczona z pewnym z góry założonym, odpowiednio małym prawdopodobieństwem. Wartość obliczeniowa X_d zmiennej losowej X powstaje przez pomnożenie jej wartości charakterystycznej przez odpowiedni częściowy współczynnik bezpieczeństwa γ. Obliczenia projektowe polegają na sprawdzeniu, czy wartości obliczeniowe spełniają równanie projektowe, właściwe dla danego stanu granicznego. Częściowe współczynniki bezpieczeństwa powinny być tak dobrane, aby spełnienie przez wartości obliczeniowe równania projektowego zapewniało elementowi konstrukcyjnemu odpowiedni stopień niezawodności.

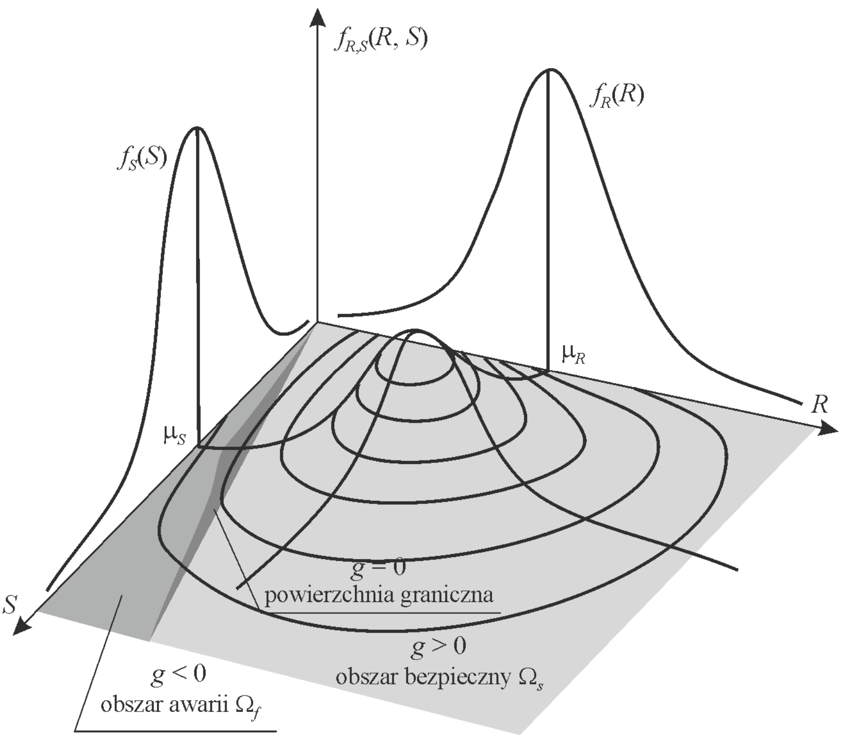
Metody probabilistyczne pozwalają na ilościową ocenę niezawodności konstrukcji. Wykorzystywane są w nich informacje o typach rozkładu zmiennych projektowych i ich parametrach. Takie sformułowanie pozwala na jawne uwzględnienie losowości w procesie projektowania. W rezultacie, możliwa jest budowa modelu matematycznego, który pozwala oszacować, jakie jest prawdopodobieństwo określonego zachowania konstrukcji.

Ze względu na sposób obliczenia prawdopodobieństwa awarii metody te dzielimy na:

- aproksymacyjne: FORM, SORM, metoda powierzchni odpowiedzi,
- symulacyjne: klasyczna metoda Monte Carlo, Importance Sampling, Sztuczne Sieci Neuronowe.

W prezentowanej pracy metody symulacyjne były stosowane jedynie do weryfikacji poprawności obliczeń. Podstawową metodą badawczą była jedna z metod aproksymacyjnych FORM.

Rozpatrywane w niniejszej pracy zagadnienia analizy niezawodności konstrukcji opierają się na następujących założeniach. Zakłada się, że konstrukcja może znajdować się w jednym z dwóch dopuszczalnych stanów: w stanie bezpiecznym lub w stanie awarii (rys. 4.1).



Rys. 4.1. *Powierzchnia graniczna, obszar awarii, obszar bezpieczny dla dwóch zmiennych losowych i liniowej funkcji granicznej*

Przez *awarię* należy tu rozumieć niespełnienie pewnego ograniczenia nałożonego przez projektanta na pracę konstrukcji. Przyjmuje się, że parametry opisujące stan konstrukcji traktowane są jako zmienne losowe (w odróżnieniu od procesów losowych). Rozpatrywane problemy analizy niezawodności dotyczyć będą tzw. „niezawodności elementu”. Przez *element* rozumie się tu całą konstrukcję lub jej część, której stan określony jest przez jedną funkcję graniczną (kryterium awarii). Należy w tym miejscu podkreślić, że praca nie dotyczy niezawodności systemowej, w której uwzględnia się wiele funkcji granicznych oraz możliwość sekwencji awarii poszczególnych elementów prowadzących do zniszczenia całej konstrukcji.

Stany graniczne w analizie niezawodności wyraża się poprzez (określoną na parametrach losowych $\boldsymbol{X}$), funkcję graniczną $g(\boldsymbol{X})$. Przyjmuje się, że konstrukcja spełnia założone wymagania, jeśli $g(\boldsymbol{X}) > 0$. Jeżeli $g(\boldsymbol{X}) = 0$, wówczas zachodzi stan graniczny. Dla $g(\boldsymbol{X}) < 0$ konstrukcja jest w stanie awarii. W przestrzeni zmiennych losowych można zdefiniować dwa obszary: obszar bezpieczny Ω_s i obszar awarii Ω_f. Granicę obszaru awarii $g(\boldsymbol{X}) = 0$ nazywa się *powierzchnią graniczną*.

W celu przedstawienia zagadnień analizy niezawodności rozważmy przykład pryzmatycznego pręta o nośności granicznej na rozciąganie R rozciąganego siłą S. Przyjmujemy, że R i S są nieujemnymi, niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcjach gęstości prawdopodobieństwa odpowiednio $f_R(R)$ oraz $f_S(S)$, prawdopodobieństwo zniszczenia pręta obliczyć można ze wzoru:

$$P_f = \int_{\Omega f} f_{R,S}(R,S)dRdS \tag{4.1}$$

gdzie: $f_{R,S}(R,S)$ – łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych R i S.

Zakładając, że zmienne losowe R i S są niezależne, równanie (4.1) można zapisać w postaci:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{S} f_R(R)dR \right) f_S(S)dS \tag{4.2}$$

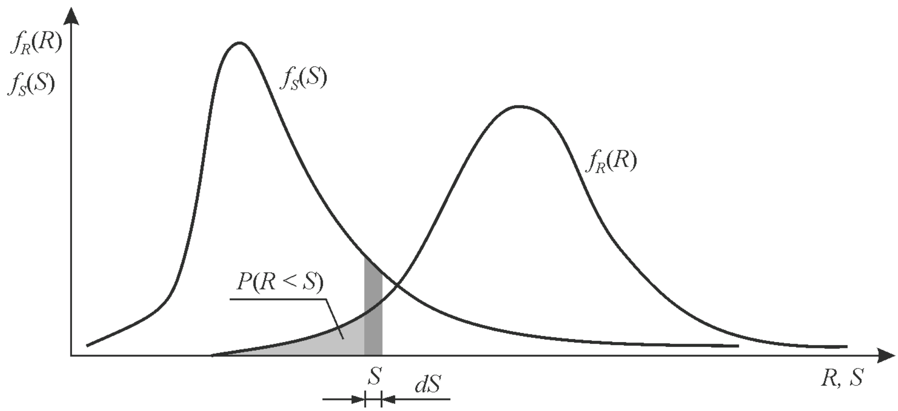
lub alternatywnie znając zależność pomiędzy funkcjami gęstości prawdopodobieństwa $f()$ i dystrybuanty $F()$:

$$F_x(y) = \int_{-\infty}^{y} f_x(x)dx \tag{4.3}$$

czyli:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(S)F_R(S)dS \tag{4.4}$$

W równaniach (4.2) i (4.4) dolną granicą całkowania jest minus nieskończoność, co stanowi pewną trudność w interpretacji fizycznej, gdyż nośność przyjmuje zwykle wartości dodatnie. Wymagane jest więc tutaj założenie, że prawdopodobieństwo wystąpienia ujemnych wartości nośności jest pomijalnie małe. Błąd wynikający z tak przyjętego sposobu zapisu prawdopodobieństwa awarii można znacznie zmniejszyć lub całkowicie wyeliminować poprzez odpowiednie modelowanie rozkładów prawdopodobieństwa nośności *R* i obciążeń *S*. Interpretację graficzną równania (4.2) przedstawiono na rysunku 4.2.



Rys. 4.2. *Interpretacja graficzna prawdopodobieństwa awarii*

Iloczyn $f_R(R)$ i $f_S(S)$, będący funkcją podcałkową w równaniu (4.2), można interpretować jako zdarzenie jednoczesnego wystąpienia określonej wartości obciążenia *S* z przedziału (*S*, *S* + *dS*) i nośności *R* o wartościach mniejszych od *S*. Wartości *S* zmieniają się w granicach od minus do plus nieskończoności, nośność *R* natomiast od minus nieskończoności do *S*. Taka definicja opisuje zatem prawdopodobieństwo wystąpienia wartości obciążenia przewyższającego nośność, czyli prawdopodobieństwo awarii.

Analityczne rozwiązanie całki (4.2) jest możliwe jedynie w kilku szczególnych przypadkach. Najprostszym i często przytaczanym przykładem jest sytuacja, gdy rozważane zmienne losowe *R* i *S* są dane rozkładem normalnym. Wartości oczekiwane zmiennych wynoszą odpowiednio μ_R oraz μ_S, zaś odchylenie standardowe σ_R i σ_S. Przyjmując miarę niezawodności, zwaną marginesem bezpieczeństwa *Z*, w postaci:

$$Z = R - S \tag{4.5}$$

można łatwo obliczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję *Z*, która jako funkcja zmiennych losowych jest również zmienną losową:

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \tag{4.6}$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \tag{4.7}$$

$$P_f = P(Z \le 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) \tag{4.8}$$

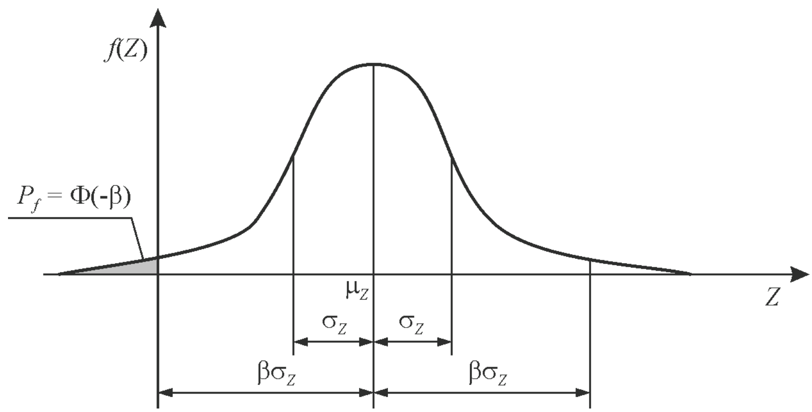
gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Definiując stosunek wartości oczekiwanej zmiennej Z do jej odchylenia standardowego jako β można określić zależność pomiędzy prawdopodobieństwem awarii a wartością parametru β:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \tag{4.9}$$

$$P_f = \Phi(-\beta) \tag{4.10}$$

Graficzną interpretację tak opisanej sytuacji przedstawiono na rysunku 4.3. Zacieniony fragment pola znajdującego się pod wykresem jest równy wartości dystrybuanty w punkcie oddalonym o $\beta\sigma_Z$ od wartości oczekiwanej μ_Z.



Rys. 4.3. *Zależność pomiędzy prawdopodobieństwem awarii a wskaźnikiem niezawodności β*

Taka definicja miary niezawodności jest poprawna jedynie w przypadku, gdy zmienne losowe są normalne i niezależne, a funkcja graniczna ma charakter liniowy. W praktyce założenia te na ogół nie są spełnione, co wiąże się z koniecznością obliczania prawdopodobieństwa awarii w oparciu o wzór (4.1). Przy większej liczbie zmiennych losowych wymaga to długotrwałych obliczeń, co nawet przy użyciu współczesnych komputerów jest trudne do wykonania w możliwym do zaakceptowania czasie. Kolejnym problemem jest określenie obszaru całkowania, gdyż funkcja graniczna, będąca granicą całki, często podana jest w postaci niejawnej. Analiza niezawodności rzeczywistych konstrukcji jest przeprowadzana za pomocą metod przybliżonych (aproksymacyjnych lub symulacyjnych). W praktyce zamiast niewygodnej miary, jaką jest prawdopodobieństwo awarii P_f, podaje się wartość wskaźnika niezawodności β, który jest zdefiniowany jako $P_f = \Phi(-\beta)$.

4.2. Wybrane miary niezawodności

4.2.1. Wskaźnik niezawodności Cornella

Często w praktycznych problemach analizy niezawodności konstrukcji nieznane są rozkłady podstawowych zmiennych losowych $\boldsymbol{X}$. Zakłada się jedynie znajomość wektora wartości średnich $\boldsymbol{X}^0$ oraz macierzy kowariancji $\boldsymbol{C}_x$. Rozwijając funkcję graniczną $g(\boldsymbol{X})$ w szereg Taylora wokół wartości średnich oraz zachowując dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia, funkcja graniczna przybiera postać:

$$g(\boldsymbol{X}) \approx \overline{g}(\boldsymbol{X}) = g\left(\boldsymbol{X}^0\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(\boldsymbol{X})}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}^0} \left(X_i - X_i^0\right) \tag{4.11}$$

Obliczając wartość oczekiwaną oraz wariancję zlinearyzowanej funkcji losowej $\overline{g}(\boldsymbol{X})$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} g^0(\boldsymbol{X}) &\approx \overline{g}^0(\boldsymbol{X}) = g\left(\boldsymbol{X}^0\right) \\ \sigma_g^2(\boldsymbol{X}) &\approx \sigma^2_{\overline{g}}(\boldsymbol{X}) = \nabla g^T(\boldsymbol{X})\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}^0} \mathbf{C}_X \nabla g(\boldsymbol{X})\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}^0} \end{aligned} \tag{4.12}$$

gdzie: $\nabla g(\boldsymbol{X})\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}^0}$ jest gradientem funkcji $g(\boldsymbol{X})$ obliczonym dla wartości średnich wektora $\boldsymbol{X}$, natomiast $\mathbf{C}_X$ jest macierzą kowariancji.

Mając zatem do dyspozycji jedynie informacje o momentach statystycznych można przyjąć, że zmienne $\boldsymbol{X}$ są typu gaussowskiego, a co za tym idzie – również funkcja $\overline{g}(\boldsymbol{X})$ ma rozkład normalny. Tak więc prawdopodobieństwo awarii dla warunku opartego na zlinearyzowanej funkcji granicznej ma postać:

$$P\left[g(\boldsymbol{X}) \le 0\right] \approx P\left[\overline{g}(\boldsymbol{X}) \le 0\right] = P\left[\frac{\overline{g}(\boldsymbol{X}) - \overline{g}^0(\boldsymbol{X})}{\sigma_{\overline{g}}} \le \frac{-\overline{g}^0(\boldsymbol{X})}{\sigma_{\overline{g}}}\right] = \Phi\left(-\beta_C\right) \tag{4.13}$$

gdzie: Φ – dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego, β_C – wskaźnik niezawodności Cornella [27], dany jako:

$$\beta_C = \frac{\overline{g}^0(\boldsymbol{X})}{\sigma_{\overline{g}}(\boldsymbol{X})} \tag{4.14}$$

Zdefiniowany wskaźnik niezawodności nazywa się wskaźnikiem pierwszego rzędu, drugiego momentu, wartości średniej:

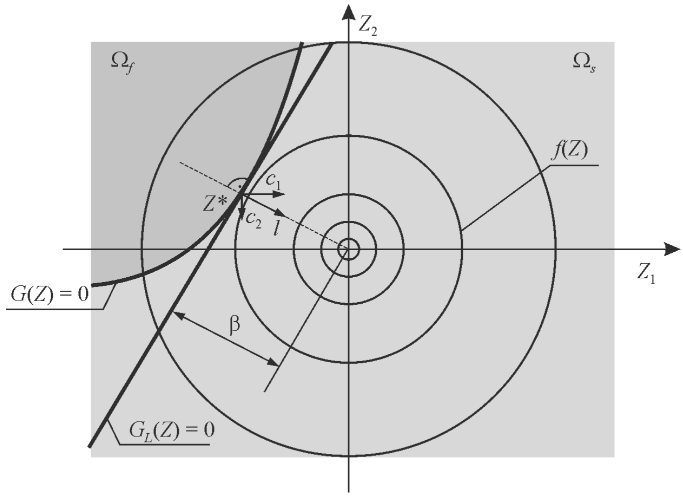
– pierwszego rzędu, ponieważ występują w nim wyrazy pierwszego rzędu rozwinięcia w szereg Taylora funkcji stanu granicznego,
– drugiego momentu, ponieważ występują w nim jedynie wartość oczekiwana i wariancja (nie zależy od typu rozkładu zmiennych losowych),
– wartości średniej, ponieważ rozwinięcie w szereg Taylora następuje wokół wartości średniej.

Przedstawiona metoda jest łatwa w użyciu i nie wymaga znajomości rozkładów zmiennych losowych. Daje jednak niedokładne wyniki, szczególnie w przypadku, gdy „końce" dystrybuant odbiegają od rozkładu normalnego.

Dużym problemem jest zależność wartości β_C od przyjętej postaci funkcji stanu granicznego. Jest to oczywistą konsekwencją linearyzacji funkcji granicznej wokół wartości średnich. Niejednoznaczności tej unika się przyjmując definicję wskaźnika niezawodności zaproponowaną przez Hasofera i Linda [54].

4.2.2. Wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda

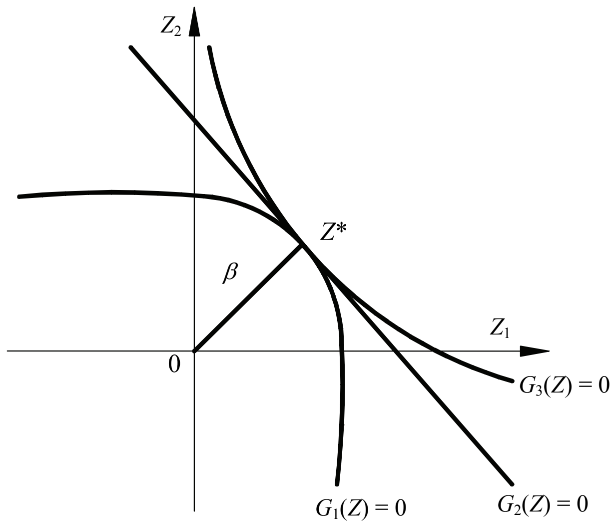
Wskaźnik niezawodności zaproponowany przez Hasofera i Linda jest kolejnym krokiem w formułowaniu miar niezawodności konstrukcji. Przede wszystkim rozwiązuje problem podstawowej wady wskaźnika Cornella, czyli braku niezmienniczości. Propozycja Hasofera i Linda bazuje na tych samych założeniach dotyczących ograniczonej znajomości danych charakteryzujących zmienne losowe, co wskaźnik Cornella. Po transformacji zmiennych losowych $\boldsymbol{X}$ do gaussowskiej przestrzeni standardowej $\boldsymbol{Z}$ linearyzacja funkcji granicznej jest przeprowadzona poprzez rozwinięcie funkcji granicznej w szereg Taylora w leżącym na powierzchni granicznej punkcie, zwanym punktem projektowym $\boldsymbol{Z}^*$ (funkcja graniczna $g(\boldsymbol{X})$ transformuje się w funkcję $G(\boldsymbol{Z})$). Punkt ten jest punktem najbliższym początkowi układu współrzędnych. Ze względu na własności gaussowskiej przestrzeni standardowej, wartość łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa, odpowiadająca awarii w tym punkcie, jest największa. Jest to najbardziej prawdopodobny punkt awarii spośród wszystkich punktów na tej powierzchni. Jeżeli nastąpi awaria, to najprawdopodobniej właśnie w tym punkcie. Od prawidłowego określenia punktu projektowego zależy w sposób oczywisty wartość wskaźnika niezawodności (rys. 4.4).



Rys. 4.4. *Aproksymacja liniowa $G_L(Z)$ powierzchni granicznej $G(Z)$ w punkcie projektowym Z^* (c_1, c_2 – kosinusy kierunkowe)*

W celu obliczenia punktu projektowego opracowano wiele algorytmów. Najwcześniejsze, pochodzące z prac Hasofera, Linda [54] oraz Rackwitza, Fiesslera [113], opierają się na procedurach gradientowych. Późniejsze to korzystające z metody sekwencyjnego programowania kwadratowego algorytmy Schittkowsky'ego [132, 134] oraz Arory [4]. Algorytmy te są ciągle udoskonalane pod kątem zastosowań w oprogramowaniu do obliczeń niezawodnościowych. Trudno jest wskazać najlepszy algorytm, zwłaszcza że mogą być stosowane różne kryteria, np. gwarantowana zbieżność czy najmniejsza liczba operacji. Zależy to w dużej mierze od wymiaru zadania (liczby zmiennych losowych) oraz postaci funkcji stanu granicznego. W niektórych systemach komputerowych, służących obliczeniom niezawodności, stosuje się kilka algorytmów, które uruchamiane są alternatywnie, w zależności od rodzaju postawionego zadania. Przegląd stosowanych algorytmów można znaleźć w pracach [133, 88, 83]. W kolejnym rozdziale przedstawiono algorytm Rackwitza-Fiesslera.

Z definicji wskaźnika Hasofera-Linda jako odległości od powierzchni granicznej wynika podstawowa jego wada, a mianowicie to, że większa wartość β nie musi oznaczać wcale mniejszego prawdopodobieństwa awarii. Jak widać na rysunku 4.5, funkcjom granicznym G_1, G_2 i G_3 odpowiada ten sam wskaźnik niezawodności, pomimo wyraźnie różnego kształtu odpowiadających im obszarów awarii. Jednak dokładność wyników otrzymywanych przy użyciu wskaźnika Hasofera-Linda jest często wystarczająca dla potrzeb praktycznych i dlatego zyskał on dużą popularność jako miara niezawodności, szczególnie w połączeniu z metodami transformacji wykorzystującymi pełną informację o rozkładach zmiennych podstawowych $\boldsymbol{X}$.



Rys. 4.5. *Kształt obszarów awarii dla różnych postaci funkcji granicznych*

4.3. Metody wykorzystujące informacje o rozkładach prawdopodobieństwa

4.3.1. Metoda analizy niezawodności pierwszego rzędu – FORM

Przedstawione dotąd metody analizy niezawodności konstrukcji nie wykorzystywały wiedzy na temat typów rozkładów prawdopodobieństwa podstawowych zmiennych losowych. Zakładano znajomość jedynie wartości średnich oraz macierzy kowariancji, co zgodnie z twierdzeniem o maksymalnej entropii implikowało traktowanie zmiennych jako normalne. Często jednak dostępne są dodatkowe informacje statystyczne pozwalające dokładniej opisać rozkłady prawdopodobieństwa. Poza tym, typy rozkładów niektórych parametrów losowych odbiegają znacznie od rozkładu gaussowskiego i przyjęcie założenia o ich normalności prowadzić może do grubych błędów w ocenie bezpieczeństwa konstrukcji. Bardzo często wyraźnie niegaussowski charakter mają obciążenia atmosferyczne.

Obciążenia takie jak wiatr, śnieg, prądy i fale morskie oddziałują na konstrukcję ze zmienną w czasie intensywnością i powinny być traktowane jako procesy losowe. Można jednak czasem traktować je jako zmienne losowe o rozkładach prawdopodobieństwa odpowiadających rozkładom maksimów tych obciążeń w danym (długim) przedziale czasu. Przykładami takich rozkładów są rozkłady Gumbela i Frecheta. Z metod wykorzystujących pełny opis probabilistyczny zmiennych losowych w pracy wykorzystano metodę FORM.

Metoda FORM jest jedną z najbardziej skutecznych przybliżonych metod obliczania miar niezawodności. W przypadku ogólnym, gdy rozkład wektora $\boldsymbol{X}$ zmiennych bazowych nie jest wektorem o rozkładzie gaussowskim, stosuje się transformację, sprowadzającą ten wektor do wektora gaussowskiego, którego współrzędne są niezależnymi standaryzowanymi zmiennymi normalnymi. Istnienie tego typu transformacji oraz sposób jej konstruowania pokazał po raz pierwszy Rosenblatt [128]. Do obliczeń niezawodności adaptowali tę transformację Hohenbichler i Rackwitz [59]. Transformacja podstawowych zmiennych losowych do gaussowskiej przestrzeni standardowej musi zapewniać równoważność sformułowania problemu niezawodności.

Prawdopodobieństwo zniszczenia zdefiniowane w przestrzeni $\boldsymbol{x}$ musi być równe prawdopodobieństwu zdefiniowanemu w przestrzeni $\boldsymbol{z}$:

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_{\Delta_f} \prod_{i=1}^{n} \varphi(z_i) dz_1 dz_2 \ldots dz_n \tag{4.15}$$

gdzie: $f_X(\boldsymbol{x})$ jest łączną funkcją gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych podstawowych, $\varphi(z_i)$ łączną funkcją gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych standaryzowanych, Ω_f jest obszarem awarii w przestrzeni $\boldsymbol{x}$, a Δ_f jest obszarem awarii w przestrzeni $\boldsymbol{z}$. Transformację tych obszarów można zapisać symbolicznie jako:

$$\Omega_f = \{\boldsymbol{x} : g(\boldsymbol{x}) \le 0\} \quad \to \quad \Delta_f = \{\boldsymbol{z} : G(\boldsymbol{z}) \le 0\} \tag{4.16}$$

Powierzchnia graniczna transformuje się następująco:

$$g(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \to \quad g\left[T^{-1}(\boldsymbol{z})\right] = G(\boldsymbol{z}) = 0, \qquad \boldsymbol{Z} = T(\boldsymbol{X}) \tag{4.17}$$

Jeśli zmienne $\boldsymbol{X}$ mają rozkład normalny (lecz niestandardowy), wówczas transformacja liniowa:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{L}^{-1} \cdot \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^o) \tag{4.18}$$

gdzie: $\boldsymbol{D} = [\sigma_{xi}]$ jest macierzą diagonalną z odchyleniami standardowymi zmiennych losowych na przekątnej, a $\boldsymbol{L}$ jest macierzą trójkątną dolną otrzymaną z dekompozycji Cholesky'ego macierzy współczynników korelacji $\boldsymbol{\rho} = \rho_{ij}$ taką, że $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$, spełnia wzór (4.15).

W przypadku niezależnych zmiennych niegaussowskich transformacja $\boldsymbol{Z} = T(\boldsymbol{X})$ ma charakter nieliniowy:

$$z_i = \Phi^{-1}\left[F_{X_i}(x_i)\right] \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4.19}$$

gdzie: Φ^{-1} jest funkcją odwrotną do dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego, a F_{X_i} jest dystrybuantą rozkładu zmiennej losowej $\boldsymbol{X}_i$.

Dla ogólnego przypadku niegaussowskich, zależnych zmiennych losowych, Hohenbichler i Rackwitz [59] zaproponowali użycie tzw. transformacji Rosenblatta [128] w postaci:

$$\Phi(z_1) = H_1(\boldsymbol{x}_1) = F_1(\boldsymbol{x}_1) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}_1} f_1(t)\mathrm{d}t \tag{4.20}$$

$$\Phi(z_2) = H_2(\boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{x}_1) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}_2} \frac{f_2(\boldsymbol{x}_1,t)}{f_1(\boldsymbol{x}_1)}\mathrm{d}t \tag{4.21}$$

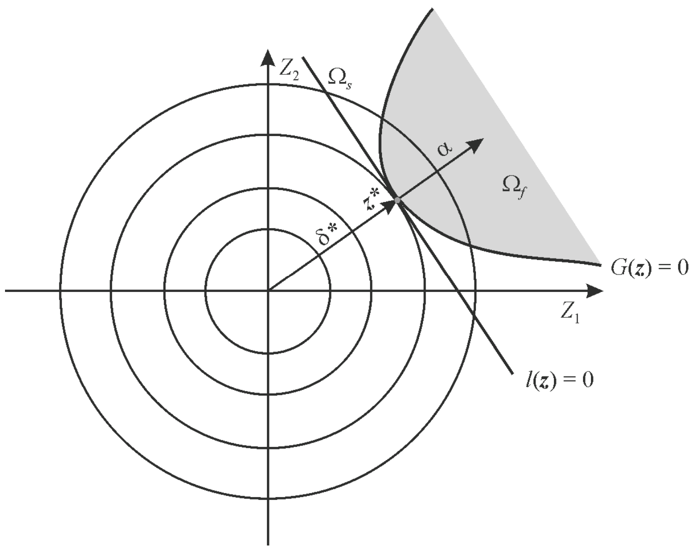
$$\Phi(z_i) = H_i(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,...,\boldsymbol{x}_{i-1}) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}_i} \frac{f_i(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,...,\boldsymbol{x}_{i-1},t)}{f_{i-1}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,...,\boldsymbol{x}_{i-1})}\mathrm{d}t \tag{4.22}$$

gdzie $f_i(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,...,\boldsymbol{x}_i)$ oznacza gęstość prawdopodobieństwa rozkładu brzegowego:

$$f_i(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,...,\boldsymbol{x}_i) = \int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,...,\boldsymbol{x}_n)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{i+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{i+2}...\mathrm{d}\boldsymbol{x}_n \tag{4.23}$$

Transformacja (4.20)-(4.22) jest wygodna w użyciu, jeżeli znane są rozkłady warunkowe H_i lub jeśli znana jest łączna gęstość rozkładu $\boldsymbol{X}$. Łatwo sprawdzić, że dla zmiennych niezależnych transformacja Rosenblatta redukuje się do (4.19). Należy jednak zauważyć, że przedstawiona transformacja nie jest jednoznaczna i może zależeć od uporządkowania zmiennych w wektorze $\boldsymbol{X}$. Tak jak to zostało pokazane w pracy [59], konsekwencją tej niejednoznaczności mogą być różne postacie powierzchni granicznej $G(\boldsymbol{Z}) = 0$, a co za tym idzie – różne lokalizacje punktu projektowego i w konsekwencji różne wartości prawdopodobieństwa awarii. W takiej sytuacji powinno się przeanalizować wszystkie $n!$ ustawienia wektora $\boldsymbol{X}$ i wybrać ten punkt projektowy, który leży najbliżej początku układu. Dla dużych n jest to zadanie bardzo czasochłonne obliczeniowo, jeśli w ogóle wykonalne.

Oprócz transformacji Rosenblatta stosowana jest także transformacja Hermite'a oraz transformacja wynikająca z tzw. modelu Natafa. Transformacja przeprowadza powierzchnię stanu granicznego $g(\boldsymbol{X}) = 0$ na inną powierzchnię $G(\boldsymbol{Z}) = 0$. Warto zauważyć, że efektywne obliczenie całki funkcji gęstości n-wymiarowego standardowego rozkładu normalnego po obszarze awarii jest nadal zadaniem skomplikowanym, poza przypadkiem, gdy $G(\boldsymbol{Z}) = 0$ jest hiperpłaszczyzną w przestrzeni. Jednak dwie istotne własności funkcji gęstości standardowego rozkładu normalnego sprawiają, że transformacja jest przydatna w obliczaniu prawdopodobieństwa awarii. Pierwszą z tych własności jest obrotowa symetria wokół początku układu współrzędnych. Druga to ekspotencjalne zanikanie tej funkcji wraz z kwadratem odległości od początku układu współrzędnych. Zatem największy „wkład" do prawdopodobieństwa awarii pochodzi z obszaru stanowiącego sąsiedztwo punktu na powierzchni stanu granicznego, którego odległość od początku układu współrzędnych jest najmniejsza. Punkt realizujący minimum odległości to zdefiniowany już wcześniej punkt projektowy.



Rys. 4.6. *Przybliżenie pierwszego rzędu wartości prawdopodobieństwa awarii*

W metodzie FORM, po transformacji zmiennych losowych do gaussowskiej przestrzeni standardowej Z, aproksymujemy powierzchnię graniczną $G(z) = 0$ hiperpłaszczyzną styczną do niej w punkcie projektowym. Hiperpłaszczyzna opisana jest równaniem:

$$l(\boldsymbol{Z}) = -\alpha^T \cdot \boldsymbol{Z} + \beta \tag{4.24}$$

$$\alpha = -\left.\frac{\nabla G(z)}{\left\|\nabla G(z)\right\|}\right|_{z=z^*} \tag{4.25}$$

$$\beta = \mathrm{sign}[l(0)]\delta^* \tag{4.26}$$

gdzie: δ^* – odległość hiperpłaszczyzny $l(z) = 0$ od początku układu współrzędnych, α – wektor jednostkowy o kierunku przeciwnym do gradientu funkcji $G(z)$ w punkcie projektowym.

Głównym problemem oszacowania prawdopodobieństwa awarii metodą FORM jest znalezienie położenia punktu projektowego. To zadanie może być rozwiązane efektywnie za pomocą algorytmów gradientowych optymalizacji, które minimalizują odległość punktu projektowego na krzywej od środka układu współrzędnych. Prezentowany poniżej, klasyczny algorytm Rackwitza-Fiesslera (ze względu na swoją efektywność oraz prostotę) stał się punktem wyjścia wielu procedur.

Zadanie lokalizacji punktu projektowego może być przedstawione następująco:

– znaleźć:

$$\min Q(z) = z^{T} z \tag{4.27}$$

– przy ograniczeniu:

$$G(z) = 0 \tag{4.28}$$

Po rozwinięciu kwadratowej funkcji celu $Q(z)$ wokół punktu $z^{(k)}$ w szereg Taylora oraz linearyzując funkcję $G(z)$ dostajemy zadanie znalezienia optymalnego przyrostu $\Delta z^{(k)}$:

$$\begin{aligned}\min \widetilde{Q}\left(\Delta z^{(k)}\right) &= Q\left(z^{(k)}\right) + \nabla Q^{T}\left(z^{(k)}\right)\cdot \Delta z^{(k)} + \frac{1}{2}\Delta z^{(k)T}\cdot \nabla^{2} Q\left(z^{(k)}\right)\cdot \Delta z^{(k)} = \\ &= z^{(k)T} z^{(k)} + 2 z^{(k)T}\Delta z^{(k)} + \Delta z^{(k)T}\Delta z^{(k)}\end{aligned} \tag{4.29}$$

przy ograniczeniu:

$$\widetilde{G}\left(\Delta z^{(k)}\right) = G\left(z^{(k)}\right) + \nabla G^{T}\left(z^{(k)}\right)\cdot \Delta z^{(k)} = 0 \tag{4.30}$$

Warunek istnienia w punkcie z^{k} minimum lokalnego wynika z warunku stacjonarności funkcji Lagrange'a.

Funkcja Lagrange'a ma postać:

$$\begin{aligned}L\left(\Delta z^{(k)}, \lambda\right) &= z^{(k)T} z^{(k)} + 2 z^{(k)T}\Delta z^{(k)} + \Delta z^{(k)T}\Delta z^{(k)} - \\ &\quad + \lambda\left(G\left(z^{(k)}\right) + \nabla G^{T}\left(z^{(k)}\right)\cdot \Delta z^{(k)}\right)\end{aligned} \tag{4.31}$$

Warunek konieczny jest określony przez tzw. kryteria Kuhna-Tuckera.

Warunki Kuhna-Tuckera:

$$\nabla L = 2z^{(k)} + 2\Delta z^{(k)} - \lambda \nabla G\left(z^{(k)}\right) = 0 \tag{4.32}$$

$$G\left(z^{(k)}\right) + \nabla G^T\left(z^{(k)}\right) \cdot \Delta z^{(k)} = 0 \tag{4.33}$$

Po przekształceniach otrzymujemy wzór iteracyjny na znajdowanie punktu projektowego zaproponowany przez Hasofera i Linda w 1974 r.:

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{\left\|\nabla G\left(z^{(k)}\right)\right\|^2} \cdot \left(\nabla G^T\left(z^{(k)}\right) \cdot z^{(k)} - G\left(z^{(k)}\right)\right) \cdot \nabla G\left(z^{(k)}\right) \tag{4.34}$$

Iteracje kontynuowane są aż do spełnienia warunku:

$$\left|z_i^{(k+1)} - z_i^{(k)}\right| \le \varepsilon \text{ dla wszystkich } i \qquad \text{oraz} \qquad \left|G(z^*)\right| \le \varepsilon \tag{4.35}$$

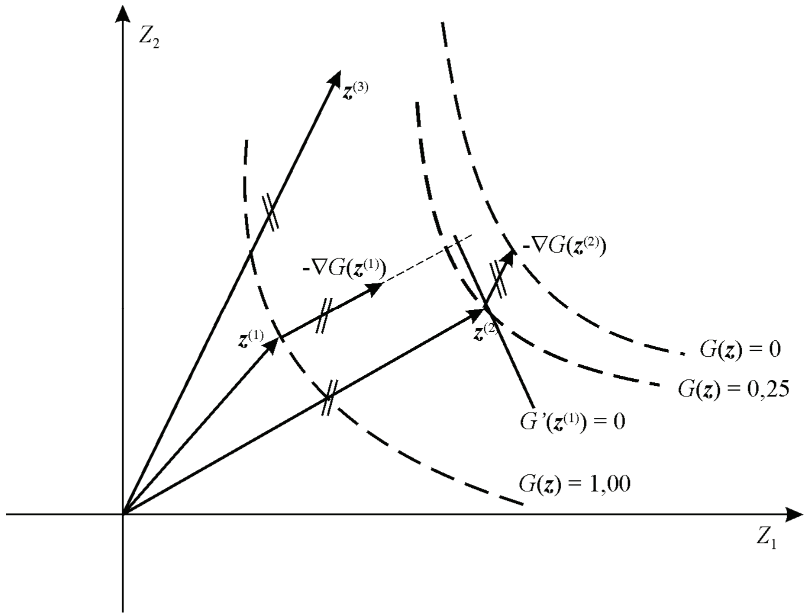
Związek posiada przejrzystą interpretację geometryczną:

$$z^{(k+1)} = \underbrace{\frac{1}{\left\|\nabla G\left(z^{(k)}\right)\right\|} \cdot \left(\nabla G^T\left(z^{(k)}\right) z^{(k)} - G\left(z^{(k)}\right)\right)}_{\text{długość}} \underbrace{\frac{\nabla G\left(z^{(k)}\right)}{\left\|\nabla G\left(z^{(k)}\right)\right\|}}_{\text{kierunek poszukiwań}} \tag{4.36}$$

Długość wektora $z^{(k+1)}$ jest sumą długości rzutu wektora $z^{(k)}$ na kierunek $\nabla G\left(z^{(k)}\right)$ oraz długości $G\left(z^{(k)}\right) / \left\|\nabla G\left(z^{(k)}\right)\right\|$, która wynika z zastąpienia powierzchni granicznej śladem hiperpłaszczyzny $G'\left(z^{(k)}\right) = 0$ powstałej wskutek linearyzacji funkcji granicznej w punkcie $z^{(k)}$.

Zasadę działania procedury przedstawia rysunek 4.7.

W punkcie $z^{(1)}$ obliczony gradient $\nabla G\left(z^{(1)}\right)$ wyznacza kierunek następnego kroku. Dlatego też wektory $\nabla G\left(z^{(1)}\right)$ i $z^{(2)}$ są równoległe. Długość drugiego kroku $\left\|z^{(2)}\right\|$ jest określona przez $z^{(1)}$, $G\left(z^{(1)}\right)$, $\nabla G^T\left(z^{(1)}\right)$. Analogicznie w punkcie $z^{(2)}$ obliczany jest gradient $\nabla G\left(z^{(2)}\right)$ oraz wartość funkcji granicznej w celu wyznaczenia położenia następnego punktu $z^{(3)}$. Procedura zostaje przerwana, gdy zostaną spełnione warunki zbieżności.



Rys. 4.7. *Zasada działania procedury*

Bardzo dużą zaletą metody FORM jest to, że umożliwia ona obliczenie **wrażliwości wskaźnika niezawodności** na zmianę dowolnych występujących w opisie zadania parametrów, praktycznie bez potrzeby dodatkowych obliczeń jako pierwszą pochodną wskaźnika β po zadanej zmiennej.

W praktyce wadą procedury okazała się powolna zbieżność, a w przypadku silnie nieliniowych powierzchni granicznych nawet jej brak. Ta niedogodność algorytmu Rackwitza-Fiesslera została częściowo usunięta poprzez zastosowanie dodatkowo procedury redukcji długości kroku zaproponowanej przez Abdo [1]. Alternatywą w stosunku do procedury Abdo-Rackwitza-Fiesslera są algorytmy rekurencyjnego programowania kwadratowego (*Sequential Quadratic Programming* – SQP). Algorytmy te wykorzystują dodatkową informację o drugich pochodnych w procedurze określania kierunku poszukiwań. W praktyce informacja ta jest uzyskiwana poprzez aproksymację macierzy hesjanu funkcji Lagrange'a jedynie za pomocą gradientów. Najpopularniejszą metodą przybliżania hesjanu jest metoda BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shannon [47]).

Metoda FORM daje najlepsze rezultaty, gdy istnieje tylko jeden punkt projektowy, funkcja graniczna nie jest silnie nieliniowa, jest różniczkowalna. W przypadku istnienia wielu lokalnych minimów znajdujących się w podobnej odległości jak z^* od początku układu współrzędnych, algorytm ARF nie daje gwarancji znalezienia globalnego minimum.

4.3.2. Metoda analizy niezawodności drugiego rzędu – SORM

W niektórych przypadkach liniowe przybliżenie funkcji granicznej może okazać się niewystarczające. Czasami funkcja graniczna w przestrzeni oryginalnej jest liniowa, a po transformacji jej do standardowej przestrzeni gaussowskiej staje się funkcją nieliniową. W metodzie SORM [43, 16, 17, 45, 162, 33, 57, 32, 35, 178, 180, 181, 2] powierzchnię graniczną przybliża się paraboloidą zawierającą punkt projektowy, który obliczamy, tak jak w metodzie FORM. Istnieją dwa sposoby wyznaczania paraboloidy przybliżającej powierzchnię graniczną. Pierwszy, krzywiznowy, polegający na wyznaczeniu paraboloidy w oparciu o krzywizny funkcji granicznej w punkcie projektowym. Drugi, punktowy, polegający na napisaniu równania paraboloidy przechodzącej przez trzy punkty. Zaletą drugiej koncepcji jest to, że nie trzeba obliczać hesjanu funkcji granicznej w punkcie projektowym. Nie jest zatem konieczne rozwiązywanie problemu własnego dla hesjanu, szczególnie kosztownego w przypadku dużej liczby zmiennych projektowych. Dodatkową zaletą tego podejścia jest możliwość szacowania prawdopodobieństwa awarii dla problemów, w których funkcja graniczna jest zaszumiona. Dla zaszumionych funkcji wyznaczanie paraboloidy na podstawie wartości hesjanu w punkcie projektowym może prowadzić do dużych błędów. Metodą SORM otrzymuje się lepsze przybliżenie prawdopodobieństwa awarii niż metodą FORM. Metoda ta jest jednak bardziej czasochłonna, co może stwarzać spore problemy w przypadku analizy dużych problemów inżynierskich. W celu zbudowania paraboloidy sposobem pierwszym wprowadza się najpierw nowy układ współrzędnych $[v_1^{'}, v_2^{'}, \ldots, v_n^{'}]$ poprzez taki obrót układu $[z]$, aby nowa oś $v_n^{'}$ pokrywała się z wektorem z^*. Transformacja ortogonalna opisująca to przekształcenie ma postać:

$$\boldsymbol{V}' = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{Z} \tag{4.37}$$

gdzie $\mathbf{Q}$ jest macierzą transformacji $n \times n$, której ostatnią kolumną jest wektor cosinusów kierunkowych $\boldsymbol{\alpha}$, a pozostałe kolumny tworzone są za pomocą odpowiednich metod ortogonalizacji, np. Grama-Schmidta. Powierzchnia graniczna $G(\boldsymbol{z}) = 0$ transformuje się na powierzchnię:

$$G_{v'}(\boldsymbol{v}') = 0 \tag{4.38}$$

daną w układzie współrzędnych $[\boldsymbol{v}'] = \left[\widetilde{\boldsymbol{v}}', v_n^{'}\right] = \left[v_1^{'}, v_2^{'}, \ldots, v_{n-1}^{'}, v_n^{'}\right]$. Równanie (4.38) rozwiązane względem $v_n^{'}$ zapisać można jako:

$$v_n^{'} = f_{v'}(\widetilde{\boldsymbol{v}}') \tag{4.39}$$

Punkt projektowy z* transformuje się na punkt $\boldsymbol{v}'^{*} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{z}^* = \left\{ \overbrace{0,0...0,}^{n-1}\beta \right\}$, gdzie β jest wskaźnikiem niezawodności. Paraboliczna aproksymacja powierzchni granicznej wokół punktu $\boldsymbol{v}'^{*}$ ma postać:

$$v_n' = f_{v'}(\tilde{\boldsymbol{v}}') \approx s_{v'}(\tilde{\boldsymbol{v}}') = \beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \left.\frac{\partial^2 f_{v'}(\tilde{v}')}{\partial v_i' \partial v_j'}\right|_{\tilde{V}'=0} v_i' v_j' = \beta + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{v}}^T \boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{v}}' \quad (4.40)$$

gdzie $\boldsymbol{H}$ jest macierzą hesjanu funkcji $f_{v'}(\tilde{\boldsymbol{v}}')$ o wymiarach (n-1)x(n-1), obliczoną w punkcie $\breve{\boldsymbol{v}}' = \boldsymbol{0}$. Układ [$\boldsymbol{v}$'] obracany jest następnie wokół osi v_n' tak, aby mieszane drugie pochodne w nowym układzie $[\boldsymbol{v}] = [\tilde{\boldsymbol{v}}, v_n] = \left[v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n = v_n'\right]$ znikały. Transformacja ta ma postać:

$$\tilde{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{R}^T \tilde{\boldsymbol{V}}' \quad (4.41)$$

gdzie $\boldsymbol{R}$ jest macierzą ortogonalną spełniającą równanie:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^T \quad (4.42)$$

gdzie $\boldsymbol{A}$ jest diagonalną macierzą o wymiarze (n-1)x(n-1) z wartościami własnymi macierzy $\boldsymbol{H}$ na przekątnej. Oznaczając przez $G_v(\tilde{\boldsymbol{v}}, v_n) = 0$ powierzchnię graniczną w nowym układzie współrzędnych oraz podobnie jak we wzorze (4.39) przedstawiając ją w postaci:

$$v_n = f_v(\tilde{\boldsymbol{v}}) \quad (4.43)$$

aproksymacja paraboliczna funkcji granicznej w otoczeniu punktu $\boldsymbol{v}^*$, który odpowiada punktowi projektowemu $\boldsymbol{z}^*$, ma postać:

$$G_v(\boldsymbol{v}) = f_v(\tilde{\boldsymbol{v}}) - v_n \approx s_v(\tilde{\boldsymbol{v}}) - v_n = \beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} k_i v_i^2 - v_n \quad (4.44)$$

gdzie k_i, $i = 1,\ldots, n-1$ są krzywiznami głównymi powierzchni $v_n = f_v(\tilde{\boldsymbol{v}})$ w punkcie $\boldsymbol{v}^*$ postaci:

$$k_i = \left.\frac{\partial^2 f_v(\tilde{v})}{\partial v_i^2}\right|_{\tilde{v}'=0} \qquad i = 1,2,\ldots,n-1 \quad (4.45)$$

Transformacje (4.37) i (4.41) są liniowe i zachowują początek układu współrzędnych w $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$. Wektor losowy $\boldsymbol{Z}$ transformuje się tożsamościowo na wektor losowy $\boldsymbol{V}$, którego składowe są niezależnymi standaryzowanymi zmiennymi gaussowskimi. Oszacowanie prawdopodobieństwa awarii dla parabolicznej aproksymacji funkcji granicznej ma postać:

$$
\begin{aligned}
P_f &= \mathsf{P}[G(\boldsymbol{Z}) \le 0] = \int_{\Delta f} \varphi_n(\boldsymbol{z},\mathbf{0},\boldsymbol{I})d\boldsymbol{z} = \\
&= \mathsf{P}[G_v(\boldsymbol{V}) \le 0] = \int_{G_v(v)\le 0} \varphi_n(\boldsymbol{v},\mathbf{0},\boldsymbol{I})d\boldsymbol{v} = \\
&= \mathsf{P}[V_n \ge f_v(\widetilde{\boldsymbol{V}})] = \int\limits_{v_n \ge f_n(\widetilde{v})} \varphi(v_n)\varphi_{n-1}(\widetilde{\boldsymbol{v}},\mathbf{0},\boldsymbol{I})d\boldsymbol{v}
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{f^2} &\approx \mathsf{P}\left[V_n \ge s_v(\widetilde{\boldsymbol{V}})\right] = \int_{v_n \ge s_v(\widetilde{v})} \varphi(v_n)\varphi_{n-1}(\widetilde{\boldsymbol{v}},\mathbf{0},\boldsymbol{I})d\boldsymbol{v} = \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} \Phi\left(-\beta - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} k_i v_i^2\right)\varphi_{n-1}(\widetilde{\boldsymbol{v}},\mathbf{0},\boldsymbol{I})d\widetilde{\boldsymbol{v}}
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Wykorzystując rozwinięcie w szereg Taylora funkcji:

$$\ln\Phi(-\beta - x) \approx \ln\Phi(-\beta) - x\psi(-\beta)$$

gdzie $\psi(-\beta) = \varphi(-\beta)/\Phi(-\beta)$, oszacowanie prawdopodobieństwa zniszczenia dane jest następująco:

$$
\begin{aligned}
P_{f^2} &\approx \Phi(-\beta)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\psi(-\beta)\sum_{i=1}^{n-1} k_i v_i^2\right)\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}v_i^2\right)d\widetilde{\boldsymbol{v}} = \\
&= \Phi(-\beta)\prod_{i=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}v_i^2\left(1 + k_i\psi(-\beta)\right)\right)dv_i = \\
&= \Phi(-\beta)\prod_{i=1}^{n-1}\left[1 + k_i\psi(-\beta)\right]^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

W przypadku gdy $\beta \to \infty, \psi(-\beta) \to \beta,$ wzór (4.48) uprościć można do postaci:

$$P_{f^2} = \Phi(-\beta)\prod_{i=1}^{n-1}\left[1 + k_i\beta\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{4.49}$$

Wskaźnik niezawodności odpowiadający prawdopodobieństwu zniszczenia P_{f^2} wynosi:

$$\beta^{\text{SORM}} = -\Phi^{-1}\left(P_{f^2}\right) \tag{4.50}$$

Aproksymacja funkcji granicznej paraboloidą pozwala wprowadzić współczynnik poprawkowy do oszacowania prawdopodobieństwa awarii. Uwzględnia on krzywizny powierzchni granicznej w punkcie z^*. Wzory (4.48) i (4.49) mogą być stosowane przy założeniu, że odpowiednio $k_i > -1/\psi(-\beta),$ oraz $k_i > -1/\beta,$ $i = 1,...,n-1.$ Krzywizna mniejsza niż $-1/\beta$ jest nieakceptowalna, gdyż świadczy o istnieniu na powierzchni granicznej w otoczeniu wyznaczonego punktu z^* innego punktu bliższego początkowi układu współrzędnych.

Jak to zostało wcześniej pokazane, doprowadzenie macierzy hesjanu funkcji $f_{V'}(\widetilde{v}')$ do postaci diagonalnej wymaga rozwiązania zagadnienia własnego. W przypadku problemów o dużej liczbie zmiennych losowych może być to zadanie wymagające dużego nakładu obliczeń numerycznych. Der Kiureghian i inni w pracach [178, 35] zaproponowali też uproszczoną metodę aproksymacji drugiego rzędu, która nie wymaga rozwiązywania problemu własnego. Zakłada się w niej, że osie układu $[\boldsymbol{v}']$ pokrywają się z kierunkami głównych krzywizn paraboloidy niezależnie od ich rzeczywistej orientacji. Krzywizny potrzebne w oszacowaniu uzyskuje się poprzez odpowiednią konstrukcję paraboloidy, dopasowanej do rzeczywistej powierzchni granicznej w punktach znajdujących się w pewnej odległości od punktu projektowego. Kolejną propozycję metody SORM oraz próbę usystematyzowania dotychczas zaproponowanych metod drugiego rzędu przedstawił Adhikari [2].

4.3.3. Metoda Monte Carlo

Terminem **metody Monte Carlo** określane są algorytmy, w których do rozwiązania problemu wykorzystuje się analizę statystyczną próby losowej otrzymanej w wyniku symulacji. Metody te są powszechnie stosowane do numerycznego całkowania funkcji wielowymiarowych zmiennych losowych; do tej klasy problemów należy również oszacowanie prawdopodobieństwa awarii. Przybliżenie prawdopodobieństwa awarii otrzymuje się na podstawie oszacowania wartości oczekiwanej funkcji charakterystycznej obszaru awarii, otrzymanego za pomocą estymatora właściwego w przypadku przyjętej metody symulacji. Klasyczna metoda symulacyjna Monte Carlo [127, 184, 129] polega na generowaniu realizacji $\boldsymbol{x}$ wektora losowego $\boldsymbol{X}$ zgodnie z łączną gęstością rozkładu prawdopodobieństwa $f_X(\boldsymbol{x})$, a następnie sprawdzaniu czy dana realizacja leży w obszarze bezpiecznym, czy w obszarze awarii. Liczba „trafień" w obszar awarii w stosunku do całkowitej liczby symulacji stanowi estymator prawdopodobieństwa awarii. Powyższą ideę zapisać można definiując funkcję charakterystyczną zbioru (obszaru awarii) jako:

$$\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f \\ 0 & \text{jeśli} \quad \boldsymbol{x} \notin \Omega_f \end{cases} \tag{4.51}$$

$\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X})$ jest zatem zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym:

$$\mathsf{P}\left[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X}) = 1\right] = P_f\,, \qquad \mathsf{P}\left[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X}) = 0\right] = 1 - P_f \tag{4.52}$$

gdzie $P_f = \mathsf{P}\left[\boldsymbol{X} \in \Omega_f\right]$. Wartość średnia oraz wariancja $\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X})$ mają postać:

$$\chi^0_{\Omega_f}(\boldsymbol{X}) = \mathsf{E}\left[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X})\right] = 1 \cdot P_f + 0 \cdot \left(1 - P_f\right) = P_f \tag{4.53}$$

$$\mathsf{V}ar\left[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X})\right] = \mathsf{E}\left[\left(\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X})\right)^2\right] - \left(\mathsf{E}\left[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X})\right]\right)^2 = P_f - P_f^2 = P_f\left(1 - P_f\right) \tag{4.54}$$

W metodzie Monte Carlo do obliczenia prawdopodobieństwa awarii wykorzystuje się estymator wartości średniej funkcji charakterystycznej zbioru, postaci:

$$\tilde{\chi}^0_{\Omega_f} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \chi_{\Omega_f}\left(\boldsymbol{X}_k\right) = \tilde{P}_f \tag{4.55}$$

gdzie $\boldsymbol{X}_k$ są niezależnymi wektorami losowymi o rozkładzie prawdopodobieństwa zdefiniowanym funkcją gęstości $f_X(\boldsymbol{x})$, a K jest liczbą symulacji. Wartość średnia oraz wariancja estymatora dane są jako:

$$\tilde{P}^0_f = \mathsf{E}\left[\tilde{P}_f\right] = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \chi^0_{\Omega_f}\left(\boldsymbol{X}_k\right) = \frac{1}{K} K P_f = P_f \tag{4.56}$$

$$\sigma^2_{\tilde{P}_f} = \mathsf{V}ar\left[\tilde{P}_f\right] = \frac{1}{K^2}\sum_{k=1}^{K} \mathsf{V}ar\left[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X}_k)\right] = \frac{1}{K^2} K P_f\left(1 - P_f\right) = \frac{1}{K} P_f\left(1 - P_f\right) \tag{4.57}$$

Współczynnik zmienności estymatora ma postać:

$$v_{\widetilde{P}_f} = \frac{\sigma_{\widetilde{P}_f}}{\widetilde{P}_f^0} = \sqrt{\frac{1-P_f}{KP_f}} \tag{4.58}$$

Z powyższego wzoru wynika, że uzyskanie współczynnika zmienności estymatora rzędu 0,1 przy przewidywanym prawdopodobieństwie awarii, które dla rzeczywistych konstrukcji waha się w granicach od 10^{-7} do 10^{-4}, wymaga przeprowadzenia $K = 10^6$-10^9 symulacji, co nawet przy możliwościach współczesnych komputerów wieloprocesowych jest zadaniem ogromnym, jeśli w ogóle wykonalnym w możliwym do zaakceptowania czasie.

Olbrzymi nakład obliczeniowy związany z klasyczną metodą Monte Carlo dyskwalifikuje jej przydatność do analizy praktycznych problemów niezawodności konstrukcji. Dla niewielkich zadań, gdy czas obliczenia wartości funkcji granicznej jest bardzo mały, metoda ta może być stosowana do weryfikacji wyników otrzymanych przy użyciu FORM lub SORM (np. wykrycia grubych błędów wynikających z nieuwzględnienia wielokrotnych punktów projektowych).

4.3.4. Metoda Importance Sampling

Klasyczna metoda Monte Carlo w analizie niezawodności wykorzystuje symulacje z rozkładu prawdopodobieństwa losowych parametrów konstrukcji. Prawdopodobieństwo awarii można również oszacować na podstawie próbek z innych rozkładów prawdopodobieństwa. Okazuje się, że odpowiedni dobór rozkładu prawdopodobieństwa do rozwiązywanego problemu pozwala znacznie zmniejszyć liczbę symulacji, potrzebnych do otrzymania oszacowania o wymaganej dokładności. Metoda wykorzystująca to podejście jest nazywana Importance Sampling [58, 39]. Przesunięcie do punktu projektowego wartości średniej rozkładu prawdopodobieństwa, z którego generuje się próbę losową, jest najczęściej stosowaną w analizie niezawodności strategią metody Importance Sampling. Takie przesunięcie koncentracji próbkowania w region awarii opiera się na poniższej zależności definiującej wartość średnią:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{\boldsymbol{X}}\left[X(\boldsymbol{X})\right] &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} X(\boldsymbol{x}) f_X(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} X(\boldsymbol{w}) \frac{f_X(\boldsymbol{w})}{g_W(\boldsymbol{w})} g_W(\boldsymbol{w}) d\boldsymbol{w} = \mathsf{E}_{\boldsymbol{W}}\left[X(\boldsymbol{W}) \frac{f_X(\boldsymbol{W})}{g_W(\boldsymbol{W})}\right] \end{aligned} \tag{4.59}$$

gdzie $\chi(\cdot)$ jest dowolną, całkowalną funkcją w przestrzeni R^n, $f_x(\cdot)$ i $g_W(\cdot)$ są funkcjami gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, odpowiednio wektora losowego $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{W}$, a przez $\mathsf{E}_X[\cdot]$ i $\mathsf{E}_W[\cdot]$ oznaczono operację wartości średniej, odpowiednio względem rozkładu $f_x(\cdot)$ i $g_W(\cdot)$.

Powyższe zależności pozwalają obliczyć wartość średnią, a co za tym idzie – prawdopodobieństwo awarii w innej niż oryginalna przestrzeni i stosując w niej inną funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Wzór na prawdopodobieństwo awarii można więc wyrazić w postaci:

$$P_f = \mathsf{E}_{\boldsymbol{X}}\left[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X})\right] = \mathsf{E}_{\boldsymbol{W}}\left[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{W})\frac{f_x(\boldsymbol{W})}{g_W(\boldsymbol{W})}\right] \tag{4.60}$$

lub po transformacji zmiennych $\boldsymbol{X}$ do gaussowskiej przestrzeni standardowej:

$$P_f = \mathsf{E}_{\boldsymbol{Z}}\left[\chi_{\Delta_f}(\boldsymbol{Z})\right] = \mathsf{E}_{\boldsymbol{W}}\left[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{W})\frac{f_x(\boldsymbol{W})}{g_W(\boldsymbol{W})}\right] \tag{4.61}$$

gdzie przez χ_{Δ_f} oznaczono funkcję charakterystyczną obszaru awarii Δ_f.

Na podstawie powyższego wzoru, estymator prawdopodobieństwa awarii, $\widetilde{P}_f$, przyjmuje postać:

$$\widetilde{P}_f = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\chi_{\Delta_f}(\boldsymbol{W}_k)\frac{\varphi_n(\boldsymbol{W}_k,\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})}{g_W(\boldsymbol{W}_k)} \tag{4.62}$$

przy czym do obliczeń realizacji estymatora wykorzystuje się realizacje $\boldsymbol{w}_k$ wektora $\boldsymbol{W}_k$ generowane zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa danym przez $g_w(\boldsymbol{w})$. Najważniejszym zadaniem jest teraz wybranie takiej funkcji $g_W(\cdot)$, która maksymalizowałaby efektywność estymatora (4.62). Powinna ona spełniać następujące warunki:

$$\int_{\Delta_f} g_W(\boldsymbol{w})d\boldsymbol{w} = 1 \tag{4.63}$$

$$g_W(\boldsymbol{w}) = \varsigma\varphi_n(\boldsymbol{w},\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})\chi_{\Delta_f}(\boldsymbol{w}) \qquad \text{prawie w całym obszarze } \Delta_f$$

gdzie ς jest liczbą rzeczywistą.

Wynika stąd, iż gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wektora $\boldsymbol{W}$ powinna koncentrować się w otoczeniu punktu, wokół którego skupia się przeważająca część masy prawdopodobieństwa decydująca o wartości P_f. Często jako funkcję $g_W(\cdot)$ przyjmuje się n-wymiarową gaussowską funkcję gęstości prawdopodobieństwa, „rozpiętą” nad punktem projektowym $\boldsymbol{z}^*$, postaci:

$$g_W(\boldsymbol{w}) = \varphi_n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{I}) = \prod_{i=1}^{n} \varphi\left(w_i - z_i^*\right) \tag{4.64}$$

Estymator prawdopodobieństwa awarii zapisać można wtedy jako:

$$\widetilde{P}_f = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \chi_{\Delta_f}(\boldsymbol{W}_k)\frac{\varphi_n(\boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})}{\varphi_n(\boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{I})} \tag{4.65}$$

Takie rozwiązanie zwiększa znacznie efektywność estymacji, ciągle jednak konieczne jest przeprowadzenie kilku tysięcy symulacji. Dalszą poprawę efektywności można uzyskać uwzględniając własności funkcji granicznej przy określaniu funkcji gęstości $g_W(\cdot)$. Wprowadzając, tak jak to było zrobione przy wyprowadzaniu wzorów metody drugiego rzędu, układ współrzędnych [v], prawdopodobieństwo awarii można wyrazić w postaci:

$$\begin{aligned} P_f &= \mathsf{P}\left[G_v(\boldsymbol{V}) \le 0\right] = \mathsf{P}\left[V_n \ge f_v(\widetilde{\boldsymbol{V}})\right] = \int\limits_{v_n \ge f_v(\widetilde{v})} \varphi(v_n)\varphi_{n-1}(\widetilde{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})d\boldsymbol{v} = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} \Phi\left(-f_v(\widetilde{\boldsymbol{v}})\right)\varphi_{n-1}(\widetilde{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})d\widetilde{\boldsymbol{v}} = \mathsf{E}_{\widetilde{v}}\left[\Phi\left(-f_v(\widetilde{\boldsymbol{V}})\right)\right] \end{aligned} \tag{4.66}$$

Z porównania wzorów (4.66) i (4.59) widać, że do oszacowania prawdopodobieństwa awarii P_f wykorzystać można estymator wartości średniej, postaci:

$$\widetilde{P}_f = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \Phi\left(-f_v(\widetilde{\boldsymbol{V}}_k)\right)\frac{\varphi_{n-1}\left(\widetilde{\boldsymbol{V}}_k, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}\right)}{g_w(\widetilde{\boldsymbol{V}}_k)} \tag{4.67}$$

gdzie $g_w(\cdot)$ jest (n – 1)-wymiarową funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, której postać i parametry należy tak dobrać, aby efektywność estymacji była jak największa.

Przyjęcie gaussowskiego rozkładu prawdopodobieństwa:

$$g_w(\boldsymbol{w}) = \varphi_{n-1}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma_i^2}\varphi\left(\frac{w_i}{\sigma_i}\right) \tag{4.68}$$

w którym $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_i]$ jest macierzą diagonalną, pozwala na zmianę skupienia realizacji $\boldsymbol{w}_k$ wokół punktu $\widetilde{\boldsymbol{v}}^* = 0$ poprzez sterowanie wartościami wariancji σ_i^2. Przyjmując następnie paraboliczną aproksymację funkcji granicznej oraz funkcję $g_w(\cdot)$ daną wzorem, estymator prawdopodobieństwa awarii przyjmuje postać:

$$\widetilde{P}_f \approx \widetilde{P}_{fs} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\Phi\left(-s_v(\widetilde{\boldsymbol{V}}_k)\right)\frac{\varphi_{n-1}\left(\widetilde{\boldsymbol{V}}_k, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}\right)}{\varphi_{n-1}(\widetilde{\boldsymbol{V}}_k, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})} \tag{4.69}$$

Minimalizując wariancję powyższego estymatora względem odchyleń standardowych, σ_i w rozkładzie (4.68) otrzymuje się:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{1 + \dfrac{k_i \psi(-\beta)}{1 + k_i \eta}} \tag{4.70}$$

gdzie przez k_i, $i = 1, \ldots n - 1$, oznaczono krzywizny główne powierzchni $v_n = f_v(\widetilde{\boldsymbol{v}})$ w punkcie $\boldsymbol{v}^*$, $\psi(-\beta) = \varphi(-\beta)/\Phi(-\beta)$, a parametr η dany jest następująco:

$$\eta = \begin{cases} \beta - \dfrac{\psi(-\beta)}{\beta}(1+\beta) & \text{dla} \quad -\dfrac{1}{\beta} \le k_i < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad k_i \ge 0 \end{cases} \tag{4.71}$$

Przyjmując wariancje wyznaczone dla parabolicznej aproksymacji funkcji granicznej w definicji funkcji gęstości $g_w(\cdot) = \varphi(\cdot, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, estymator prawdopodobieństwa awarii przyjmuje ostatecznie postać:

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_f &= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\Phi\left(-f_v(\widetilde{\boldsymbol{V}}_k)\right)\frac{\varphi_{n-1}\left(\widetilde{\boldsymbol{V}}_k, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}\right)}{\varphi_{n-1}(\widetilde{\boldsymbol{V}}_k, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})} = \\ &= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\Phi\left(-f_v(\widetilde{\boldsymbol{V}}_k)\right)\prod_{i=1}^{n-1}\sigma_i \exp\left[-\frac{\boldsymbol{V}_{i,k}^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\sigma_i^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.72}$$

Otrzymany estymator charakteryzuje się bardzo dużą efektywnością. W większości przypadków w celu uzyskania współczynnika zmienności estymatora mniejszego niż 10% wystarcza K = 20-100 symulacji niezależnie od wielkości szacowanego prawdopodobieństwa awarii. Pomimo tak znacznej (w porównaniu do klasycznej metody Monte Carlo) poprawy efektywności, należy stwierdzić, iż metody Importance Sampling nie nadają się do zastosowania na przykład w zadaniach optymalizacji niezawodności. Spowodowane jest to ciągle znacznym (w porównaniu z FORM) czasem obliczeń oraz niemożnością szybkiego uzyskania wrażliwości otrzymywanego prawdopodobieństwa zniszczenia na parametry projektowe. Ze względu na dużą dokładność, metoda ta bardzo dobrze nadaje się do określania błędu popełnianego przez metody pierwszego i drugiego rzędu.

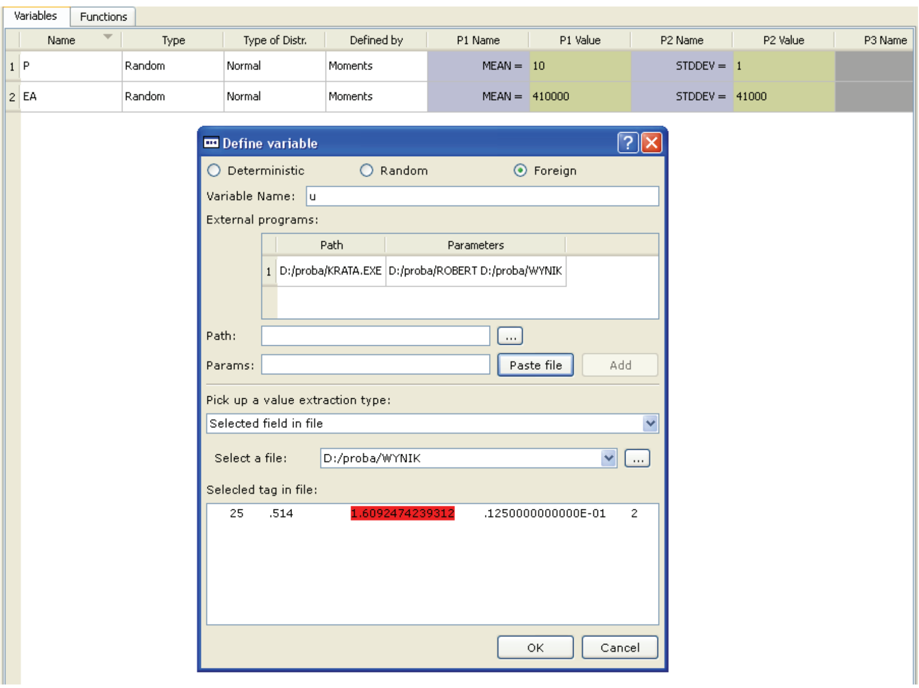
5

Metoda FORM w analizie stateczności konstrukcji kratowych (przykłady)

We wczesnych zastosowaniach metod analizy niezawodności przyjmowano, że funkcja graniczna jest jawną funkcją zmiennych losowych. Taka zależność funkcyjna może być zrealizowana tylko dla bardzo prostych przykładów. W praktycznych realizacjach zależność ta jest niejawna i określa się ją za pośrednictwem procedury numerycznej, na przykład metody elementów skończonych. Rozwój metod numerycznych spowodował, że metody dla niejawnych zależności funkcji stanu granicznego od bazowych zmiennych losowych stały się bardzo pożądanym narzędziem w teorii niezawodności konstrukcji. Przykładem jest metoda perturbacyjna zaproponowana w pracach Hisady i Nakagiriego [55, 56], Liu, Belytschko, Mani [89, 90], Shinozuki [137], do zadań liniowej teorii sprężystości. Metoda ta polega na rozwinięciu macierzy sztywności w szereg potęgowy względem fluktuacji losowych zadanego jej parametru. Metoda perturbacyjna nie jest jednak przeznaczona do obliczania prawdopodobieństwa awarii, a jedynie do uzyskania momentów statystycznych odpowiedzi. Obliczenie prawdopodobieństw wymagałoby wprowadzenia do obliczeń rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych oraz oszacowania wyższych momentów statystycznych odpowiedzi. Zastosowania metody perturbacyjnej do obliczeń metodą elementów skończonych przedstawili w monografii [69] Kleiber i Hien. Śniady w pracy [154] pokazał aplikacje metody w dynamice stochastycznej. Podobnie do metody perturbacyjnej, również stosując rozwinięcie Neumanna (rozwinięciu w szereg podlega macierz odwrotna do macierzy sztywności), uzyskuje się jedynie informacje dotyczące momentów statystycznych zmiennej losowej, będącej odpowiedzią układu. Der Kiureghian i współautorzy [86, 87] zaproponowali metodę, która pozwala na oszacowanie prawdopodobieństwa awarii w sytuacji, gdy obliczenia konstrukcji wykonywane są z użyciem metody elementów skończonych.

Przy tworzeniu programu umożliwiającego analizę niezawodności z wykorzystaniem metody elementów skończonych najkorzystniejszą sytuacją jest posiadanie dostępu do kodu źródłowego MES i programu niezawodnościowego. Na ogół jednak nie jest to możliwe. Dlatego kosztem spadku efektywności łączy się istniejące pakiety MES z programem niezawodnościowym, stosując różnego rodzaju interfejsy. W pracy zaprezentowano połączenie programu niezawodnościowego STAND z modułem autorskim MES KRATA.

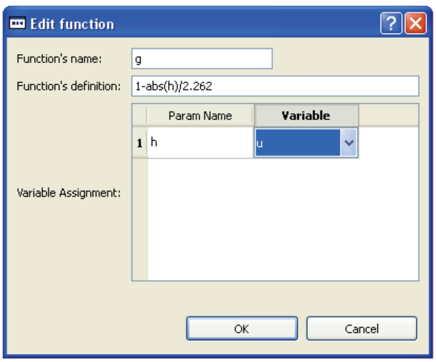
Program STAND powstał w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie. Autorami programu są: Knabel, Kolanek, Nguyen Hoang, Stocki, Tauzowski [147, 76]. Realizacja zadania niezawodności konstrukcji przy użyciu programu STAND rozpoczyna się od stworzenia modelu obliczeniowego. Użytkownik programu podaje parametry brzegowych rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych, a w przypadku zmiennych skorelowanych także współczynniki korelacji wzajemnej (rys. 5.1). W programie STAND funkcja łącznej gęstości prawdopodobieństwa wektora zmiennych losowych aproksymowana jest za pomocą tzw. modelu Natafa. Model Natafa [103] pozwala na efektywną transformację oryginalnych zmiennych losowych do gaussowskiej przestrzeni standardowej. W obecnej wersji programu do opisu zmiennych losowych przyjmowane mogą być następujące rozkłady prawdopodobieństwa: jednostajny, normalny, lognormalny, wykładniczy, Rayleigha, Gumbela, Frecheta i Weibulla.



Rys. 5.1. Definicja podstawowych zmiennych losowych

W definicji modelu uwzględnia się dwa rodzaje zmiennych losowych: podstawowe i zewnętrzne. Zmienne zewnętrzne to niejawne funkcje zmiennych losowych, których wartości otrzymuje się jako wynik realizacji programu KRATA. W przykładach realizowanych w niniejszej pracy zmienne podstawowe to sztywność osiowa prętów, obciążenie, współrzędne węzłów. Zmienne zewnętrzne opisują wskazane przemieszczenie lub mnożnik obciążenia. Wartości zmiennych zewnętrznych odczytywane są ze zbiorów tekstowych zawierających wyniki działania programu KRATA.

Po zdefiniowaniu modelu obliczeniowego użytkownik wprowadza wzór funkcji granicznej (rys. 5.2). W programie STAND wzór funkcji granicznej wprowadzany jest w standardowym zapisie matematycznym jako zależność od zmiennych losowych podstawowych i zewnętrznych. W pracy rozpatrywane są dwa typy warunków granicznych: warunek nieprzekroczenia dopuszczalnych przemieszczeń węzłów konstrukcji, warunek nieprzekroczenia dopuszczalnego mnożnika obciążenia. Program STAND odwołuje się do programu KRATA, w którym obliczane są wartości niezbędne do zdefiniowania funkcji granicznej dla kolejnych zestawów zmiennych losowych.

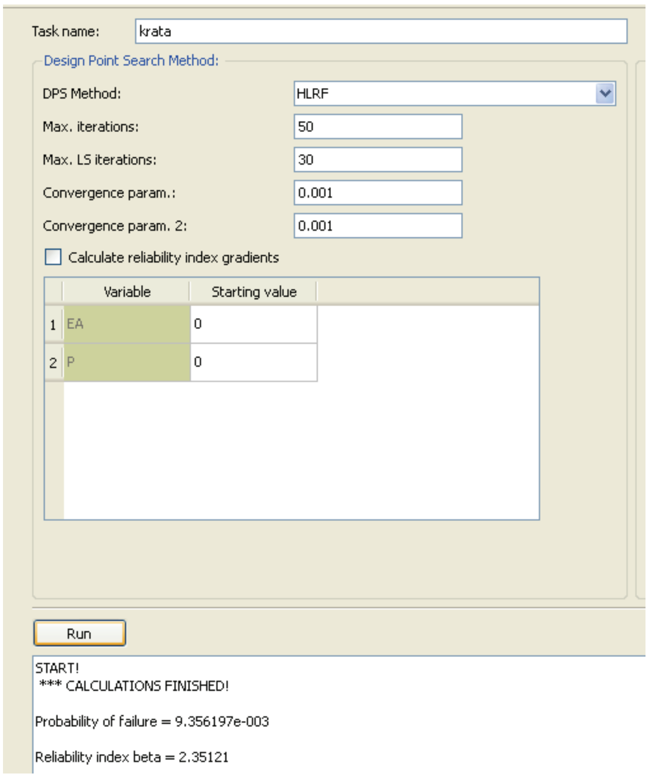


Rys. 5.2. *Definicja funkcji granicznej*

Następny etap to wybór metody analizy niezawodności oraz uruchomienie obliczeń. Zadanie kończy się wygenerowaniem informacji zawierającej wartości prawdopodobieństwa awarii oraz jego wrażliwości na parametry rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych (rys. 5.3).

Niezależnie od metody, oszacowanie wartości prawdopodobieństwa awarii wymaga wielokrotnego obliczania wartości funkcji granicznej dla różnych realizacji wektora zmiennych losowych. W większości istotnych z punktu widzenia praktyki projektowej przypadków wiąże się to z koniecznością wielokrotnego uruchamiania zewnętrznych programów Metody Elementów Skończonych.

W przykładach przedstawionych poniżej wykorzystano geometrycznie nieliniowy element kratowy. Do wyznaczenia ścieżki równowagi konstrukcji kratowych słabo wyniosłych podatnych na utratę stateczności poprzez przeskok węzła wykorzystano program KRATA. Mocne założenie, że moment przeskoku nigdy nie będzie poprzedzony wyboczeniem poszczególnych prętów struktury jest znacznym zawężeniem obszaru aplikacyjnego. Jednakże należy w tym miejscu wyraźnie podkreślić, że celem pracy nie jest badanie form utraty stateczności konstrukcji i jej poszczególnych elementów, ale sprawdzenie, czy proste narzędzie, jakim jest metoda FORM, jest wystarczające do przeprowadzenia analizy niezawodności konstrukcji. Dla porównania, w pracy przedstawione zostały inne stosowane metody niezawodności, tj. SORM, Monte Carlo, Importance Sampling i udowodniono, że metoda FORM jest dostatecznie dobra, a o wiele prostsza w zastosowaniu, co ilustruje przykład czwarty i piąty. Metoda FORM daje szybką odpowiedź, co umożliwia jej zastosowanie w praktyce inżynierskiej, jako jeden z modułów obliczeniowych programów wspomagających projektowanie konstrukcji.



Rys. 5.3. *Wybór metody poszukiwania punktu projektowego*

Rozważania skupiono na jednej z możliwych form utraty stateczności, jakim jest przeskok węzła. Korzystając z metody FORM możemy, poruszając się po ścieżce równowagi konstrukcji, określić, z jakim poziomem prawdopodobieństwa awarii zbliżamy się do punktu granicznego. Metodę można wykorzystać przy badaniu stateczności dowolnej konstrukcji, wykorzystując inne modele elementów. Zagadnienie to będzie tematyką dalszych badań Autorki pracy.

Niezależnym, ale bardzo istotnym elementem pracy jest badanie wrażliwości wskaźnika niezawodności na zmiany charakterystyk probabilistycznych rozważanych zmiennych losowych. Znajomość tej wrażliwości ma duże znaczenie w lepszym zrozumieniu pracy konstrukcji. Jeżeli wrażliwość wskaźnika niezawodności ze względu na zmienną losową X jest mała w porównaniu do innych zmiennych, to możemy uznać, iż wpływ tej zmiennej na wartość prawdopodobieństwa awarii jest niewielki i w kolejnych obliczeniach traktować ją jako parametr deterministyczny. Wiele parametrów opisujących problem stateczności konstrukcji ma charakter losowy. Losowe są obciążenia, sztywności osiowe prętów, losowa jest wreszcie geometria. Ocena niezawodności konstrukcji przy znanych charakterystykach probabilistycznych wybranych parametrów losowych jest bardzo istotna z praktycznego punktu widzenia. Projektant czy użytkownik obiektu chciałby wiedzieć, jakie jest prawdopodobieństwo awarii w planowanym okresie użytkowania.

Prezentowana praca ma charakter teoretyczny, stąd też analizowane konstrukcje nie są osadzone w danej strefie klimatycznej, parametry zmiennych losowych nie są określane na podstawie konkretnych badań statystycznych. Autorka, niestety, nie miała dostępu do badań stacji meteorologicznych, które między innymi zbierają dane o maksymalnych wartościach opadów śniegu w ciągu minimum pięciu lat dla danego obszaru. Na podstawie tychże badań można w sposób ścisły określić parametry rozkładu funkcji prawdopodobieństwa zmiennej losowej. W trzech pierwszych przykładach zwrócono uwagę na prawidłowe kształtowanie modelu obliczeniowego zadania zarówno w sferze typu rozkładów prawdopodobieństwa, jak i parametrów każdego z nich. W przykładzie czwartym i piątym zwrócono uwagę na sprawdzenie numerycznej efektywności metody FORM w porównaniu do metody Monte Carlo, Importance Sampling, SORM. Fragmenty przedstawionych przykładów Autorka opublikowała w pracach [114-121].

PRZYKŁAD 1

W przykładzie tym zaprezentowano zastosowanie metody FORM w analizie przeskoku węzła kratownicy Missesa (rys. 5.4).

Na podstawie otrzymanych współrzędnych punktu granicznego (rys. 5.5) sformułowano postać funkcji granicznej jako warunek nieprzekraczania dopuszczalnego obciążenia pionowego węzła 1: $g(\boldsymbol{x}) = 1 - \mu(\boldsymbol{x})/2{,}262$.

Przeprowadzając analizę niezawodności kratownicy Missesa, brane są pod uwagę następujące zmienne: obciążenie „**P**”, sztywność osiowa „**EA**”, oraz współrzędna „**Z**” węzła 1. Zmienne losowe nie są skorelowane. W przykładach 1, 2, 3 skupiono się na przeanalizowaniu, jak wprowadzanie kolejnych zmiennych losowych wpływa na wartość wskaźnika niezawodności. Uwzględnienie wzajemnej korelacji, na przykład zmiennych losowych opisujących sztywność osiową „**EA**" oraz współrzędną „**Z**" węzła 1 (jest możliwa), zmieniłoby przyjęty kierunek badań. Niezależnym, ale bardzo istotnym elementem realizowanym w przykładach 1, 2, 3, jest badanie wrażliwości wskaźnika niezawodności na zmiany charakterystyk probabilistycznych rozważanych zmiennych losowych. W analizie niezawodności kratownicy Missesa (rys. 5.5) rozpatrzono trzy przypadki.

$P = 10\ \text{kN}$

$l = 1{,}29\ \text{m}$

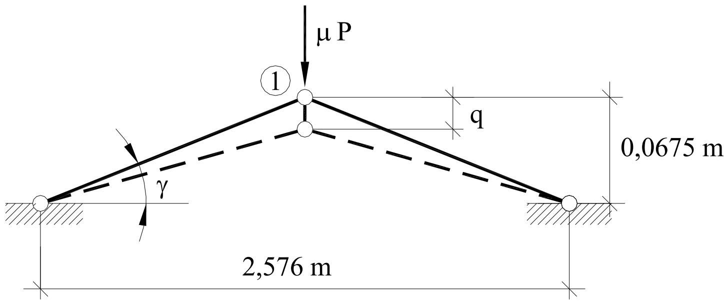
$\gamma = 3^{\text{o}}$

$E = 205\ \text{GN/m}^2$

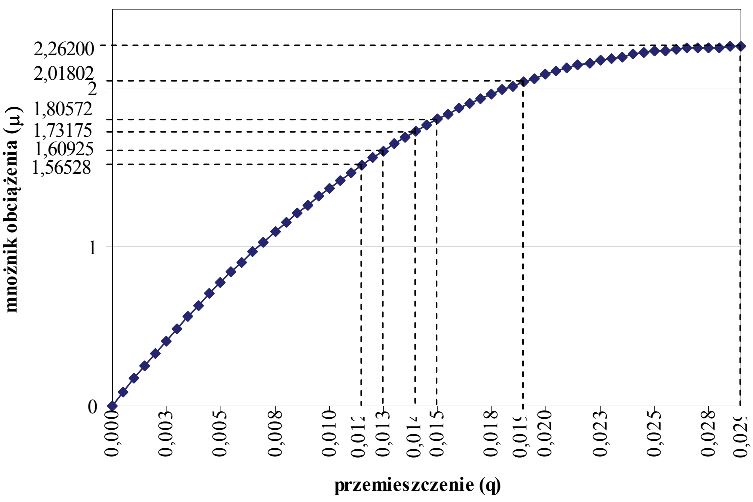
$A = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$

$\lambda = 223{,}4$

$EA = 410000\ \text{kN}$



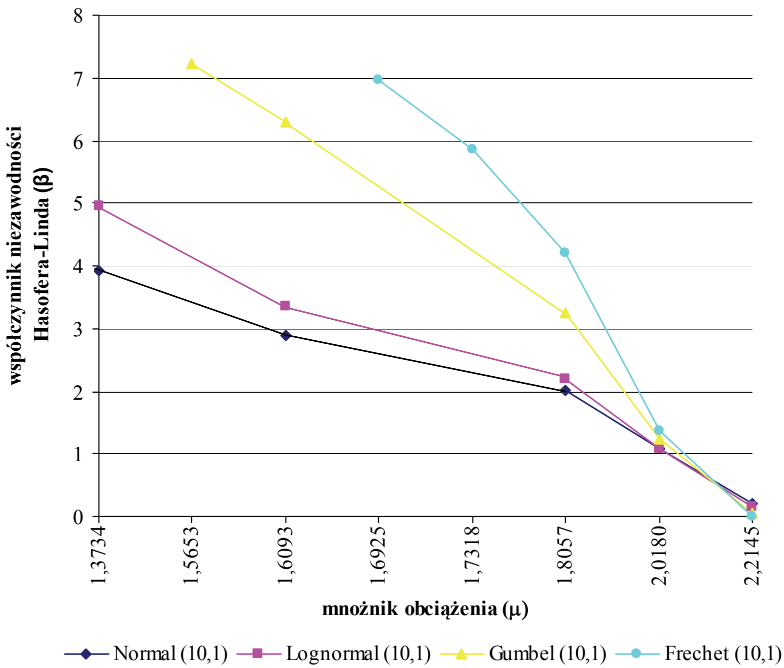
Rys. 5.4. *Kratownica Missesa*



Rys. 5.5. *Ścieżka równowagi kratownicy Missesa*

Przypadek 1

- obciążenie „**P**" – zmienna losowa (opis zmian typu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej przedstawiono na rysunku 5.6),
- sztywność osiowa „**EA**" – zmienna deterministyczna (**EA** = 410000 kN),
- współrzędna „**Z**" węzła 1 – zmienna deterministyczna (**Z** = 0,0675 m).



Rys. 5.6. *Wpływ przyjętego typu rozkładu prawdopodobieństwa obciążenia na wartość wskaźnika niezawodności. Oznaczenia na rysunku: Normal (10,1) – rozkład normalny, wartość oczekiwana = 10, odchylenie standardowe = 1; Lognormal (10,1) – rozkład log-normalny, wartość oczekiwana = 10, odchylenie standardowe = 1; Gumbel (10,1) – rozkład Gumbela, wartość oczekiwana = 10, odchylenie standardowe = 1; Frechet (10,1) – rozkład Frecheta, wartość oczekiwana = 10, odchylenie standardowe = 1*

Na rysunku 5.6 przedstawiono wpływ przyjętego typu rozkładu prawdopodobieństwa, opisującego obciążenie, na wartość wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda podczas poruszania się po ścieżce rozwiązania geometrycznie nieliniowego. W miarę oddalania się od wartości granicznej mnożnika obciążenia, różnice w ocenie bezpieczeństwa konstrukcji wyraźnie rosną. Przykładowo, wartości wskaźnika niezawodności dla poszczególnych rozkładów są następujące:

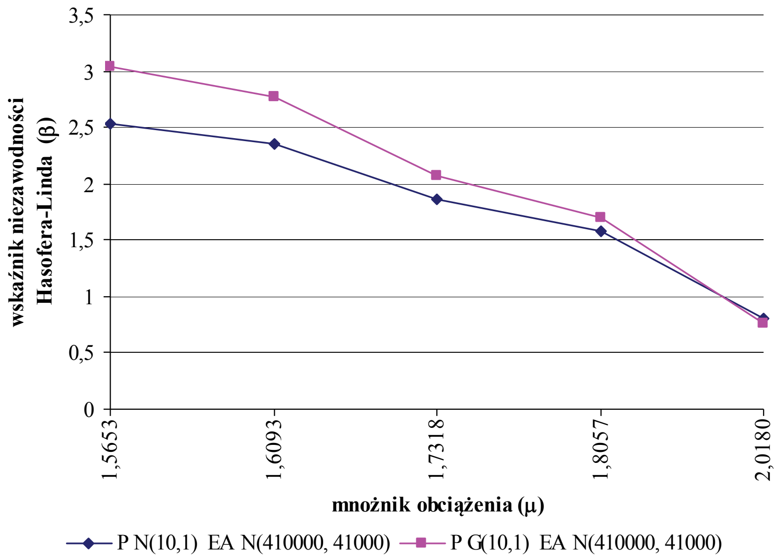
a) dla mnożnika obciążenia równego 1,8057:
   Normal (10,1) – 2,01378
   Lognormal (10,1) – 2,20419
   Gumbel (10,1) – 3,24112
   Frechet (10,1) – 4,20626

b) dla mnożnika obciążenia równego 1,6093:
   Normal (10,1) – 2,88367
   Lognormal (10,1) – 3,3591
   Gumbel (10,1) – 6,30112

dla rozkładu Frecheta nie otrzymano rozwiązań, gdyż podczas analizy pojawiły się problemy z obliczeniem gradientów funkcji granicznej, niezbędnych do określenia położenia punktu projektowego.

Przypadek 2

- obciążenie „**P**" – zmienna losowa (opis zmian typu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej przedstawiono na rysunku 5.7),
- sztywność osiowa „**EA**" – zmienna losowa (opis typu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej przedstawiono na rysunku 5.7),
- współrzędna „**Z**" węzła 1 – zmienna deterministyczna (**Z** = 0,0675 m).



Rys. 5.7. *Wpływ zmiennej losowej opisującej sztywność osiową prętów na wartość wskaźnika niezawodności (rozwiązanie geometrycznie nieliniowe), gdzie: N – rozkład normalny, G – rozkład Gumbela*

Poruszając się nadal po ścieżce równowagi dla rozwiązania geometrycznie nieliniowego, po wprowadzeniu dodatkowej zmiennej losowej „**EA**" o rozkładzie normalnym N(410000 kN, 41000 kN), opisującej sztywność osiową prętów, możemy zaobserwować zmniejszenie różnic w wartościach wskaźnika niezawodności (rys. 5.7). Przykładowo, wartości wskaźnika niezawodności dla mnożnika obciążenia równego 1,8057 są następujące:

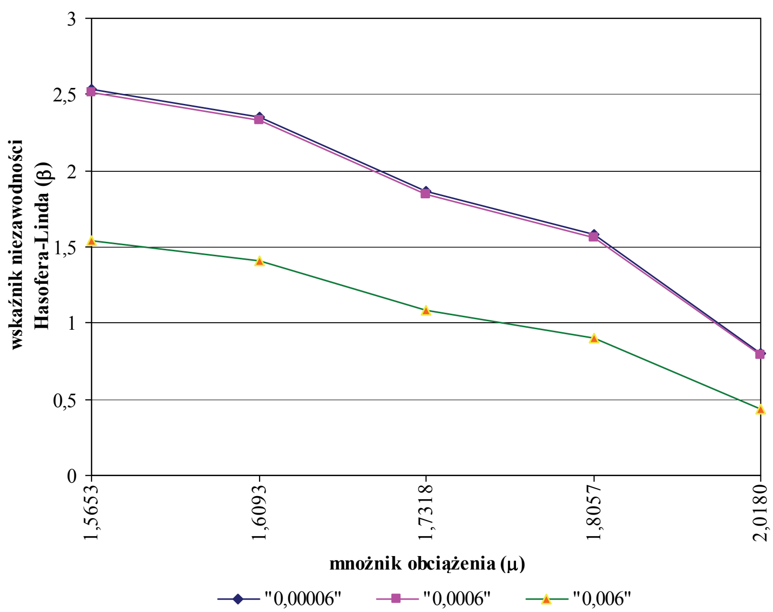
- obciążenie (normal), sztywność osiowa (normal) – 1,5763,
- obciążenie (Gumbel), sztywność osiowa (normal) – 1,6917.

Przypadek 3

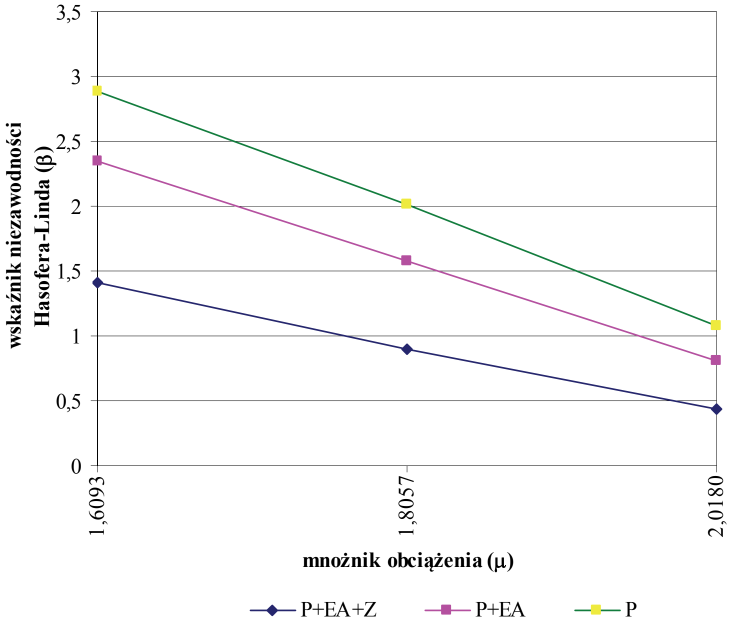
- obciążenie „**P**” – zmienna losowa,
- sztywność osiowa „**EA**” – zmienna losowa,
- współrzędna „**Z**” węzła 1 – zmienna losowa.

Opis zmian typu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych przedstawiono w tabelach 5.1, 5.5, 5.9.

Kolejnym etapem analizy było wprowadzenie, jako trzeciej zmiennej losowej współrzędnej „**Z**”, węzła „1”. Każda zmienna losowa została opisana rozkładem normalnym. Zbadano wpływ odchylenia standardowego trzeciej zmiennej losowej na wartość wskaźnika niezawodności. Testy przeprowadzono dla trzech wartości odchylenia standardowego, tj. 0,00006 m, 0,0006 m, 0,006 m, poruszając się po ścieżce dla rozwiązania geometrycznie nieliniowego. W tabelach 5.2-5.4, 5.6-5.8, 5.10-5.12 przedstawiono zmianę wartości wskaźnika niezawodności, jak również wrażliwość wskaźnika na zmienne losowe oraz parametry rozkładu każdej z nich. Wrażliwość wskaźnika niezawodności jest największa dla zmiennej losowej opisującej współrzędną „**Z**” węzła 1, natomiast najmniejsza dla zmiennej losowej obrazującej sztywność osiową prętów. Wniosek ten dotyczy również parametrów rozkładów zmiennych losowych. Przykład pierwszy zakończony jest wykresami opisującymi rozważane zależności (rys. 5.8 i 5.9).



Rys. 5.8. *Zależność wskaźnika niezawodności od wartości odchylenia standardowego zmiennej losowej opisującej współrzędną „**Z**” węzła „1”*



Rys. 5.9. *Wpływ opisu modelu obliczeniowego na wartość wskaźnika niezawodności*

Możemy zauważyć, że dla bardzo małych wartości odchylenia standardowego trzeciej zmiennej losowej (σ = 0,00006 m, σ = 0,0006 m) rozwiązanie przedstawione na rysunku 5.8 dąży do rezultatu otrzymanego na rysunku 5.7. Dla tych wartości odchylenia standardowego zmienną losową opisującą współrzędną „**Z**" węzła 1 możemy w dalszych obliczeniach traktować jako zmienną deterministyczną. Na rysunku 5.9 pokazano jak zmienia się wartość wskaźnika niezawodności dla różnych opisów modelu obliczeniowego zadania. Największe wartości wskaźnika niezawodności obserwujemy, gdy zmienną losową jest tylko obciążenie. Wprowadzenie dodatkowo dwóch kolejnych zmiennych losowych (**EA** i **Z**) zdecydowanie obniża wartości wskaźnika niezawodności. Przeprowadzone testy wyraźnie uświadamiają nam, jak ważny jest prawidłowy opis modelu konstrukcji oraz obciążenia i to nie tylko w sferze przyjętych typów rozkładów prawdopodobieństwa, ale również parametrów rozkładu.

Tabela 5.1. *Opis zmiennych losowych*

Zmienna losowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności
obciążenie „**P**"	normalny	10 kN	1 kN	10%
sztywność osiowa „**EA**"	normalny	410000 kN	41000 kN	10%
współrzędna „**Z**" węzła nr 1	normalny	0,0675 m	0,006 m	8,9%

Tabela 5.2. *Wyniki obliczeń wskaźnika niezawodności β oraz wrażliwości wskaźnika na zmienne losowe*

Mnożnik obciążeń μ	Wskaźnik niezawodności β	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na zmienne losowe		
		EA	P	Z
2,01802	0,43624	9,32E-06	-3,95E-01	-1,39E+02
1,80572	0,90351	9,71E-06	-4,30E-01	-1,35E+02
1,73175	1,08639	9,82E-06	-4,43E-01	-1,34E+02
1,60925	1,41217	9,91E-06	-4,59E-01	-1,32E+02
1,56528	1,53751	9,94E-06	-4,66E-01	-1,31E+02

Tabela 5.3. *Wyniki obliczeń wrażliwości wskaźnika niezawodności β na wartość średnią zmiennej losowej*

Mnożnik obciążeń μ	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na wartość średnią zmiennej losowej		
	EA	P	Z
2,01802	-9,32E-06	3,95E-01	1,39E+02
1,80572	-9,71E-06	4,30E-01	1,35E+02
1,73175	-9,82E-06	4,43E-01	1,34E+02
1,60925	-9,91E-06	4,59E-01	1,32E+02
1,56528	-9,94E-06	4,66E-01	1,31E+02

Tabela 5.4. *Wyniki obliczeń wrażliwości wskaźnika niezawodności β na wartość odchylenia standardowego zmiennej losowej*

Mnożnik obciążeń μ	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na wartość odchylenia standardowego zmiennej losowej		
	EA	P	Z
2,01802	-1,55E-06	-6,82E-02	-5,07E+01
1,80572	-3,49E-06	-1,67E-01	-9,88E+01
1,73175	-4,29E-06	-2,13E-01	-1,16E+02
1,60925	-5,69E-06	-2,97E-01	-1,47E+02
1,56528	-6,23E-06	-3,34E-01	-1,58E+02

Tabela 5.5. *Opis zmiennych losowych*

Zmienna losowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności
obciążenie „**P**”	normalny	10 kN	1 kN	10%
sztywność osiowa „**EA**”	normalny	410000 kN	41000 kN	10%
współrzędna „**Z**” węzła nr 1	normalny	0,0675 m	0,00006 m	0,089%

Tabela 5.6. *Wyniki obliczeń wskaźnika niezawodności β oraz wrażliwości wskaźnika na zmienne losowe*

Mnożnik obciążeń μ	Wskaźnik niezawodności β	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na zmienne losowe		
		EA	P	Z
2,01802	0,804773	1,62E-05	-7,48E-01	-2,63E+02
1,80572	1,57616	1,52E-05	-7,83E-01	-2,45E+02
1,73175	1,86099	1,47E-05	-7,96E-01	-2,38E+02
1,60925	2,35099	1,41E-05	-8,17E-01	-2,28E+02
1,56528	2,53237	1,38E-05	-8,25E-01	-2,24E+02

Tabela 5.7. *Wyniki obliczeń wrażliwości wskaźnika niezawodności β na wartość średnią zmiennej losowej*

Mnożnik obciążeń μ	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na wartość średnią zmiennej losowej		
	EA	P	Z
2,01802	-1,62E-05	7,48E-01	2,63E+02
1,80572	-1,52E-05	7,83E-01	2,45E+02
1,73175	-1,47E-05	7,96E-01	2,38E+02
1,60925	-1,41E-05	8,17E-01	2,28E+02
1,56528	-1,38E-05	8,25E-01	2,24E+02

Tabela 5.8. *Wyniki obliczeń wrażliwości wskaźnika niezawodności β na wartość odchylenia standardowego zmiennej losowej*

Mnożnik obciążeń μ	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na wartość odchylenia standardowego zmiennej losowej		
	EA	P	Z
2,01802	-8,63E-06	-4,51E-01	-3,34E+00
1,80572	-1,48E-05	-9,67E-01	-5,66E+00
1,73175	-1,66E-05	-1,18E+00	-6,35E+00
1,60925	-1,91E-05	-1,57E+00	-7,31E+00
1,56528	-1,98E-05	-1,72E+00	-7,59E+00

Tabela 5.9. *Opis zmiennych losowych*

Zmienna losowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności
obciążenie „**P**”	normalny	10 kN	1 kN	10%
sztywność osiowa „**EA**”	normalny	410000 kN	41000 kN	10%
współrzędna „**Z**” węzła nr 1	normalny	0,0675 m	0,0006 m	0,89%

Tabela 5.10. *Wyniki obliczeń wskaźnika niezawodności β oraz wrażliwości wskaźnika na zmienne losowe*

Mnożnik obciążeń μ	Wskaźnik niezawodności β	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na zmienne losowe		
		EA	P	Z
2,01802	0,795081	1,60E-05	-7,38E-01	-2,59E+02
1,80572	1,55976	1,50E-05	-7,74E-01	-2,42E+02
1,73175	1,84261	1,46E-05	-7,87E-01	-2,36E+02
1,60925	2,32984	1,40E-05	-8,08E-01	-2,25E+02
1,56528	2,5104	1,37E-05	-8,15E-01	-2,21E+02

Tabela 5.11. *Wyniki obliczeń wrażliwości wskaźnika niezawodności β na wartość średnią zmiennej losowej*

Mnożnik obciążeń μ	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na wartość średnią zmiennej losowej		
	EA	P	Z
2,01802	-1,60E-05	7,38E-01	2,59E+02
1,80572	-1,50E-05	7,74E-01	2,42E+02
1,73175	-1,46E-05	7,87E-01	2,36E+02
1,60925	-1,40E-05	8,08E-01	2,25E+02
1,56528	-1,37E-05	8,15E-01	2,21E+02

Tabela 5.12. *Wyniki obliczeń wrażliwości wskaźnika niezawodności β na wartość odchylenia standardowego zmiennej losowej*

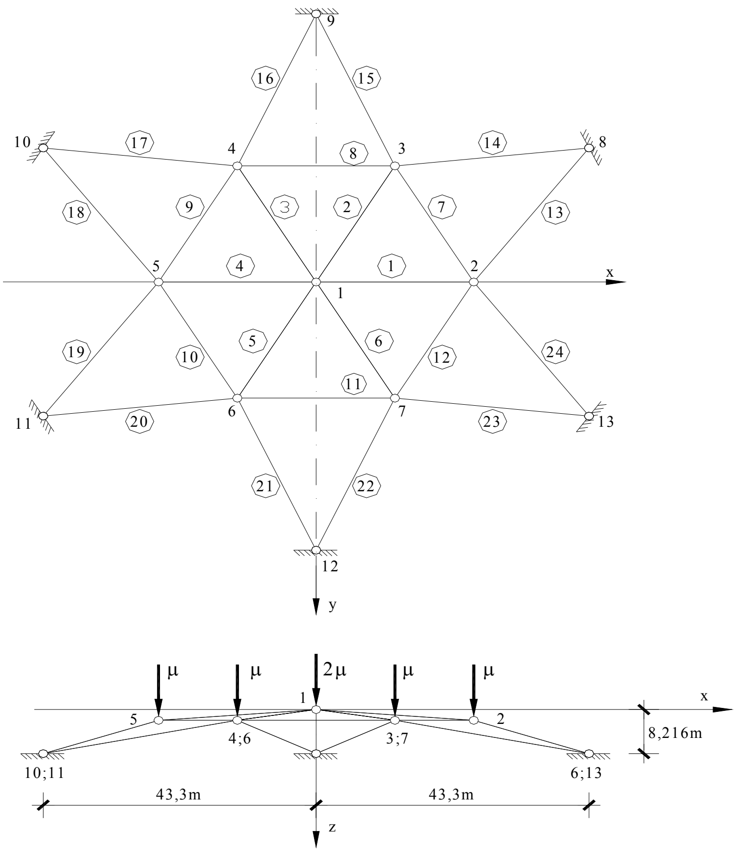
Mnożnik obciążeń μ	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na wartość odchylenia standardowego zmiennej losowej		
	EA	P	Z
2,01802	-8,35E-06	-4,33E-01	-3,21E+01
1,80572	-1,45E-05	-9,33E-01	-5,47E+01
1,73175	-1,62E-05	-1,14E+00	-6,15E+01
1,60925	-1,87E-05	-1,52E+00	-7,09E+01
1,56528	-1,94E-05	-1,67E+00	-7,38E+01

PRZYKŁAD 2

W przykładzie tym zaprezentowano analizę niezawodności metodą FORM stalowej konstrukcji kratowej (rys. 5.10) podatnej na utratę stateczności poprzez przeskok węzła.

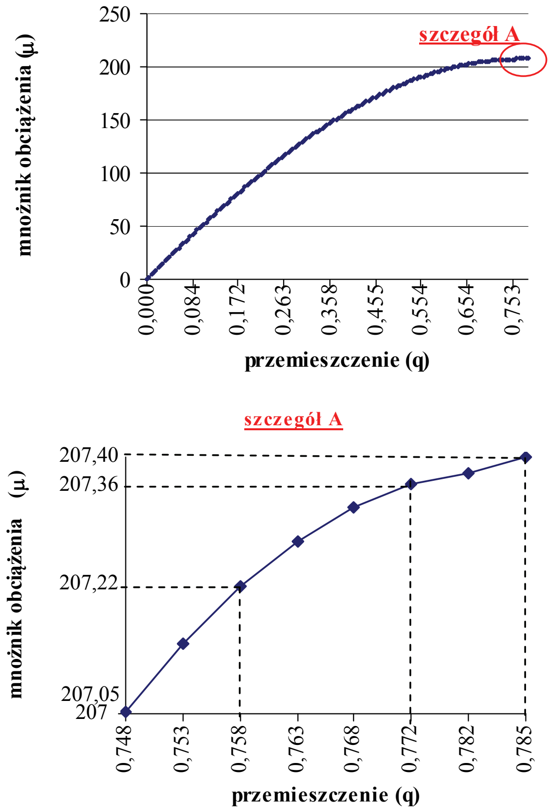
Rozwiązanie kratownicy przy założeniach, że: pręty są idealnie proste (perfekcyjne), materiał jest idealnie sprężysty w całym zakresie obciążeń, sztywności osiowe prętów są równe $EA = 10^6$ kN zostało umieszczone w pracy [122]. Ścieżkę równowagi dla przemieszczenia pionowego q węzła 1 przedstawiono na rysunku 5.11. Współrzędne punktu granicznego: $q = 0{,}785$, $\mu = 207{,}4$ dla rozwiązania geometrycznie nieliniowego otrzymano, takie jak w cytowanej pracy [122]. Zbliżanie się do punktu granicznego poprzez zmianę wartości SPS zilustrowano na rysunku

5.12. Na podstawie współrzędnych punktu granicznego rozwiązania geometrycznie nieliniowego sformułowano funkcję graniczną jako warunek nieprzekraczalności dopuszczalnego przemieszczenia pionowego q węzła 1: $g(\boldsymbol{x}) = 1 - q_1(\boldsymbol{x})/0{,}785$.

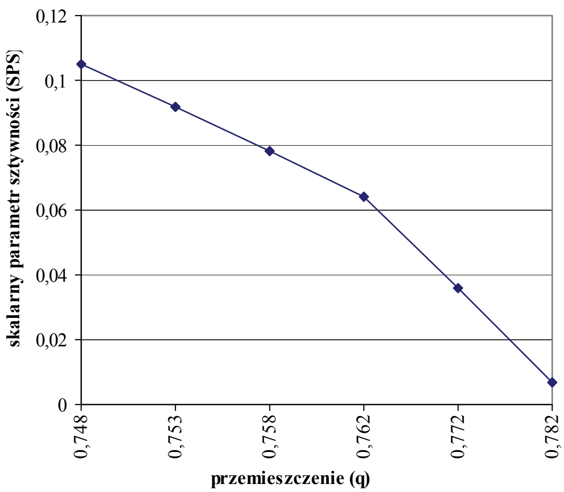


	x [m]	y [m]	z [m]
1	0,000	0,000	0,000
2	25,000	0,000	2,000
3	12,500	-21,650	2,000
4	-12,500	-21,650	2,000
5	-25,000	0,000	2,000
6	-12,500	21,650	2,000
7	12,500	21,650	2,000
8	43,300	-25,000	8,216
9	0,000	50,000	8,216
10	-43,300	-25,000	8,216
11	-43,300	25,000	8,216
12	0,000	50,000	8,216
13	43,300	25,000	8,216

Rys. 5.10. *Siatka elementów i geometria kratownicy przestrzennej*



Rys. 5.11. *Ścieżka równowagi przemieszczenia pionowego q węzła 1 kratownicy przestrzennej*

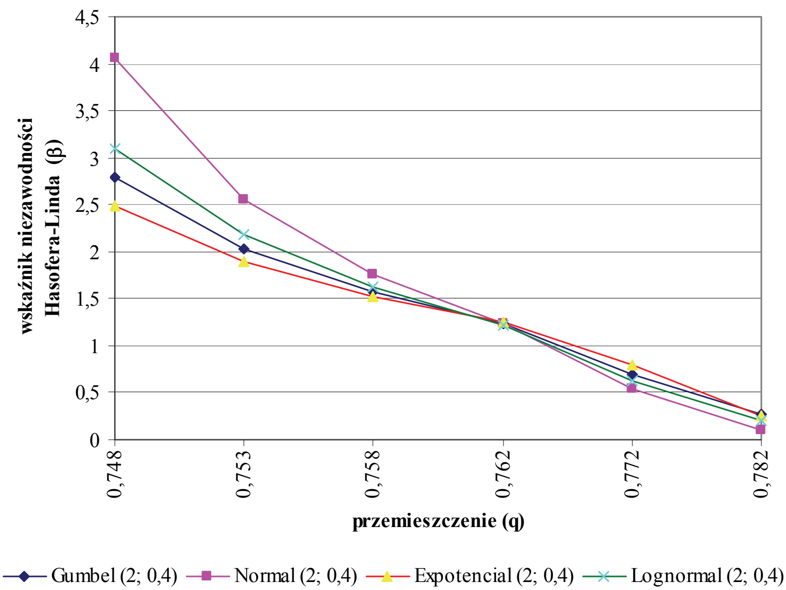


Rys. 5.12. *Zależność skalarnego parametru sztywności od przemieszczenia q dla rozwiązania geometrycznie nieliniowego*

Przeprowadzając analizę niezawodności brane są pod uwagę następujące zmienne: **P1 = 2μ** (obciążenie węzła 1), **P2 = μ** (obciążenie węzła 2), **P3 = μ** (obciążenie węzła 3), **P4 = μ** (obciążenie węzła 4), **P5 = μ** (obciążenie węzła 5), **P6 = μ** (obciążenie węzła 6), **P7 = μ** (obciążenie węzła 7), sztywność osiowa **EA**, współrzędna **Z** węzła 1. Rozpatrzono dwa przypadki.

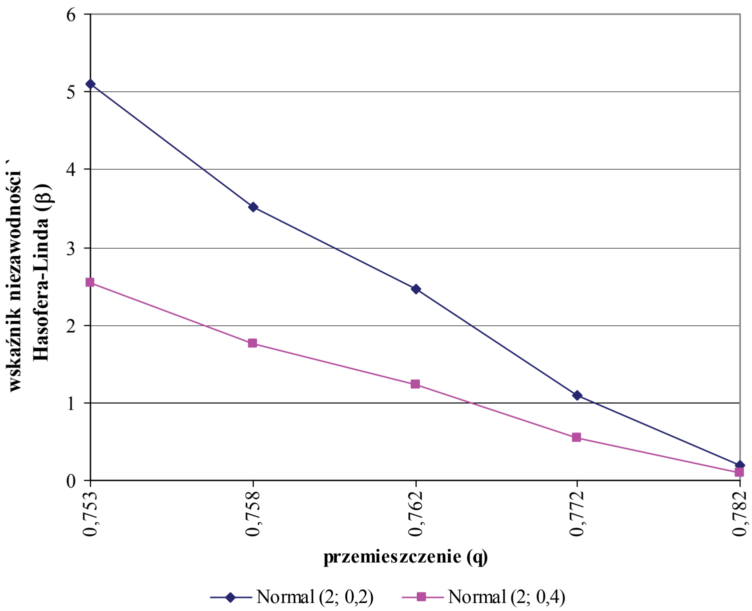
Przypadek 1

- obciążenie **P1** – zmienna losowa (opis zmian typu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej przedstawiono na rysunku 5.13),
- obciążenie **P2**, **P3**, **P4**, **P5**, **P6**, **P7** – zmienne deterministyczne (**P2 = 1 kN, P3 = 1 kN**, **P4 = 1 kN**, **P5 = 1 kN**, **P6 = 1 kN**, **P7 = 1 kN**),
- sztywność osiowa **EA** – zmienna deterministyczna (**EA** = 10^6 kN),
- współrzędna **Z** węzła 1 – zmienna deterministyczna (**Z = 0**).

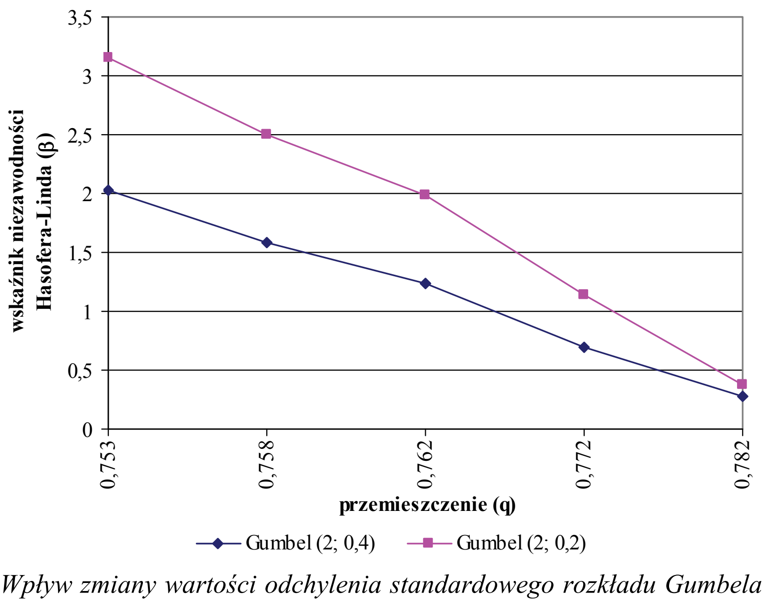


Rys. 5.13. *Wpływ przyjętego typu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisującej obciążenie na wartość wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda*

Przeanalizowano, jak zmienia się wartość wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda, a tym samym prawdopodobieństwo awarii w zależności od przyjętego typu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej w miarę zbliżania się do wartości granicznej przemieszczenia (rys. 5.13). Rysunki 5.14 i 5.15 przedstawiają wpływ zmiany wartości odchylenia standardowego rozkładu normalnego i Gumbela na wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda.



Rys. 5.14. *Wpływ zmiany wartości odchylenia standardowego rozkładu normalnego zmiennej losowej opisującej obciążenie na wartość wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda*



Rys. 5.15. *Wpływ zmiany wartości odchylenia standardowego rozkładu Gumbela zmiennej losowej opisującej obciążenie na wartość wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda*

Po zmianie wartości odchylenia standardowego w rozkładzie Gumbela o 0,2, wartości wskaźnika niezawodności wzrosły od 35% (dla przemieszczenia równego 0,782) do 55% (dla przemieszczenia równego 0,753). Natomiast po zmianie wartości odchylenia standardowego w rozkładzie normalnym o 0,2, dla przemieszczenia 0,753, wartości wskaźnika niezawodności wzrosły o ponad 100%. Na podstawie doświadczeń, nabytych w przykładzie pierwszym, możemy powiedzieć, że przyjęcie w opisie modelu obliczeniowego jako zmiennej losowej tylko obciążenia jest niewystarczające.

Przypadek 2

- obciążenie **P1**, **P2**, **P3**, **P4**, **P5**, **P6**, **P7** – zmienne losowe,
- sztywność osiowa **EA** – zmienna losowa,
- współrzędna **Z** węzła 1 – zmienna losowa.

Opis zmian typu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych przedstawiono w tabeli 5.13.

Tabela 5.13. *Opis zmiennych losowych*

Zmienna losowa	Funkcja prawdopodobieństwa	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności
obciążenie „**P1**”	normal	2 kN	0,2 kN	10%
obciążenie „**P2**”	normal	1 kN	0,1 kN	10%
obciążenie „**P3**”	normal	1 kN	0,1 kN	10%
obciążenie „**P4**”	normal	1 kN	0,1 kN	10%
obciążenie „**P5**”	normal	1 kN	0,1 kN	10%
obciążenie „**P6**”	normal	1 kN	0,1 kN	10%
obciążenie „**P7**”	normal	1 kN	0,1 kN	10%
sztywność osiowa „**EA**”	normal	1000000 kN	100000 kN	10%
współrzędna „**Z**” węzła 1	normal	0,0 m	0,01 m	

Przypadek 2 dostarcza informacji na temat wrażliwości wskaźnika niezawodności na poszczególne zmienne losowe oraz parametry rozkładu prawdopodobieństwa każdej z nich. Znajomość tej wrażliwości ma duże znaczenie w lepszym zrozumieniu pracy konstrukcji. Jeżeli wrażliwość wskaźnika niezawodności ze względu na zmienną losową X jest mała w porównaniu do innych zmiennych, to możemy uznać, iż wpływ tej zmiennej na wartość prawdopodobieństwa awarii jest niewielki i w kolejnych obliczeniach możemy ją traktować jako parametr deterministyczny.

To stwierdzenie dotyczy również parametrów rozkładu zmiennej losowej, takich jak: wartość średnia i odchylenie standardowe. Numeryczne rezultaty badań pokazano w tabelach 5.14-5.16.

Tabela 5.14. *Wyniki obliczeń wskaźnika niezawodności β oraz wrażliwości wskaźnika na zmienne losowe*

Przemieszczenie pionowe węzła 1	Wskaźnik niezawodności β	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na zmienne losowe							
		P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	Z
0,772	0,99399	4,532	-1,669	-1,669	-1,669	-1,669	-1,669	-1,669	10,529
0,758	3,06257	4,355	-1,944	-1,944	-1,944	-1,944	-1,944	-1,944	11,939
0,748	6,46303	4,027	-2,355	-2,355	-2,355	-2,355	-2,355	-2,355	13,583

Tabela 5.15. *Wyniki obliczeń wrażliwości wskaźnika niezawodności β na wartość średnią zmiennej losowej*

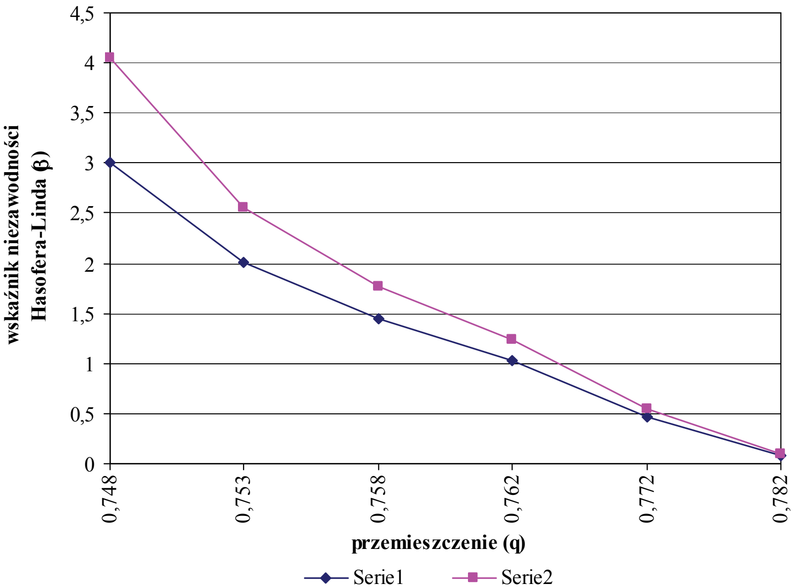
Przemieszczenie pionowe węzła 1	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na wartość średnią zmiennej losowej							
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	Z
0,772	-4,532	1,669	1,669	1,669	1,669	1,669	1,669	-10,529
0,758	-4,355	1,944	1,944	1,944	1,944	1,944	1,944	-11,939
0,748	-4,027	2,355	2,355	2,355	2,355	2,355	2,355	-13,583

Tabela 5.16. *Wyniki obliczeń wrażliwości wskaźnika niezawodności β na wartość odchylenia standardowego zmiennej losowej*

Przemieszczenie pionowe węzła 1	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na wartość odchylenia standardowego zmiennej losowej							
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	Z
0,772	-4,083	-0,277	-0,277	-0,277	-0,277	-0,277	-0,277	-1,102
0,758	-11,619	-1,158	-1,158	-1,158	-1,158	-1,158	-1,158	-4,366
0,748	-20,965	-3,584	-3,584	-3,584	-3,584	-3,584	-3,584	-11,925

Wrażliwość wskaźnika niezawodności jest największa dla zmiennej losowej opisującej współrzędną „**Z**” węzła 1, natomiast najmniejsza dla zmiennej obrazującej sztywność osiową prętów „**EA**” (ze względu na bardzo małą wartość, nie została umieszczona w tabelach). Wniosek ten dotyczy również parametrów rozkładów zmiennych losowych. W zakresie obciążeń wrażliwość na siłę centralną „**P1**" jest największa. Wrażliwość na pozostałe sześć sił „**P2**" „**P3**" „**P4**" „**P5**" „**P6**" „**P7**" jest mniejsza i równa.

Rozważania kończy rysunek 5.16. Seria 2 na tym rysunku pokazuje zmianę wartości wskaźnika niezawodności podczas poruszania się po ścieżce rozwiązania geometrycznie nieliniowego, gdy jedyną zmienną losową jest obciążenie. Pozostałe parametry zadania są potraktowane jako wielkości deterministyczne. Otrzymane wartości wskaźnika przy takim modelu obliczeniowym są wyraźnie wyższe niż w serii 1, która przedstawia zdecydowanie pełniejszy opis zadania (zmienne losowe obrazują: obciążenie **P**, sztywność osiową prętów **EA**, współrzędną **Z** węzła pierwszego). Uwzględnienie w opisie większej liczby zmiennych losowych wydłuża czas obliczeń, jednak takie postawienie problemu pozwala na bardziej rzetelną ocenę bezpieczeństwa konstrukcji.

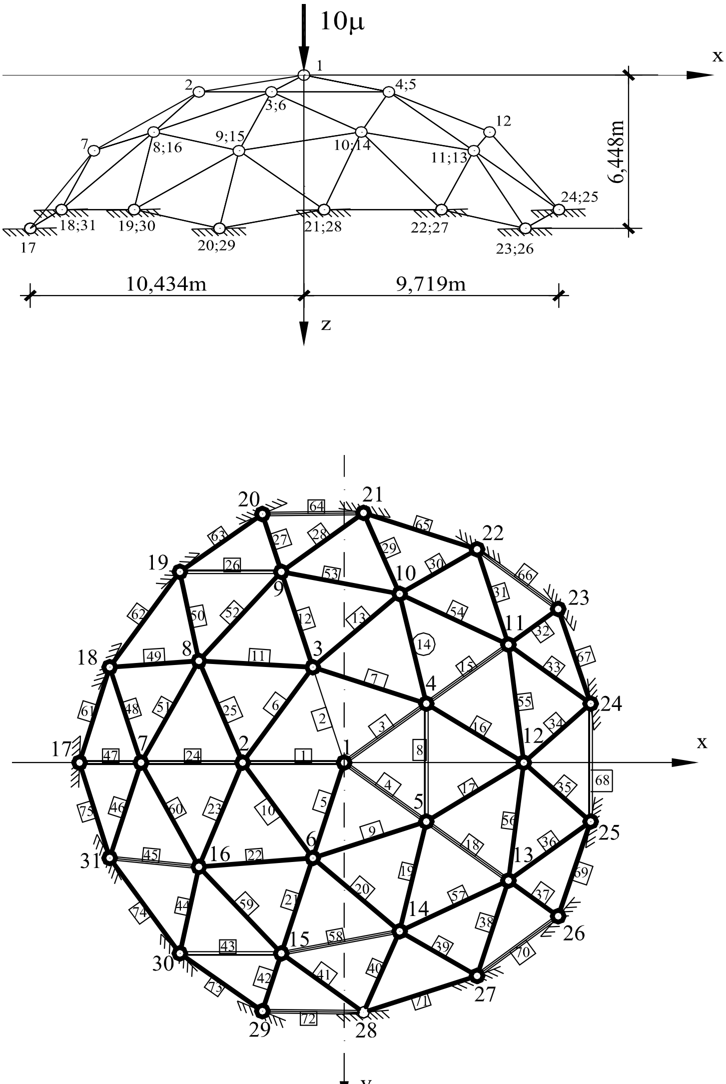


Rys. 5.16. *Wpływ opisu modelu obliczeniowego konstrukcji i obciążenia na wartość wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda*

PRZYKŁAD 3

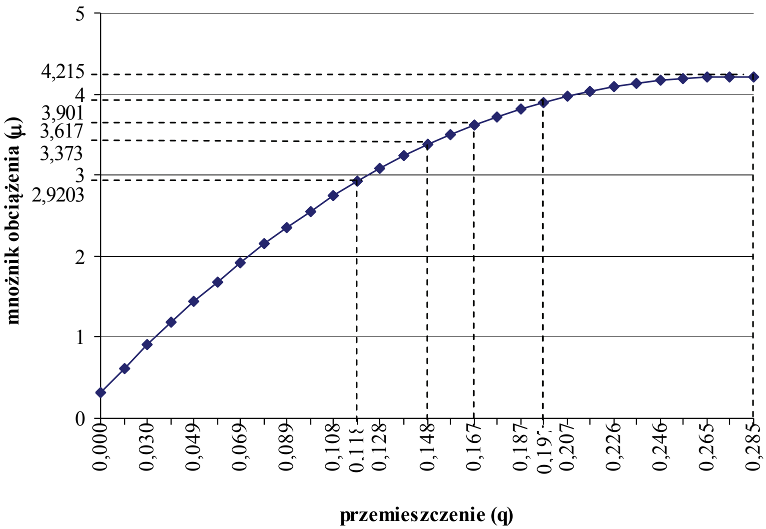
Metodę FORM zastosowano tym razem do analizy niezawodności przeskoku węzła kopuły prętowej, przedstawionej na rysunku 5.17. Ścieżkę równowagi dla przemieszczenia pionowego q węzła 1 przedstawiono na rysunku 5.18. Zbliżanie się do punktu granicznego poprzez zmianę wartości SPS zilustrowano na rysunku 5.19.

Współrzędne punktu granicznego: q = 0,285, μ = 4,215 dla rozwiązania geometrycznie nieliniowego posłużyły do sformułowania funkcji granicznej jako warunku nieprzekraczalności dopuszczalnego mnożnika obciążenia: $g(\boldsymbol{x}) = 1 - \mu(\boldsymbol{x})/4{,}215$.

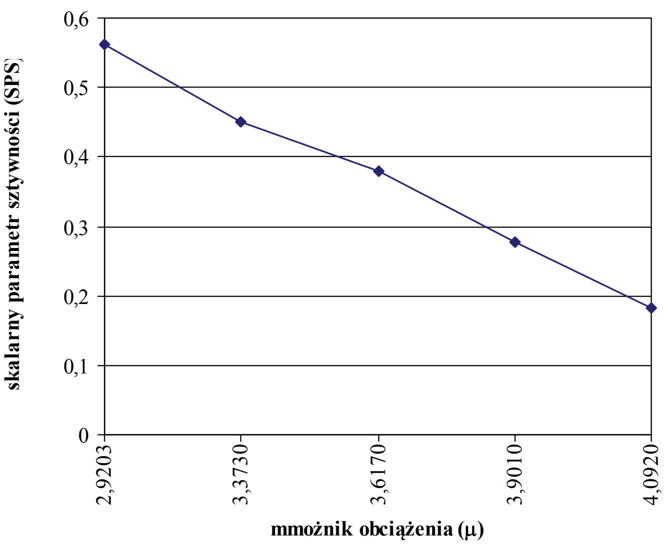


	x [m]	y [m]	z [m]
1	0,000	0,000	0,000
2	-4,004	0,000	0,709
3	-1,237	-3,808	0,709
4	3,240	-2,354	0,709
5	3,40	2,354	0,709
6	-1,237	3,808	0,709
7	-8,009	0,000	3,183
8	-5,729	-4,162	2,395
9	-2,475	-7,617	2,883
10	2,188	-6,735	2,395
11	6,479	-4,708	3,183
12	7,082	0,000	2,395
13	6,479	4,708	3,183
14	2,188	6,735	2,395
15	-2,475	7,617	3,183
16	-5,729	4,162	2,395
17	-10,434	0,000	6,448
18	-9,246	-3,808	5,658
19	-6,479	-7,617	5,658
20	-3,224	-9,923	6,448
21	0,765	-9,971	5,658
22	5,242	-8,516	5,658
23	8,441	-6,133	6,448
24	9,719	-2,354	5,658
25	9,719	2,354	5,658
26	8,441	6,133	6,448
27	5,242	8,516	5,658
28	0,765	9,971	5,658
29	-3,224	9,923	6,448
30	-6,479	7,617	5,658
31	-9,246	3,808	5,658

Rys. 5.17. *Siatka elementów i geometria kopuły prętowej*



Rys. 5.18. *Ścieżki równowagi przemieszczenia pionowego q węzła 1 kopuły prętowej*

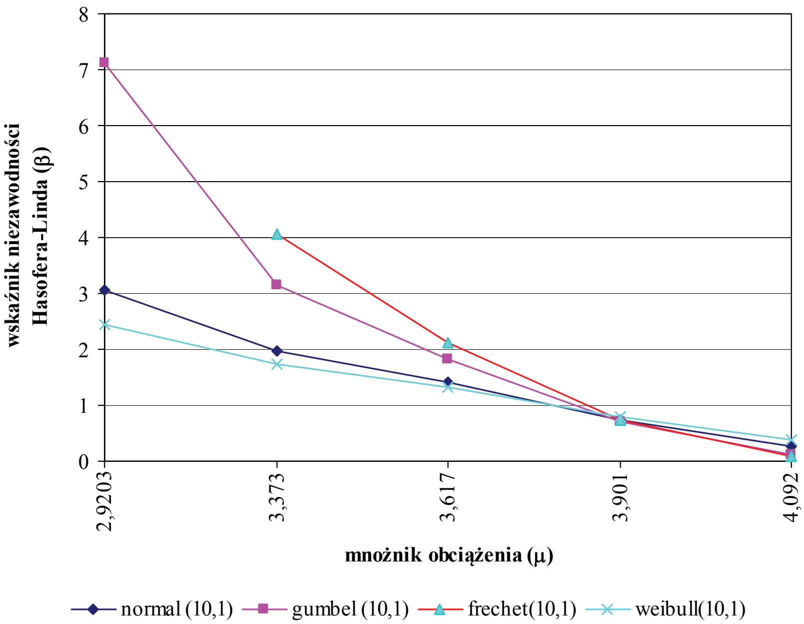


Rys. 5.19. *Zależność skalarnego parametru sztywności od mnożnika obciążenia dla rozwiązania geometrycznie nieliniowego*

W analizie niezawodności wykorzystano następujące zmienne: **P = 10μ** (obciążenie węzła 1), sztywność osiowa **EA**, współrzędna **Z** węzła 1. Rozpatrzono dwa przypadki.

Przypadek 1

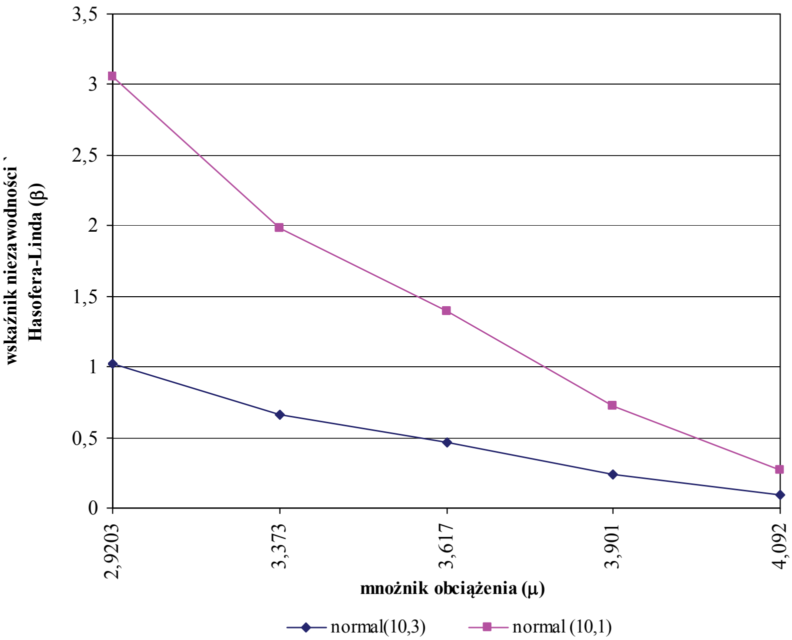
- obciążenie **P** – zmienna losowa (opis zmian typu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych przedstawiono na rysunku 5.20),
- sztywność osiowa **EA** – zmienna deterministyczna (**EA** = 14000 kN),
- współrzędna **Z** węzła 1 – zmienna deterministyczna (**Z** = 11,665 m).



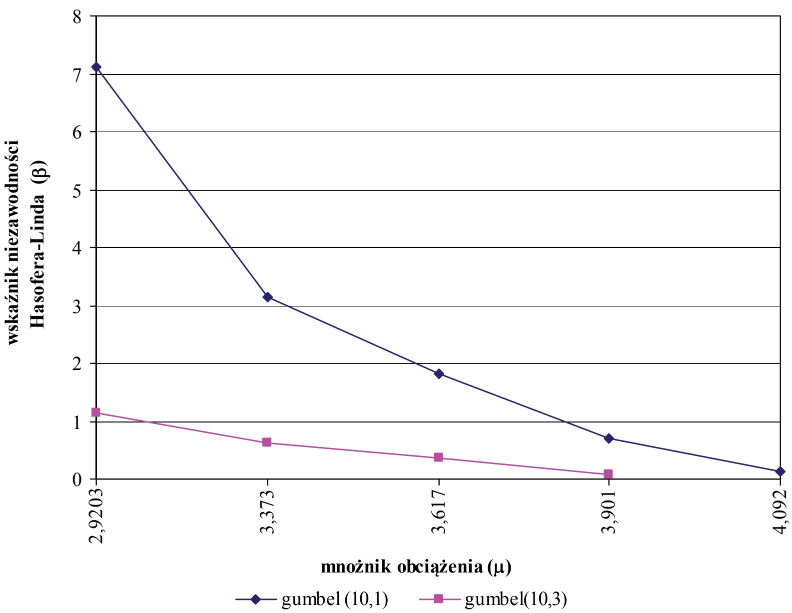
Rys. 5.20. *Wpływ przyjętego typu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej opisującej obciążenie na wartość wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda*

Przeanalizowano, jak zmienia się wartość wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda, a tym samym prawdopodobieństwo awarii w zależności od przyjętego typu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej, w miarę zbliżania się do wartości granicznej obciążenia (rys. 5.20). Różnice między wskaźnikami niezawodności, dla różnych typów rozkładów prawdopodobieństwa, rosną w miarę oddalania się od wartości granicznej mnożnika obciążenia. Na przykład dla wartości mnożnika obciążenia równego 2,9203 wskaźnik niezawodności przyjmuje dla rozkładu normalnego Normal (10,1) wartość β = 3,056, dla rozkładu Gumbela (10,1) β = 7,119, a dla rozkładu Weibulla (10,1) β = 2,452.

Kolejne rysunki 5.21 i 5.22 przedstawiają wpływ zmiany wartości odchylenia standardowego rozkładu normalnego i Gumbela na wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda.



Rys. 5.21. *Wpływ zmiany wartości odchylenia standardowego rozkładu normalnego zmiennej losowej opisującej obciążenie na wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda*



Rys. 5.22. *Wpływ zmiany wartości odchylenia standardowego rozkładu Gumbela zmiennej losowej opisującej obciążenie na wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda*

Po zmianie wartości odchylenia standardowego w rozkładzie Gumbela o 2, dla mnożnika 2,9203, wartości wskaźnika niezawodności wzrosły od 1,146 do 7,119. Po zmianie wartości odchylenia standardowego w rozkładzie normalnym o 2, dla mnożnika obciążenia 2,9203, wartości wskaźnika niezawodności wzrosły od 1,019 do 3,056.

Przypadek 2

- obciążenie **P** – zmienna losowa,
- sztywność osiowa **EA** – zmienna losowa,
- współrzędna **Z** węzła 1 – zmienna losowa.

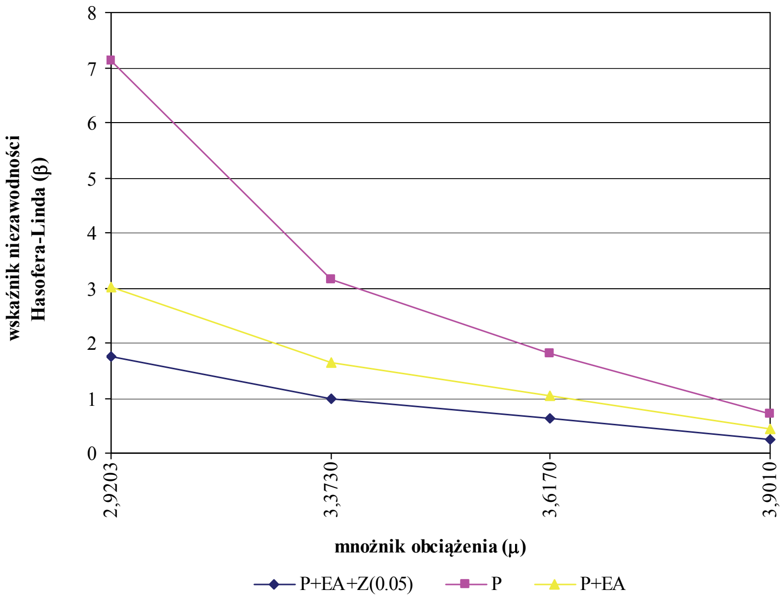
Opis zmian typu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych przedstawiono w tabeli 5.17.

Tabela 5.17. *Opis zmiennych losowych*

Zmienna losowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności
obciążenie „**P**”	gumbel	10 kN	1 kN	10%
sztywność osiowa „**EA**”	normalny	14000 kN	1400 kN	10%
współrzędna „**Z**” węzła 1	normalny	11,665 m	0,09 m	0,77%

Kolejny etap to wprowadzenie, w opisie modelu obliczeniowego, zmiennych losowych obrazujących sztywność osiową **EA** oraz współrzędną **Z** węzła pierwszego. Na rysunku 5.23 pokazano, jak zmienia się wartość wskaźnika niezawodności dla różnych opisów modelu obliczeniowego zadania. Największe wartości wskaźnika niezawodności obserwujemy, gdy zmienną losową jest tylko obciążenie. Wprowadzenie dodatkowo dwóch kolejnych zmiennych losowych (**EA** i **Z**) zdecydowanie obniża wartości wskaźnika niezawodności. Efekt ten można było zaobserwować również w poprzednich przykładach.

Na podstawie tabel 5.18, 5.19, 5.20 możemy zauważyć wyraźną różnicę w ocenie wrażliwości wskaźnika niezawodności na zmienną losową opisującą współrzędną **Z** węzła pierwszego w stosunku do pozostałych zmiennych losowych. Imperfekcje położenia węzłów odgrywają bardzo ważną rolę w przeskoku węzła konstrukcji kratowych zarówno w analizie probabilistycznej, jak i deterministycznej, co można zaobserwować w wielu pracach traktujących o stateczności. Rysunek 5.24 pokazuje jak duże różnice w ocenie bezpieczeństwa konstrukcji mogą pojawić się, gdy niewłaściwie oszacujemy odchylenie standardowe zmiennej losowej odpowiedzialnej za imperfekcje położenia węzłów.



Rys. 5.23. *Wpływ opisu modelu obliczeniowego na wartość wskaźnika niezawodności*

Tabela 5.18. *Wyniki obliczeń wskaźnika niezawodności β oraz wrażliwości wskaźnika na zmienne losowe*

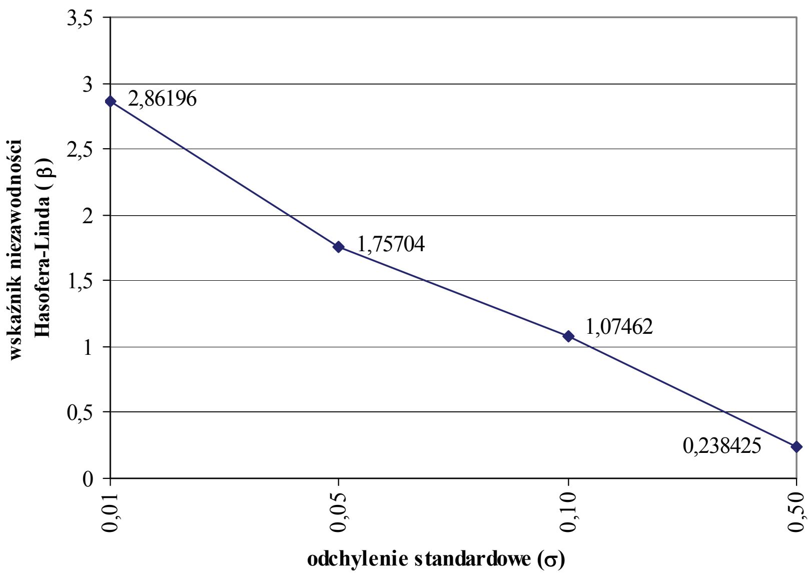
Mnożnik obciążeń μ	Wskaźnik niezawodności β	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na zmienne losowe		
		EA	P	Z
2,9203	1,2396	2,525e-4	-3,838e-1	-9,73298
3,373	0,6463	2,304e-4	-3,389e-1	-10,02817
3,617	0,4098	2,188e-4	-3,178e-1	-10,12866
3,901	0,17235	2,044e-4	-2,934e-1	-10,24937

Tabela 5.19. *Wyniki obliczeń wrażliwości wskaźnika niezawodności β na wartość średnią zmiennej losowej*

Mnożnik obciążeń μ	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na wartość średnią zmiennej losowej		
	EA	P	Z
2,9203	-2,525e-4	3,838e-1	9,73298
3,373	-2,304e-4	3,389e-1	10,02817
3,617	-2,188e-4	3,178e-1	10,12866
3,901	-2,044e-4	2,934e-1	10,24937

Tabela 5.20. *Wyniki obliczeń wrażliwości wskaźnika niezawodności β na wartość odchylenia standardowego zmiennej losowej*

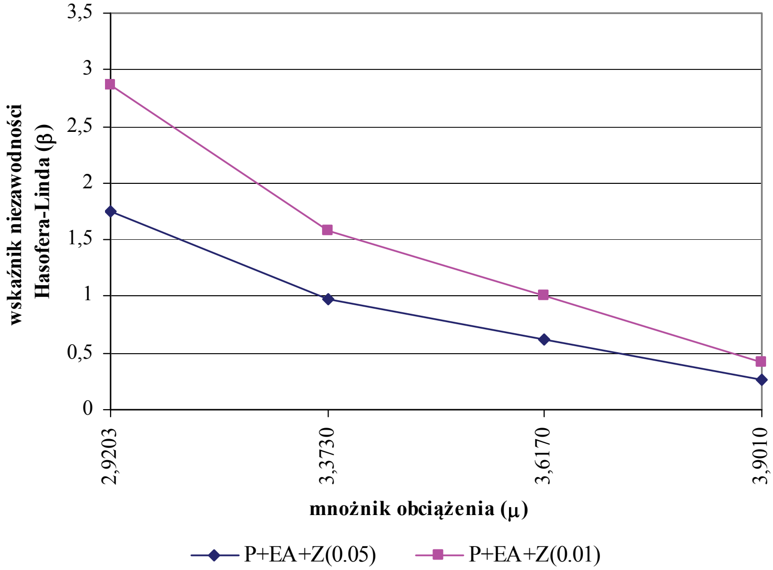
Mnożnik obciążeń μ	Wrażliwość wskaźnika niezawodności β na wartość odchylenia standardowego zmiennej losowej		
	EA	P	Z
2,9203	-7,337e-5	-1,842e-1	-10,569
3,373	-4,803e-5	-1,100e-1	-5,849
3,617	-2,746e-5	-8,365e-2	-3,784
3,901	-1,008e-5	-5,987e-2	-1,629



Rys. 5.24. *Zależność wskaźnika niezawodności od wartości odchylenia standardowego zmiennej losowej opisującej współrzędną **Z** węzła pierwszego*

Obliczenia przedstawione na rysunku 5.24 wykonano dla mnożnika μ = 2,9203 ścieżki rozwiązania geometrycznie nieliniowego.

Na rysunku 5.25 przedstawiono, jak zmienia się wskaźnik niezawodności podczas zmiany wartości odchylenia standardowego zmiennej losowej obrazującej współrzędną **Z** węzła pierwszego konstrukcji kratowej.



Rys. 5.25. *Wpływ wartości odchylenia standardowego zmiennej losowej **Z** opisującej położenie węzła 1*

PRZYKŁAD 4

W obliczeniach niezawodności ważnym czynnikiem jest czas trwania obliczeń. W przybliżeniu jest to czas potrzebny do uzyskania pojedynczej wartości funkcji granicznej pomnożony przez liczbę realizacji niezbędnych do oszacowania prawdopodobieństwa awarii. W pracy wartość funkcji granicznej jest obliczana za pomocą programu MES KRATA.

Poniżej w tabelach 5.21-5.23 (dla wybranych realizacji) przedstawiono, jak często w trakcie obliczeń konieczne było wywoływanie programu KRATA.

Tabela 5.21. *Wyniki obliczeń liczby wywoływań programu KRATA i liczby iteracji dla kratownicy zrealizowanej w przykładzie 3 – liczba zmiennych losowych = 3*

Mnożnik obciążeń μ	Liczba wywoływań programu KRATA	Liczba iteracji	Względna odległość punktu na ścieżce od punktu granicznego
3,373	14	2	19,9%
3,617	14	2	14,2%
3,901	14	2	7,4%

Tabela 5.22. *Wyniki obliczeń liczby wywoływań programu KRATA i liczby iteracji dla kratownicy zrealizowanej w przykładzie 1 – liczba zmiennych losowych = 3*

Mnożnik obciążeń μ	Liczba wywoływań programu KRATA	Liczba iteracji	Względna odległość punktu na ścieżce od punktu granicznego
1,565	20	2	30,8%
1,732	14	2	23,4%
2,018	14	2	10,8%

Tabela 5.23. *Wyniki obliczeń liczby wywoływań programu KRATA i liczby iteracji dla kratownicy zrealizowanej w przykładzie 2 – liczba zmiennych losowych = 9*

Przemieszczenie pionowe węzła 1	Liczba wywoływań programu KRATA	Liczba iteracji	Względna odległość punktu na ścieżce od punktu granicznego
0,772	75	8	1,7%
0,758	125	8	3,4%
0,748	166	8	4,7%

Możemy zauważyć, że wzrost liczby zastosowanych zmiennych losowych zdecydowanie zwiększył czas obliczeń. Ponadto w miarę oddalania się od punktu granicznego liczba wywoływań programu MES KRATA również uległa wyraźnym zmianom. Dla punktów bardzo oddalonych od punktu granicznego uzyskanie wyników w czasie możliwym do zaakceptowania było nierealne, często pojawiały się wówczas problemy z obliczeniem gradientów funkcji granicznej, niezbędnych do określenia położenia punktu projektowego.

PRZYKŁAD 5

Oprogramowanie STAND umożliwia weryfikację poprawności rozwiązań uzyskiwanych metodą FORM poprzez zastosowanie metody drugiego rzędu SORM. Bardzo cenne informacje dostarcza również metoda Monte Carlo oraz Importance Sampling. Metody te nie nadają się do zastosowania w dużych zadaniach niezawodnościowych. Spowodowane jest to ciągle znacznym (w porównaniu z metodą FORM) czasem obliczeń oraz niemożnością szybkiego uzyskania wrażliwości otrzymywanego prawdopodobieństwa zniszczenia na parametry projektowe. Jednak ze względu na swoją dużą dokładność, metody te bardzo dobrze nadają się do określania błędu popełnianego przez metody pierwszego i drugiego rzędu.

Tabela 5.24. *Analiza porównawcza obliczania wskaźnika niezawodności (kratownica Missesa)*

Mnożnik obciążeń μ	FORM (liczba wywoływań programu KRATA = 20)	SORM (liczba wywoływań programu KRATA = 32)	Monte Carlo (liczba wywoływań programu KRATA = 100000)	Importance Sampling (liczba wywoływań programu KRATA = 10020)
1,609	1,41400	1,41643	1,42285	1,43018

Analiza porównawcza obliczania wskaźnika niezawodności przy pomocy metod: FORM, SORM, Importance Sampling, Monte Carlo potwierdza słuszność decyzji o stosowaniu w prezentowanej pracy jako podstawowej metody badawczej metody FORM. Błąd względny dla poszczególnych metod przy założeniu, że układem odniesienia jest metoda Monte Carlo wynosi: dla metody FORM – 0,622%, dla metody SORM – 0,451%, dla metody Importance Sampling – 0,515%.

Analizując wyniki możemy zauważyć, że prawdopodobieństwo awarii obliczone metodą FORM nieco odbiega od pozostałych co jest spowodowane tym, że prawdopodobieństwo jest stosunkowo duże i założenie liniowego przybliżenia powierzchni granicznej w punkcie projektowym nie prowadzi do bardzo dokładnych rezultatów. Lepsze rezultaty otrzymano metodą SORM, która wykorzystuje paraboliczną aproksymację powierzchni granicznej. Trzeba mieć jednak na uwadze, że efektywność metody SORM maleje wraz z rosnącą liczbą zmiennych losowych za sprawą algorytmu wyznaczania hesjanu oraz wartości własnych hesjanu w punkcie projektowym powierzchni granicznej. Nie bez znaczenia jest również fakt, że do oszacowania prawdopodobieństwa awarii w przypadku metody FORM wystarczy 20 wywołań programu KRATA, w metodzie SORM 32, w metodzie Importance Sampling 10020, w metodzie Monte Carlo 100000. Czas obliczeń oraz możliwość uzyskania szybkiej odpowiedzi na temat wrażliwości otrzymywanego prawdopodobieństwa zniszczenia na parametry projektowe zadecydowały o wyborze metody FORM jako podstawowej metody badawczej.

6

Wnioski

1. Budując model matematyczny zadania projektant musi podjąć decyzję, które parametry projektowe potraktować jako deterministyczne, a które jako losowe. W rzeczywistości każda wielkość fizyczna jest zmienną losową, jednak ze względów obliczeniowych część przyjmuje się jako parametry deterministyczne. Identyfikacja zmiennych w sposób znaczący decyduje o rozwiązaniu zadania, dlatego tak istotnym problemem jest badanie wrażliwości wskaźnika niezawodności na zmiany charakterystyk probabilistycznych rozważanych zmiennych losowych.
2. Po uwzględnieniu losowości danego parametru należy uważnie prześledzić, jaki typ rozkładu prawdopodobieństwa jest odpowiedni dla danej zmiennej losowej. Na wyniki analizy wyraźnie wpływa również opis parametrów rozkładu.
3. Problem prawidłowego sformułowania kryterium awarii wymaga przewidywania prawdopodobnych dla danej konstrukcji sposobów zniszczenia bądź utraty funkcji użytkowych. Zaleca się indywidualne rozpatrywanie każdej konstrukcji w celu ustalenia funkcji granicznej.
4. Metody półprobabilistyczne, oparte na częściowych współczynnikach bezpieczeństwa, stosowane w projektowaniu inżynierskim, nie dostarczają informacji na temat poziomu niezawodności obiektu, co jest poważną wadą takiego sposobu projektowania.
5. W miarę wzrostu stopnia komplikacji, występującego przy praktycznych zagadnieniach projektowania, jawne metody niezawodności tracą swoją funkcjonalność. W związku z powyższym w pracy zaproponowano możliwość użycia interfejsu między metodami zajmującymi się analizą niezawodności a numerycznymi metodami obliczania konstrukcji inżynierskich, np. MES. W literaturze nie ma zbyt wielu prac poświęconych temu podejściu, natomiast daje ono możliwość budowy modelu matematycznego, który lepiej opisuje rzeczywistość i jego rozpowszechnienie jest godne polecenia.
6. Wśród inżynierów widoczny jest opór przed stosowaniem metod probabilistycznych. Dotyczy to również probabilistycznych metod numerycznych, których złożoność jest w istocie ukryta wewnątrz programów komputerowych. Dodatkowy wysiłek użytkownika programu jest potrzebny przy charakteryzowaniu danych dwoma parametrami (wartością oczekiwaną i odchyleniem standardowym) w miejsce jednego parametru wymaganego w metodach deterministycz-

nych. Konieczne jest więc dostarczenie inżynierom algorytmów umożliwiających analizę konstrukcji z uwzględnieniem czynników losowych. Według autorki metoda FORM może w przyszłości wypełnić tę lukę. Bardzo ważnym momentem w procesie projektowania jest podjęcie decyzji, który parametr potraktować jako deterministyczny, a który jako losowy. Metoda FORM poprzez analizę wrażliwości wskaźnika niezawodności daje szybką odpowiedź na to pytanie.

7. Należy jednak cały czas pamiętać, że metoda FORM daje najlepsze rezultaty wówczas jeśli istnieje tylko jeden punkt projektowy, funkcja graniczna nie jest silnie nieliniowa, jest różniczkowalna. Dlatego też przed podjęciem decyzji o zastosowaniu tej metody do innych zagadnień analizy konstrukcji, konieczne staje się przeprowadzenie wielu testów sprawdzających.

7

Podsumowanie

W prezentowanej pracy analizie poddano jednowarstwowe słabo wyniosłe konstrukcje kratowe podatne na utratę stateczności poprzez przeskok węzła. W literaturze możemy znaleźć wiele prac traktujących o tym zagadnieniu w ujęciu deterministycznym. Pozwala ono określić maksymalne obciążenie towarzyszące przeskokowi oraz sposób osiągnięcia tej wartości, tj. ścieżkę równowagi. W deterministycznym podejściu obciążenie jest opisane poprzez normową wartość charakterystyczną i współczynnik bezpieczeństwa. Nie interesuje nas możliwość rozrzutu obciążenia, które definiuje odchylenie standardowe oraz sposób realizacji obciążenia na konstrukcji. Problem ten dotyczy również wielkości opisujących model konstrukcji, na przykład zmieniającej się sztywności osiowej prętów lub współrzędnych położenia węzłów struktury.

W ujęciu probabilistycznym mamy możliwość dokładniejszego, bardziej zbliżonego do rzeczywistości, opisu oddziaływania obciążenia na konstrukcję poprzez podanie typu rozkładu oraz parametrów rozkładu (wartości średniej i odchylenia standardowego). Najczęściej stosowanym rozkładem w teorii prawdopodobieństwa jest rozkład normalny. Jedną z istotnych jego zalet jest to, że każda liniowa kombinacja niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Przyjmując jednak, że zmienne losowe opisujące problem niezawodnościowy są typu gaussowskiego, należy pamiętać, iż rozkład ten daje niezerowe wartości prawdopodobieństwa dla ujemnych realizacji zmiennej losowej. Można więc używać go do modelowania wielkości losowych nieujemnych ze swej fizycznej natury, jedynie przy założeniu, że prawdopodobieństwo przyjmowania przez nie wartości mniejszych od zera jest pomijalnie małe. Rozkład normalny możemy przyjmować do opisu na przykład losowości położenia węzłów konstrukcji, jak również losowości mnożnika obciążeń stałych.

W układach rzeczywistych rozkłady niektórych obciążeń znacznie odbiegają od rozkładu gaussowskiego i przyjęcie założenia o ich normalności może prowadzić do grubych błędów w ocenie bezpieczeństwa konstrukcji. Zdecydowanie niegaussowski charakter mają obciążenia atmosferyczne. Obciążenia takie jak: wiatr, śnieg, prądy i fale morskie oddziałują na konstrukcję ze zmienną w czasie intensywnością i powinny być traktowane jako procesy losowe. Można jednak czasem traktować je jako zmienne losowe o rozkładach prawdopodobieństwa odpowiadających rozkładom maksimów tych obciążeń w danym (długim) przedziale czasu. Przykładami takich rozkładów są rozkłady Gumbela i Frecheta.

W pracy wykorzystano program do analizy niezawodności STAND zbudowany w IPPT PAN oraz moduł autorski MES KRATA generujący ścieżkę równowagi za pomocą metody stałej długości łuku. W programie KRATA, do badania zmian macierzy sztywności konstrukcji w analizie przyrostowo-iteracyjnej, wykorzystano skalarny parametr sztywności SPS z pracy Bergana i Sordei [9, 10]. Rozpatrywano warunek nieprzekroczenia dopuszczalnego mnożnika obciążenia lub przemieszczenia. Powyższe warunki stanowią niejawne postacie funkcji zmiennych losowych, stąd wynikła konieczność zbudowania interfejsu pomiędzy programami STAND i KRATA.

Z przedstawionych w pracy rozważań wynika, że na ocenę bezpieczeństwa konstrukcji ma wpływ wiele czynników. Istotnym zagadnieniem w analizie niezawodności jest więc przyjęcie takiego modelu obliczeniowego (zarówno konstrukcji jak i obciążenia), który najbardziej jest zbliżony do stanu rzeczywistego. Niekompletne dane statystyczne oraz niewłaściwie przyjęte założenia mogą prowadzić do poważnych różnic w wartościach wskaźnika niezawodności.

Konkurencyjne w stosunku do metod aproksymacyjnych metody symulacyjne (niezależnie od własności funkcji granicznej) umożliwiają wyznaczenie prawdopodobieństwa awarii z dowolną dokładnością. Jednak w większości przypadków osiągnięcie zadanej dokładności wiąże się z koniecznością przeprowadzenia zbyt dużej liczby symulacji, a tym samym z wydłużeniem czasu obliczeń. Nie bez znaczenia jest również zdecydowanie większy trud oszacowania wrażliwości wskaźnika niezawodności na zmienne losowe i parametry rozkładu każdej z nich.

Literatura

[1] Abdo T., Rackwitz R., *Reliability of uncertain structural system*s, Proc. Finite Elements in Engineering Applications, Stuttgart, 1990 INTES GmbH, pp. 161-176.

[2] Adhikari S., *Reliability Analysis Using Parabolic Failure Surface Approximation*, J. Eng. Mech. ASCE, 2003, pp. 1208-1225.

[3] Al-Rasby S.N., *Solution techniques in nonlinear structural analysis*, Computer & Structures, Vol. 40, 1991, pp. 985-993.

[4] Arora J.S., *Introduction to optimum design*, McGraw-Hill, 1989.

[5] Augusti G., Baratta A., Casciati F., *Probabilistic Methods in Structural Engineering*, Chapman and Hall, 1984.

[6] Bathe K.J., Cimento A.P., *Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 22, Issue 1, 1980, pp. 59-85.

[7] Bathe K.J., *Finite element procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.

[8] Belytschko T., Liu W.K., Moran B., *Nonlinear Finite Elaments for Continua and Structures*, Wiley, 1997.

[9] Bergan P.G., *Solution techniques for nonlinear finite element problems*, Int. J. Num. Meths. Eng. 12, 1978, pp. 1677-1696.

[10] Bergan P.G., Soreide T.H., *Solution of large displacement and stability using the current stiffness parameter*. Conference "Finite Elements in nonlinear Mechanics", Geilo 1977, pp. 647-669.

[11] Besseling J.F., *Non-linear analysis of structures by the finite element method as a supplement to a linear analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, Issue 2, 1974, pp. 173-194.

[12] Biegus A., *Podstawy probabilistycznej analizy bezpieczeństwa konstrukcji,* Oficyna Wydawnicza, Wrocław 1996.

[13] Biegus A., *Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Wrocław, 1999.

[14] Biernat S., Śniady P., *Random response of a bridge-vehicle system*, Proc. of the 8th IFIP W.G.7.5."Reliability and Optimization of Structural Systems", The Univ. of Michigan, USA, 1998, pp. 77-84.

[15] Bogusz W., *Stateczność techniczna*. PWN, Warszawa 1972.

[16] Breitung K., *Asymptotic approximations for multivariate integrals*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 110,1984, pp. 357-366.

[17] Breitung K., Hohenbichler M., *Asymptotic approximations for multivariate integrals with an application to multinormal probabilities*, J. Multivariate Analysis, 30(1), 1989, pp. 80-97.

[18] Bródka J., Czmoch I., Giżejowski M., Karczewski J., *Nośność graniczna stalowej kopuły prętowej,* Inżynieria i Budownictwo 1, 1983.

[19] Bryja D., Śniady P., *Random vibration of a suspension bridge due to highway traffic*, Jour. of Sound and Vibr., Vol. 125, 1988, pp. 379-387.

[20] Cabral S.V.S., Katafygiotis, L.S., *Neural network based response surface method and adaptive importance sampling for reliability analysis of large structural systems*, [in]:

Structural Safety and Reliability- ICOSSAR 01, ed. Corotis R.B., Schueller G.I., Shinozuka M., p. 46 (abstract), A.A. Balkema Publishers, Lisse, The Netherlands, 2001.

[21] Chapman O.J.V., Crossland A.D., *Neural networks in probabilistic structural mechanics*, Probabilistic Structural Mechanics Handbook, Theory and Industrial Applications, Chapman &Hall, New York, 1995.

[22] Chmielewski T., *Metody probabilistyczne w dynamice konstrukcji*, WSI Opole, 1982.

[23] Chun-Ching Li, Der Kiureghian A., *Optimal discretization of random fields*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 119, Issue 6, 1993, pp. 1136-1154.

[24] Ciba A., Cichoń Cz., Tomana A., Witek B., Wójtowicz R., *Application of the MANKA computer code to the nonlinear analysis of bar structures*. XI Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, Kielce-Cedzyna, 1993.

[25] Cichoń Cz., *Effectiveness and accuracy of computation of stability boundary using TL Approach and Corotational Formulation*. XI Polish Conference on Computer Methods in Mechanics Kielce-Cedzyna, 1993.

[26] Cichoń Cz., *Numerical method of computation of critical boundaries on equilibrium Manifolds*, SMiRT 11, Trans. Vol. B, Tokio, Japan 1991, pp. 213-218.

[27] Cornell C.A., *A probability-based structural code*, Journal of American Concrete Institute, Vol. 66, 1969, pp. 974-985.

[28] Crisfield M., *A fast incremental/iterative solution procedures that handles „snap-through"*, Computer & Structures, Vol. 13, Issue 1-3, 1981, pp. 55-62.

[29] Crisfield M., *An arc-length method including line searches and accelerations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, 1983, pp. 1269-1289.

[30] Crisfield M.A., Nonlinear Finite Element Analysis of Solid and Structures, Wiley,1997

[31] Dacko M., Borkowski W., Dobrociński S., Niezgoda T., Wieczorek M., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Arkady, Warszawa 1994.

[32] Der Kiureghian A., Dakessian T., *Multiple design points in first and second order reliability*, Structural Safety, 20, 1998, pp. 37-49.

[33] Der Kiureghian A., De Stefano M., *Efficient algorithm for second-order reliability analysis*, J. Eng. Mech. ASCE, 117(12), 1991, pp. 2904-2923.

[34] Der Kiureghian A., Haukaas T., Fujimura K., *Structural reliability software at the University of California*, Berkeley, Structural Safety, Vol. 28, Issue 1-2, 2006, pp. 44-67.

[35] Der Kiureghian A., Lin H-Z., Hwang S-J., *Second order reliability approximations*, J. Eng. Mech. ASCE,1987, pp. 1208-1225.

[36] Der Kiureghian A., Pei-Ling Liu, *Structural reliability under incomplete probability information*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 112, Issue 1, 1986, pp. 85-104.

[37] Ditlevsen O., Madsen H.O., *Structural Reliability Methods*, Wiley, 1996.

[38] Doliński K., *First-order second-moment approximation in reliability of structural systems: critical review and alternative approach*. Structural Safety, Vol. 1, 1983, pp. 211-231.

[39] Doliński K., *Importance sampling techniques in reliability calculations*, Prace IPPT, 37, 1988.

[40] EN 1990, 2002 Eurocode – Basis of structural design, 2002.

[41] Engelstad S.P., Reddy J.N., *Probabilistic nonlinear finite element analysis of composite structures*, AIAA Journal, Vol. 31, Issue 2, 1993, pp. 1362-1369.

[42] Fafard M., Massicotte B., *Geometrical interpretation of the arc-length method*, Computer & Structures, Vol. 46, 1993, pp. 603-615.

[43] Fiessler B., Neumann H-J., Rackwitz R., *Quadratic limit states in structural reliability*, J. Eng. Mech Div ASCE, 105(EM4) 1979, pp. 661-676.

[44] Forde B.W.R., Stiemer S.F., *Improved arc-length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis*, Computer & Structures, Vol. 27, 1987, pp. 625-630.

[45] Fujita M., Rackwitz R., *Updating first and second order reliability estimates by importance sampling*, Proc. of Japan Society of Civil Engineers, 392/I-9, 1988, pp. 53-59.

[46] Fung Y.C., *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.

[47] Gill P.E., Murray W., Wright M.H., *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.

[48] Giżejowski M., Karczewski J., Łubiński M., *Pewien sposób aproksymacji krzywej granicznej dla pręta kratownicy przy zginaniu z siłą podłużną,* Archiwum Inżynierii Lądowej, 1, 1979.

[49] Gollwitzer S., Kirchgabner B., Fischer R., Rackwitz R., *PERMAS-RA/STRUREL system of programs for probabilistic reliability analysis*, Structural Safety, Vol. 28, Issue 1-2, 2006, pp. 108-129.

[50] Gomuliński A., Witkowski M., *Mechanika budowli – kurs dla zaawansowanych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993.

[51] Górski J., *Nieliniowe modele konstrukcji z losowymi geometrycznymi i materiałowymi imperfekcjami. Rozwiązanie symulacyjne.* Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, monografia 68, Gdańsk 2006.

[52] Grycak Z., Rządkowski J., *Estymacja parametrów liczbowych losowej nośności granicznej jednowarstwowych kopuł kratowych,* Konferencja Naukowa KILi W PAN PZITB, Krynica 1985.

[53] Harr M.E., *Reliability-Based Design in Civil Engineering*. McGraw-Hill, 1987.

[54] Hasofer A.M., Lind N.C., *Exact and invariant second moment code format*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 100, 1974, pp. 111-121.

[55] Hisada T., Nakagiri S., *Role of the Stochastic Finite Element Method in structural safety and reliability,* Proc. of the 5th International Conference on Structural Safety and Reliability, 1985, pp. 385-394.

[56] Hisada T., Nakagiri S., *Stochastic finite element method developed for structural safety and reliability,* Proc. of the 3th International Conference on Structural Safety and Reliability, The University of Trondheim, Trondheim, Norway, 1981, pp. 395-408.

[57] Hohenbichler M., Gollwitzer S., Kruse W., Rackwitz R., *New light on first and second order reliability methods*, Structural Safety, 4, 1987, pp. 267-284.

[58] Hohenbichler M., Rackwitz R., *Improvement of second-order reliability estimates by importance sampling*, Journal of the Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 114, 1988, pp. 2195-2199.

[59] Hohenbichler M., Rackwitz R., *Non-normal dependent vectors in structural safety*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 107, 1981, pp. 1227-1238.

[60] Hurtado J.E., *Neural network in stochastics mechanics*, Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 8, No. 3, 2001, pp. 303-342.

[61] Huseyin K., *Nonlinear theory of elastic stability*, Noordhoff International Publishing, 1975

[62] Jastrzębski P., Muttermich J., Orłowski W., *Wytrzymałość materiałów,* Arkady, Warszawa 1986.

[63] Kahn M., Marshall W., *Methods of reducing sample size in Monte Carlo computations*, Oper. Res., 1, 1953, pp. 263-278.

[64] Kaliszuk J., *Analiza niezawodności konstrukcji i elementów konstrukcji za pomocą Sztucznych Sieci Neuronowych,* Zielona Góra 2005, praca doktorska.

[65] Kamiński M., *Mechanika materiałów kompozytowych w ujęciu komputerowym. Wrażliwość, losowość i efekty wieloskalowe w materiałach kompozytowych*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2006.

[66] Karczewski J., Barszcz A., *Badania doświadczalne sprężysto-plastycznych prętów kratownicy przestrzennej,* Archiwum Inżynierii Lądowej 3, 1988.

[67] Karczewski J., *The limit load of space trusses,* Archiwum Inżynierii Lądowej, 1, 1980.

[68] Kleiber M., Argyris J.H., Balmer H., Hindenlang U., *Natural description of large inelastic deformations for shells of arbitrary shape-application of TRUMP element,* Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 22, 1980, pp. 361-389.

[69] Kleiber M., Hien T.D., *The stochastic finite element method: Basic perturbation technique and computer implementation,* J.Wiley&Sons, 1992.

[70] Kleiber M., Knabel J., Rojek J., *Response surface method for probabilistic assessment of metal forming failure*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 60, 2004, pp. 51-67.

[71] Kleiber M., *Metoda elementów skończonych w nieliniowej analizie kontinuum*, PWN, Warszawa 1985.

[72] Kleiber M., Siemaszko A., Stocki R., *Interactive stability- oriented reliability- based design optimization*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 253, 1999, pp. 168-243.

[73] Kleiber M., *Some results in the numerical analysis of structural instabilities*, Part 1 Statics, Eng.Trans., 30, 1982, pp. 327-352.

[74] Kleiber M., *Some results in the numerical analysis of structural instabilities,* Part 2 Dynamics, Eng. Trans., 30, 1982, pp. 355-367.

[75] Knabel J., *Analiza niezawodności konstrukcji sprężysto-plastycznych przy użyciu powierzchni odpowiedzi,* IPPT PAN, Warszawa 2004, praca doktorska.

[76] Knabel J., Kolanek K., Nguyen Hoang V., Stocki R., Tauzowski P.: *Structural reliability analysis using object oriented environment STAND*, in proc. of the 36th Solid Mechanics Conference, 9-12 September 2008, Gdansk, Poland.

[77] Koiter W.P., *Over de Stabiliteit van het Elastisch Evenvicht*, University of delft Thesis, Paris, Amsterdam 1945. English Translation: On the Stability of Elastic Equilibrium, NASA Rep. TTF-10, 1967.

[78] Kotulski Z., Sobczyk K., *On the moment stability of vibratory systems with random impulsive parametric excitation,* Arch. Mech., Vol. 40 (4), 1988, pp. 465-475.

[79] Kowal Z., *Wymiarowanie połączeń prętów w kratownicach z punktu widzenia niezawodności konstrukcji*. Konferencja Naukowo-Techniczna KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 2010, s. 675-682.

[80] Kowal Z., *The formation of space bar structures supported by the system reliability theory,* Archives of Civil and Mechanical Engineering, Vol. XI, No. 1, Polish AC. Of Sc, Wroclaw 2011, pp. 115-133.

[81] Kowal Z., *Wybrane działy z konstrukcji metalowych.* Tom 1 i 2, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1973.

[82] Lee J.-C., Ang A.H-S., *Finite element fracture reliability of stochastic structures*, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 3, 1995, pp. 1-10.

[83] Lemaire M., Chateauneuf A., Mitteau J-C., *Structural Reliability*, Wiley, 2009.

[84] Lemaire M., Pendola M., *Phimeca-soft*, Structural Safety, Vol. 28, Issue 1-2, 2006, pp. 130-149.

[85] Lin H.Z., Khalessi M.R., *General outlook of UNIPASSV5.0: A general-purpose probabilistic software system*, Structural Safety, Vol. 28, Issue 1-2, 2006, pp. 196-216.

[86] Liu P.L., Der Kiureghian A., *Finite element reliability methods for geometrically nonlinear stochastic structures,* Report No. UCB/SEMM-89/05, Department of Civil & Enviromental Engineering, University of California, Berkeley, CA, 1989.

[87] Liu P.L., Der Kiureghian A., *Multivariate distributions models with prescribed marginals and convariances,* Probabilistics Engineering Mechanics, Vol. 1 (2), 1986, pp. 105-112.

[88] Liu P.-L., Der Kiureghian A., Optimization algorithms for structural reliability, Structural Safety, 9, 1991, pp. 161-177.

[89] Liu W.K., Mani A., Belytschko T., *Fintie Elements Methods In Probabilistic Mechanics,* Probabilistics Engineering Mechanics, Vol. 2 (4), 1987, pp. 201-213.

[90] Liu W.K., Mani A., Belytschko T., *Random Field Elements,* International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, 1986, pp. 1831-1845.

[91] Łubiński M., Żółtowski W., *Konstrukcje metalowe.* Część 1 i 2, Arkady, Warszawa 2008.

[92] Madsen H.O., Krenk S., Lind N.C., *Methods of Structural Safety*, Prentice-Hall, 1986.

[93] Mahadevan S., Mehta S., *Dynamic reliability of large frames*, Computers & Structures, Vol. 47, Issue 1, 1993, pp. 57-67.

[94] Marcinowski J., *Nieliniowa stateczność powłok sprężystych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1999.

[95] Massonet Ch., *Zagadnienia inżynierskie stateczności konstrukcji*, pp. 193-340, Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, praca zbiorowa pod redakcją Z. Waszczyszyna przygotowana na konferencję szkoleniową NT". Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji" Ossolineum, Wrocław 1981.

[96] Matthies H.G., Brenner C.E., Bucher C.G., Guedes Soares C., *Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids – Stochastics finite elements*, Structural Safety, Vol. 19, Issue 3, 1997, pp. 283-336.

[97] Mazur-Śniady K., Śniady P., *Dynamic response of linear structures to random streams of arbitrary impulses in time and space,* Jour. of Sound and Vibr., Vol. 110, 1986, pp. 59-68.

[98] Melchers R.E., *Structural reliability analysis and predictions*, 2nd Ed. Wiley, 1999.

[99] Mironowicz W., Śniady P., *Vibration of linear structures due to jump-discontinuous non-interrupted stochastic process,* Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 19, 1990, pp. 577-582.

[100] Mirski J., *Geneza i morfologia kopuł prętowych w aspekcie geometrycznego kształtowania form architektonicznych*. Monografie, Studia, Rozprawy. Nr 36. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 2003.

[101] Murzewski J., *Niezawodność konstrukcji inżynierskich,* Arkady, Warszawa 1989.

[102] Murzewski J., *Podstawy projektowania i niezawodność konstrukcji,* Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2001.

[103] Nataf A., *Determination des distribution don't les marges sont donnees*, Comptes Rendus de L' Academic des Sciences, 225, 1962, pp. 42-43.

[104] Nowak A.S., Collins K.R., *Reliability of structures*, McGraw-Hill Higher Education, 2000.

[105] Nowak A.S., Szeliga E. K., Szerszeń M.M., *Statistical Models for Resistance of Concrete Components*, Proceedings of the 12th WG 7.5 Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems, Alborg, Denmark 2005, pp. 171-178.

[106] Nowak A.S., Szeliga E.K., Szerszeń M.M., Szwed A., Podhorecki P.J., *Reliabilty-Based Calibration for Structural Concrete*, Report No. UNCLE 05-03, University of Nebraska, October 2005.

[107] Ostrowska-Maciejewska J., *Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa 1982.

[108] Pabisek E., *Systemy hybrydowe integrujące MES i SSN w analizie wybranych problemów mechaniki konstrukcji i materiałów*, monografia 369, seria Inżynieria Lądowa, Wydawnictwa Politechniki Krakowskiej 2008.

[109] Papadrakakis M., Papadopoulos V., Lagaros N.D., *Structural reliability analysis of elastic-plastic structures using neural networks and Monte Carlo simulation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 136, 1996, pp. 145-163.

[110] Pellissetti M.F., Schuëller G.I., *On general purpose software in structural reliability,* An overview. Structural Safety, Vol. 28, Issue 1-2, 2006, pp. 3-16.

[111] PN-EN 1990, 2004 Eurokod – Podstawy projektowania konstrukcji, 2004.

[112] Podhorecki A., *Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych*, Wydawnictwo Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy, 2005.

[113] Rackwitz R., Flessler B., *Structural reliability under combined random load sequences*, Computers & Structures, Vol. 9, Issue 5, 1978, pp. 489-494.

[114] Radoń U., *Analiza niezawodności konstrukcji kratowej,* ACTA SCIENTIARUM POLONORUM Architektura 8 (1-2) pp. 31-40, 2009.

[115] Radoń U., *Analiza przeskoku węzła konstrukcji prętowej dla obciążeń losowych,* 54 Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Krynica 2008, pp. 115-123.

[116] Radoń U., *Analysis of reliability and stability of bar structures,* ARCHIVES OF CIVIL ENGINEERING, LVI, 2, pp. 155-172, 2010.

[117] Radoń U., *Metoda Riksa i metoda skalarnego parametru sztywności w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych,* 7th International Conference New Trends in Statics and Dynamics of Buildings, Bratysława 2009, pp. 263-266.

[118] Radoń U., *Probabilistic nonlinear analysis of truss structure*, ARCHIVES OF CIVIL AND MECHANICAL ENGINEERING, Vol. XI, 2011, pp. 723-738.

[119] Radoń U., *Stateczność kratownicy w ujęciu probabilistycznym,* 6th International Conference New Trends in Statics and Dynamics of Buildings Bratysława 2007.

[120] Radoń U., *Wykorzystanie wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda do obliczania prawdopodobieństwa awarii mało wyniosłej konstrukcji kratowej* 55 Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Krynica 2009, pp. 77-84.

[121] Radoń U., *Zastosowanie metody FORM do analizy niezawodności konstrukcji prętowej,* Theoretical Foundations of Civil Engineering Polish- Ukrainian – Lithuanian Transactions, Vol. 17, Warsaw 2009, pp. 279-286.

[122] Rakowski G., Kacprzyk Z., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005.

[123] Ramm E., *Strategies for tracing nonlinear response near limit points*: *in Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, Springer, New York 1981.

[124] Reh S., Beley J.D., Mukherjee S., Khor E.H., *Probabilistic finite element analysis using ANSYS*, Structural Safety, Vol. 28, Issue 1-2, 2006, pp. 17-43.

[125] Riks E., *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 15, Issue 7, 1979, pp. 529-551.

[126] Riks E., *The application of Newton's method to the problem of elastic stability*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, 1972, pp. 1060-1065.

[127] Robert Ch.P., Casella G., *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer, 1999.

[128] Rosenblatt M., *Remarks on a Multivariate Transformation*, The Annals of Mathematical Statistic, Vol. 23, No. 3, 1952, pp. 470-472.

[129] Rubinstein R.Y., *Simulation and the Monte Carlo method*, Wiley, 1981.

[130] Rymarz Cz., *Mechanika ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa 1993.

[131] Sasaki T., *A neural network-based response surface approach for computing failure probabilities*, Structural Safety and Reliability-ICOSSAR 01, ed. Corotis R.B., Schueller G.I., Shinozuka M., p. 46 (abstract), p. 257 A.A. Balkema Publishers, Lisse, The Netherlands, 2001.

[132] Schittkowski K., *The nonlinear programming method of Wilson*, *Han and Powell with an augmented Lagrangian type line search function*, Part 1: Convergence analysis, Numerische Mathematik, Vol. 38, No. 1, 1982, pp. 83-114.

[133] Schittkowski K., *User's guide for the nonlinear programming code NLPQL*, Handbook to optimization program package NLPQL, University of Stuttgart-Institute for Informatics, Germany, 1985.

[134] Schittkowski K., Zillober C., Zotemantel R., *Numerical comparison of nonlinear programming algorithms for structural optimization*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 7, No. 1-2, 1994, pp. 1-19.

[135] Schuëller G.I., Pradlwarter H.J., *Computational stochastic structural analysis (COSSAN) – software tool*, Structural Safety, Vol. 28, Issue 1-2, 2006, pp. 68-82.

[136] Schuëller G.I., Stix R., *A critical appraisal of methods to determine failure probabilities*, Structural Safety, Vol. 4, 1987, pp. 293-309.

[137] Shinozuka M., *Basic issues in Stochastic Finite Element analysis,* Proc. 5th International Conference on Applications of Statistics and Probability, Vol. 1, 1987, pp. 507-520.

[138] Sieniawska R., Śniady P., *First passage problem of the beam under a random stream of moving forces,* Jour. of Sound and Vibr., Vol. 136 (2), 1990, pp. 177-185.

[139] Sieniawska R., Śniady P., *Life expectancy of high bridges due to traffic load*, Jour. of Sound and Vibr., Vol. 140 (1), 1990, pp. 31-38.

[140] Silicka E., *Optymalizacja niezawodnościowa przekryć strukturalnych,* Wydawnictwo Politechniki Szczecińskiej, rozprawa doktorska, Szczecin 2004.

[141] Sokół T., Witkowski M., *Critical states of imperfect sensitive structures*. Int. Conf. On Lightweight Structures in Civil Engineering, Ed. By J. Obrębski, Warsaw 1995, pp. 228-235.

[142] Sokół T., Witkowski M., *Equilibrium path determination in nonlinear analysis of structures*, 2nd Int Conf. on Comp. Struct. Technology, Athens 1994, Advances in Nonlinear Finite Element Methods, Ed. by B.H.V. Topping and M. Papadrakakis Civil-Comp-Press, Edinburgh, Scotland, pp. 35-45.

[143] Sokół T., Witkowski M., *Numeryczne problemy sterowania procesem przyrostowym w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych*, 9th Conf. Comp. Meth. Mech. Struct. Krakow-Rytro 1989, KILiW PAN Politechnika Krakowska, pp. 1009-1016.

[144] Sokół T., Witkowski M., *Some experience in the equilibrium path determination*, Comp. Assisted Mechanics and Engineering Sciences, Vol. 4, 1997, pp. 189-208.

[145] Sokół T., Witkowski M., *Unstability states in elastic-plastic space bar trusses*. 12th Polish Conf. on Computer Methods in Mechanics, Polish Acad. of Sciences, Polish Sec. of IACM, Military Univ. of Technology Proc., Warsaw-Zegrze 1995, pp. 308-309.

[146] Stocki R., Kolanek K., Jendo M., Kleiber M., *Study on discrete optimisation techniques in reliability-based optimisation of truss structures,* Computers and Structures, Vol. 79, 2001, pp. 2235-2247.

[147] Stocki R., Kolanek K., Knabel J., Tauzowski P., *FE based structural reliability analysis using STAND environment*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, Vol. 16, 2009, p. 35-58.

[148] Stocki R., *Optymalizacja niezawodnościowa konstrukcji prętowych w zakresie dużych przemieszczeń, teoria i program komputerowy*, IPPT PAN, Warszawa 1999, praca doktorska.

[149] Szolc T., Tauzowski P., Knabel J., Stocki R., *Damage identification in vibrating rotor-shaft systems by efficient sampling approach,* Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 23, 2009, pp. 1615-1633.

[150] Szolc T., Tauzowski P., Knabel J., Stocki R., *Nonlinear and parametric coupled vibrations of the rotor-shaft system as fault identification symptom using stochastic methods,* Nonlinear Dynamics, Vol. 57, 2008, pp. 533-557.

[151] Szeliga E., *Eurokod – Podstawy projektowania konstrukcji.* Część 1, Inżynier Budownictwa, 9, 2011, pp. 34-37

[152] Szeliga E., *Eurokod – Podstawy projektowania konstrukcji.* Część 2, Inżynier Budownictwa, 10, 2011, pp. 71-74

[153] Śniady P., *Dynamic response of linear structures to a random stream of pulses,* Jour. of Sound and Vibr., Vol. 131 (1), 1989, pp. 91-102.

[154] Śniady P., *Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji,* Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej Wrocław 2000.

[155] Śniady P., Sieniawska R., Żukowski S., *Influence of some load and structural parameters on the vibrations of a bridge beam,* Arch. Of Civil Engineering 1998, pp. 19-39.

[156] Śniady P., Sieniawska R., Żukowski S., *Reliability of structure being fatique-degraded due to stachastic excitation,* Proc. of the 5th IFIP WG.7.5. "Reliability and Optimization of Structural Systems", Elsevier Science Publ., 1993, pp. 237-244.

[157] Tauzowski P., *Obiektowo – zorientowane środowisko obliczeniowe dla zagadnień mechaniki*, IPPT PAN, Warszawa 2005, praca doktorska.

[158] Teng J.G., Luo Y.F., *A user-controlled arc-length method for convergence to predefined deformation states*, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, 1998, pp. 51-58.

[159] Thacker B.H., Riha D.S., Fitch S.K.H., Huyse L.J., Pleming J.B., *Probabilistic engineering analysis using the NESSUS software*, Structural Safety, Vol. 28, Issue 1-2, 2006, pp. 83-107.

[160] Thoft-Christensen P., Baker M.J., *Structural Reliability Theory and its Applications*, Springer-Verlag, 1982.

[161] Timoshenko S.P., *Teoria stateczności sprężystej*. Arkady, Warszawa 1960.

[162] Tvedt L., *Distribution of quadratic forms in normal space-application to structural reliability*, J. Eng. Mech. ASCE, 116(6), 1990, pp. 1183-1197.

[163] Tvedt L., *Proban-probabilistic analysis*, Structural Safety, Vol. 28, Issue 1-2, 2006, pp. 150-163.

[164] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, nr 21, 1983, s. 3-23.

[165] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe*. T. 3, rozdz. 10, Arkady, Warszawa 1995.

[166] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., *Non-linear stability analysis of structures under multiple parameter loads*. Eng. Comput., Vol. 5, 1998, pp. 10-14.

[167] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M., *Finite element method and stability of structures*. Arkady, Warszawa 1990.

[168] Waszczyszyn Z., Marcinowski J., Kaliszuk J., *Analiza niezawodności dwuteowego dźwigara z geometrycznymi imperfekcjami środnika za pomocą metody Monte Carlo korzystając z MES i SSN*, Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i KN PZITB Krynica 2004, tom 2, Teoria konstrukcji, s. 229-236.

[169] Waszczyszyn Z., Pabisek E., *Hybrid NN/FEM analysis of the elastoplastic plane stress problem* Comp. Assisted Mech. Eng. Science, Vol. 9, No. 3, 1999.

[170] Waszczyszyn Z., Pabisek E., Kaliszuk J., *Analiza niezawodności płaskiej ramy stalowej metodą Monte Carlo a wykorzystaniem MES i SSN*, Konferencja Naukowa

Zagadnienia stanów granicznych konstrukcji stalowych, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2004, s. 291-300.

[171] Waszczyszyn Z., Ziemiański L., Neurocomputing In the analysis of selected inverse problem sof mechanics of structures and materials, Comput. Assis. Mech. Eng. Science, 13, 2006, pp. 125-159.

[172] Weiss S., Giżejowski M., *Stateczność konstrukcji metalowych,* Arkady, Warszawa 1991.

[173] Wempner G.A., *Discrete approximation related to nonlinear theories of solids*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 7, 1971, pp. 1581-1599.

[174] Wieczorek M., *Numeryczna analiza konstrukcji podatnych na wyboczenie*. Dodatek do biuletynu nr 11 (411) Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa 1986.

[175] Witkowski M., Gomuliński A., *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe*. T. 2, rozdz. 6. Arkady, Warszawa 1992.

[176] Woliński S., Wróbel K., *Niezawodność konstrukcji budowlanych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2001.

[177] Wu Y.T., Shin Y., Sues R.H., Cesare M.A., *Probabilistic function evaluation system (ProFES) for reliability-based design*, Structural Safety, Vol. 28, Issue 1-2, 2006, pp. 164-195.

[178] Zhang Y., Der Kiureghian A., *Finite element reliability methods for inelastic structures*. Report No. UCB/SEMM-97/05, Department of Civil & Enviromental Engineering, University of California, Berkeley, CA, 1997.

[179] Zhao Y.G., Ono T., *A general procedure for first/second order reliability method (FORM/SORM)*, Structural Safety, 21, 1999, pp .95-112.

[180] Zhao Y.G., Ono T., *New approximations for SORM*, Part 1 Journal of Engineering Mechanics, ASCE 125, 1999, pp. 79-85.

[181] Zhao Y.G., Ono T., *New approximations for SORM*, Part 2 Journal of Engineering Mechanics, ASCE 125, 1999, pp. 86-93.

[182] Zhou Z.L., Murray D.W., *An incremental solution technique for unstable equilibrium paths of shell structures*, Computer & Structures, Vol. 55, 1994, pp. 749-759.

[183] Ziegler H., *Principles of structural stability*, Blaisdell Publishing Company, 1968.

[184] Zieliński R., *Metody Monte Carlo*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1970.

Zastosowanie metody FORM w analizie niezawodności konstrukcji kratowych podatnych na przeskok

Streszczenie

W pracy rozważono możliwość zastosowania metody FORM w analizie niezawodności konstrukcji kratowych słabo wyniosłych podatnych na utratę stateczności poprzez przeskok węzła. Jako zmienne losowe przyjęto następujące parametry: sztywność osiową, mnożniki schematów obciążenia, współrzędne węzłów. W rozważanych zagadnieniach nie uwzględnia się jawnie czasu oraz wzajemnej korelacji przyjętych zmiennych losowych. Rozpatrywane są dwa typy warunków granicznych: warunek nieprzekroczenia dopuszczalnych przemieszczeń węzłów konstrukcji oraz warunek nieprzekroczenia dopuszczalnego mnożnika obciążenia.

W pracy za miarę niezawodności przyjęto wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda wyznaczany przy użyciu iteracyjnej procedury Rackwitza-Fiesslera. Dokładność wyników otrzymywanych przy zastosowania tego wskaźnika jest wystarczająca dla potrzeb praktycznych i dlatego też zyskał on dużą popularność jako miara niezawodności, szczególnie w połączeniu z metodami transformacji wykorzystującymi pełną informację o rozkładach zmiennych losowych.

Ważnym elementem pracy jest badanie wrażliwości wskaźnika niezawodności na zmiany charakterystyk probabilistycznych rozważanych zmiennych losowych, jak również sprawdzenie numerycznej efektywności metody FORM w porównaniu do innych metod niezawodności, tj. metody SORM, Monte Carlo, Importance Sampling.

Application method FORM in reliability analysis of node snapping truss structures

Summary

The present study considers the problems of stability and reliability of truss structures susceptible to stability loss from the condition of node snapping. In the reliability analysis of structures, uncertain parameters, such us load magnitudes, the axial stiffness of bars, coordinate nodes are represented by random variables. Random variables are not correlated. The criterion of structural failure is expressed by the condition of non exceeding the admissible load multiplier or displacement. In the current paper only the time independent component reliability analysis problems are considered. The Hasofer-Lind index in conjunction with transformation method in the FORM was used as a reliability measure.

The numerical aspects of application first order reliability method FORM in node snapping truss structures are very important element of paper. The number of the programme FEM runs and the number of iterations indicate that the proposed method provides accurate and computationally efficient estimation of the probability of failure. The study shows comparative analysis of the reliability index computations by method FORM, method SORM, method Importance Sampling, method Monte Carlo and estimate computation error. The interesting problem is evaluation of the reliability index sensitivity with respect of random variables, mean value, standard deviation.