

MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY

M113

Andrzej Zawadzki

**ANALIZA WYBRANYCH
LINIOWYCH OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH
Z ELEMENTAMI NIECAŁKOWITEGO RZĘDU**



Politechnika Świętokrzyska

Kielce 2019

MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY

M113

Andrzej Zawadzki

**ANALIZA WYBRANYCH
LINIOWYCH OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH
Z ELEMENTAMI NIECAŁKOWITEGO RZĘDU**

Kielce 2019

MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY NR M113

Redaktor Naukowy serii

AUTOMATYKA, ELEKTRONIKA I ELEKTROTECHNIKA

dr hab. inż. Jerzy AUGUSTYN, prof. PŚk

Recenzenci:

prof. dr hab. inż. Krzysztof LATAWIEC

dr hab. inż. Krzysztof SIWEK, prof. PW

Redakcja

Irena PRZEORSKA-IMIOŁEK

Projekt okładki

Tadeusz UBERMAN

© Copyright by Politechnika Świętokrzyska, Kielce 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część tej pracy nie może być powielana czy rozpowszechniana w jakiegokolwiek formie, w jakikolwiek sposób: elektroniczny bądź mechaniczny, włącznie z fotokopiowaniem, nagrywaniem na taśmy lub przy użyciu innych systemów, bez pisemnej zgody wydawcy.

PL ISSN 1897-2691

PL ISBN 978-83-65719-53-9

Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej
25-314 Kielce, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7

tel./fax 41 34 24 581

e-mail: wydawca@tu.kielce.pl

www.wydawnictwo.tu.kielce.pl

Spis treści

Wykaz ważniejszych oznaczeń	7
1. WSTĘP	9
1.1. Wprowadzenie	9
1.2. Cel i zakres pracy	11
2. ZARYS RACHUNEKU RÓŻNICZOWEGO I CAŁKOWEGO	
NIECAŁKOWITEGO RZĘDU	14
2.1. Wprowadzenie	14
2.2. Funkcje specjalne	15
2.2.1. Funkcja gamma Eulera	15
2.2.2. Funkcja Mittag-Lefflera	17
2.2.3. Funkcje hipergeometryczne	18
2.3. Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu.	
Podstawowe definicje	20
2.3.1. Definicja Riemanna-Liouville'a	21
2.3.2. Definicja Caputo	22
2.3.3. Definicja Grünwalda-Letnikowa	23
2.3.4. Pochodna Rieszsa	25
2.4. Metody opisu ciągłych układów dynamicznych niecałkowitego rzędu	25
2.4.1. Transformacja Laplace'a operatorów niecałkowitego rzędu	25
2.4.2. Transmitancja operatorowa	27
2.4.3. Opis za pomocą równań stanu	27
2.5. Wybrane metody aproksymacji w analizie układów niecałkowitego rzędu	29
2.5.1. Wprowadzenie	29
2.5.2. Metoda CFE (Continued fraction expansion)	31
2.5.3. Metoda Oustaloupa	33
3. FUNKCJE I SYGNAŁY W ASPEKTCIE POCHODNYCH NIECAŁKOWITEGO RZĘDU	34
3.1. Wprowadzenie	34
3.2. Pochodna niecałkowitego rzędu skoku jednostkowego	35
3.3. Pochodne niecałkowitego rzędu wymuszenia sinusoidalnego	39
3.3.1. Postać analityczna pochodnej Riemanna-Liouville'a	
wymuszenia sinusoidalnego	40
3.3.2. Postać analityczna pochodnej Caputo wymuszenia sinusoidalnego	44
3.4. Pochodna niecałkowitego rzędu funkcji wykładniczej	46
3.4.1. Postać analityczna pochodnej niecałkowitego rzędu wymuszenia	
wykładniczego	47
3.4.2. Pochodna niecałkowitego rzędu wektora wirującego	51

4. ELEMENTY NIECAŁKOWITEGO RZĘDU OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH	59
4.1. Wprowadzenie	59
4.2. Elementy niecałkowitego rzędu	60
4.3. Element uogólniony niecałkowitego rzędu obwodu elektrycznego	70
4.4. Modelowanie rzeczywistego elementu układem niecałkowitego rzędu	77
5. STANY NIEUSTALONE W OBWODACH ELEKTRYCZNYCH NIECAŁKOWITEGO RZĘDU	85
5.1. Stany nieustalone w układach zawierających elementy niecałkowitego rzędu typu L_α i C_α	85
5.1.1. Analityczne modelowanie stanów przejściowych w obwodzie elektrycznym zawierającym pojemność	86
5.1.2. Analityczne modelowanie stanów przejściowych w obwodzie elektrycznym zawierającym indukcyjność	89
5.2. Stany przejściowe w obwodach elektrycznych zawierających element niecałkowitego rzędu	94
5.2.1. Wyznaczenie transformaty odwrotnej prądu wzbudzenia turbogeneratora	106
5.3. Stan nieustalony w obwodzie $RL_\alpha C_\alpha$ niecałkowitego rzędu	108
5.3.1. Przypadek aperiodyczny	112
5.3.2. Przypadek oscylacyjny	115
6. CZWÓRNIKI ELEKTRYCZNE Z ELEMENTAMI NIECAŁKOWITEGO RZĘDU	120
6.1. Wprowadzenie	120
6.2. Czwórnik symetryczny z elementami niecałkowitego rzędu – własności i wybrane parametry	122
6.3. Opis falowy czwórnika elektrycznych z elementami niecałkowitego rzędu	126
6.3.1. Impedancja charakterystyczna czwórnika z elementami niecałkowitego rzędu	130
6.3.2. Współczynnik przenoszenia czwórnika symetrycznych z elementami niecałkowitego rzędu	141
7. FILTRY ELEKTRYCZNE	150
7.1. Wprowadzenie	150
7.2. Dolnoprzepustowy filtr reaktancyjny z elementem niecałkowitego rzędu	151
7.3. Górnoprzepustowy filtr reaktancyjny z elementem niecałkowitego rzędu	156
7.4. Pasmowe filtry reaktancyjne z elementem niecałkowitego rzędu	160
7.4.1. Filtr środkowoprzepustowy	161
7.4.2. Filtr środkowozaporowy	168

8. LINIA DŁUGA W UJĘCIU RACHUNKU NIECAŁKOWITEGO RZĘDU	173
8.1. Wprowadzenie	173
8.2. Równania telegrafistów niecałkowitego rzędu	176
8.3. Analityczne rozwiązanie klasycznego równania telegrafistów metodą separacji zmiennych	180
8.4. Analityczne rozwiązanie równania telegrafistów niecałkowitego rzędu metodą separacji zmiennych	185
8.4.1. Równania telegrafistów niecałkowitego rzędu linii bezstratnej względem odległości	185
8.4.2. Równania telegrafistów niecałkowitego rzędu linii bezstratnej względem czasu	188
8.4.3. Równania telegrafistów niecałkowitego rzędu linii bezstratnej względem czasu i odległości	191
9. PODSUMOWANIE	193
Bibliografia	196
Streszczenie	207
Summary	209

Bibliografia

- [1] Abbisso A., Caponetto R., Fortuna L., and Porto D. Non-integerorder integration by using neural networks. in Proc. Int. Symp. Circuits Syst, vol. 38, pp. 688–691, 2001.
- [2] Abramowitz M. and Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards. Applied Math. Series #55. Dover Publications, 1965.
- [3] Agrawal O.P., Machado J.A.T. and Sabatier J. Special Issue on Fractional Derivatives and Their Applications. Nonlinear Dynamics, vol. 38, nos. 1-4, December 2004.
- [4] Aguilar Gomez J.F. Behaviour characteristics of a capresistor, memcapacitor, and a memristor from the response obtained of RC and RL electrical circuits described by fractional differential equations. Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences, vol. 24, pp. 1421–1433, 2016.
- [5] Aguilar Gomez J.F. Bernal J. Rosales L. Cordova T. Modeling and simulation of Equivalent Circuits in Description of Biological Systems - A Fractional Calculus Approach. Journal of Electrical Bioimpedance, vol. 3, pp. 2–11 2012. DOI: 10.5617/jeb.225.
- [6] Annaby M. H., Mansour Z.S. *q*-Fractional Calculus and Equations. Heidelberg, Springer, Berlin 2012.
- [7] Aslam M.S., Raja M.A.Z. A new adaptive strategy to improve online secondary path modeling in active noise control systems using fractional signal processing approach. Signal Processing, Volume 107, pp. 433-443, February 2015.
- [8] Bai Z., Lü H. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. J. Math. Anal. Appl. 311, pp. 495–505, 2005.
- [9] Benkhettou N., Brito A.M.C. da Cruz, Delfim F.M. Torres. A fractional calculus on arbitrary time scales: Fractional differentiation and fractional integration, Signal Processing 107, pp. 230-237, 2015.
- [10] Biswas K., Sen S. and Dutta P. Realization of a constant phase element and its performance study in a differentiator circuits. IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs, vol. 53, pp. 802–806, 2006.
- [11] Biswas K., Sen S., Dutta P.K. Realization of a constant phase element and its performance study in a differentiator circuit. Sens. Actuators A: Phys. 120(1), 115, 2005
- [12] Bohannan G. W., Hurst S. K. and Springler L. Electrical Component with Fractional-Order Impedance. US20060267595, 11 30, Utility Patent Application, 2006.
- [13] Bouafoura M.K., Moussi O., Braiek N.B. A fractional state space realization method with block pulse basis. Signal Process. 91(3), pp. 492–497, 2011. doi:10.1016/j.sigpro.2010.04.010.
- [14] Buller S., Karden E., Kok D., De Doncker R.W. Modeling the Dynamic Behavior of Supercapacitors Using Impedance Spectroscopy. IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 38 (6), pp. 1622–1626, 2002.
- [15] Burnecki K., Weron A. Fractional Lévy stable motion can model subdiffusive dynamics. Phys. Rev. E, 82:021130, 2010.

- [16] Busłowicz M. Wybrane zagadnienia z zakresu liniowych ciągłych układów niecałkowitego rzędu. *Pomiary Automatyka Robotyka*, pp. 93-114, 2/2010.
- [17] Caputo M. and Mainardi F. Linear models of dissipation in anelastic solids. *Rivista del Nuovo Cimento*, 1, pp. 161–198, 1971.
- [18] Caputo M., Linear Models of Dissipation Whose Q Is Almost Frequency Independent-II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Vol. 13, No. 5, pp. 529-539, 1967. doi:10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x
- [19] Carlson G. and Halijak C. Approximation of fractional capacitors $(1/s)$ by a regular Newton process. *IEEE Trans. Circuits Syst*, vol. CAS-11, pp. 210–213, 1964.
- [20] Carlson G., Halijak C. Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular newton process. *IEEE Trans. Circuit Theory* 11(2), pp. 210–213, 1964.
- [21] Chen Y., Vinagre B.M., Podlubny I. Continued fraction expansion approaches to discretizing fractional order derivatives-an expository review. *Nonlinear Dyn.* 38(1), pp. 155–170, 2004. doi:10.1007/s11071-004-3752-x
- [22] Chua L.O. and Sung M.K. Memristive devices and systems. *Proceedings of the IEEE*, vol. 64 (2), pp. 209–223, 1976.
- [23] Chua L., Kang S. Proc. "Memristive devices and systems". *IEEE* 64(2), pp. 209-223, 1976. DOI: 10.1109/PROC.1976.10092
- [24] Chua, L. Memristor-The Missing Circuit Element. *IEEE Trans. Circuit Theory* 18(5), pp. 507–519, 1971.
- [25] Cisse Haba T., Loum G.L., Zoueu J.T., Ablart G. Modeling and dynamics analysis of the fractional-order Buck—Boost converter in continuous conduction mode. *J. Appl. Sci.* 8, 59 (2008)
- [26] Coopmans C., Petras I. Analogue fractional-order generalized memristive devices. *Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2009*.
- [27] Das S. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer, Berlin 2008.
- [28] Debnath L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003, vol. 54, pp. 3413–3442.
- [29] Debnath L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 54, pp. 3413–3442, 2003.
- [30] Dzieliński A., Sarwas G., Sierociuk D. Comparison and Validation of Integer and Fractional Order Ultracapacitor Models. *Advances in Difference Equations*, Springer Open Journal, June, 2011. doi: 10.1186/1687-1847-2011-11.
- [31] Dzieliński A., Sierociuk D. Ultracapacitor modelling and control using discrete fractional order state-space model. *Acta Montanistica Slovacia*, vol. 13, no. 1, pp. 136–145, 2006.
- [32] Dzieliński A., Sierociuk D., and Sarwas G. Some applications of fractional order calculus. *Bulletin of the Polish academy of sciences. Technical sciences*, Vol. 58, No. 4, 2010. DOI: 10.2478/v10175-010-0059-6.

- [33] Dzieliński A., Sierociuk D., and Sarwas G. Some applications of fractional order calculus. *Bulletin Of The Polish Academy Of Sciences. Technical Sciences.* Vol. 58, No. 4, 2010. DOI: 10.2478/v10175-010-0059-6.
- [34] Elwakil A.S. Fractional-order circuits and systems: an emerging interdisciplinary research area. *IEEE Circuits Syst. Mag.* 10(4), pp. 40–50 (2010).
- [35] Elwakil A.S. Fractional-Order Circuits and Systems: An Emerging Interdisciplinary Research Area. *IEEE Circuits Syst. Mag.* 10, pp. 40–50, 2010.
- [36] Fouda M.E., Radwan G. On the fractional-order memristor model. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol. 4(1), pp. 1–7, Jan. 2013. ISSN: 2090-5858.
- [37] Fouda M.E and Radwan A.G. Fractional-order memristor Response under DC and Periodic Signals, *Circuits Syst. Signal Processing*, vol. 34, pp. 961–970, 2015. DOI 10.1007/s00034- 014-9886-2.
- [38] Fouda M.E and Radwan A.G.: Fractional-order memristor Response under DC and Periodic Signals, *Circuits Syst. Signal Processing*, vol. 34, pp. 961–970, 2015. Doi:10.1007/s00034-014-9886-2.
- [39] Freeborn T.J., Maundy B., Elwakil A.S. Measurement of Supercapacitor Fractional-Order Model. Parameters From Voltage-Excited. Step Response. *IEEE journal on emerging and selected topics in circuits and systems*, Vol. 3, No. 3, 2013.
- [40] Freeborn T. J., Maundy B., Elwakil A. S. Measurement of Supercapacitor Fractional-Order Model Parameters From Voltage-Excited Step Response *IEEE Journal On Emerging And Selected Topics In Circuits And Systems.* Vol. 3, No. 3, pp.367-378, 2013.
- [41] Freeborn T.J., Maundy B., Elwakil A.S. Fractional Resonance-Based $RL\beta C\alpha$ Filters. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 726721, 10 pages, 2013. doi:10.1155/2013/726721.
- [42] Gorenflo R., Kilbas A.A. and Rogosin S.V. On the generalized Mittag-Leffler type functions, *Integral Transform. Spec. Funct.*, 7, pp. 215–224, 1998.
- [43] Gualous H., Bouquain D., Berthon A., Kaufmann J.M.: Experimental Study of Supercapacitor Serial Resistance and Capacitance Variations With Temperature. *Journal of Power Sources*, Vol. 123, pp. 86–93, 2003.
- [44] Gupta M., Varshney P., Visweswaran G.S. Digital fractional-order differentiator and integrator models based on first-order and higher order operators. *Int. J.Circuit Theory Appl.* 39(5), pp. 461–474, 2011. doi:10.1002/cta.650
- [45] Harris J.W., Stocker H.: *Handbook Mathematics and Computational Science*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [46] Jakubowska A. and Walczak J. Analysis of the Transient State in a Series Circuit of the Class $RL\beta C\alpha$. *Circuits Syst. Signal Process* vol.35, pp. 1831–1853, DOI 10.1007.s00034- 016-0270-2.
- [47] Jakubowska-Ciszek A. Analiza układów liniowych ułamkowego rzędu. *Rozprawa doktorska. Wydział Elektryczny Politechniki Śląskiej. Gliwice 2017.*
- [48] Jalloul A., Jelassi K., Melchior R. and Trigeassou J-C. Fractional modelling of rotor skin effect in induction machines, *Proceedings of thje FDA'10. The 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications. Badajoz, Spain October.*

- 18-20 (Eds: I. Podlubny, B.M. Vinagre Jara, YQ. Chen, V.Feliu Battle, I. Tejado Balsera). ISBN 9788055304878.
- [49] Jalloul A., Jelassi K., Melchior R. and Trigeassou J-C.: Fractional modelling of rotor skin effect in induction machines, Proceedings of thje FDA'10. The 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications. Badajoz, Spain October 18-20 (Eds: I.Podlubny, B.M. Vinagre Jara, YQ. Chen, V.Feliu Battle, I. Tejado Balsera). ISBN 9788055304878.
- [50] Jesus I.S., Machado J.A.T. Development of fractional order capacitors based on electrolyte processes. *Nonlinear Dynamics*, vol. 56, pp. 45–55, 2009.
- [51] Jesus I.S. and Machado J.T.M. Application of Integer and Fractional Models in Electrochemical Systems. *Mathematical Problems in Engineering* Hindawi Publishing Corporation, 2102/ ID 248175, DOI: 10.1155/2012/248175.
- [52] Jesus I.S., Machado J.T. Development of fractional order capacitors based on electrolyte processes. *Nonlinear Dyn.* 56(1–2), 45, 2009.
- [53] Jun Shi, Xiaoping Liu, Naitong Zhang. On uncertainty principle for signal concentrations with fractional Fourier transform. *Signal Processing*, Volume 92, Issue 12, pp. 2830–2836, December 2012.
- [54] Kaczorek T. Fractional positive continuous-time linear systems and their reachability. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, vol. 18, no. 2, pp. 223–228, 2008.
- [55] Kaczorek T. Fractional positive linear system and electrical circuits. *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 9/2008, pp. 135–1412, 2008.
- [56] Kaczorek T. *Positive ID and 2D Systems*. Springer Verlag, London, 2002.
- [57] Kaczorek T. *Selected problems of fractional systems theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011.
- [58] Kaczorek T. *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009.
- [59] Kaczorek T., *Analiza liniowych obwodów elektrycznych niecałkowitego rzędu w stanie nieustalonym*. *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 6, s. 191–195, 2010.
- [60] Kaczorek T., Rogowski K. *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej. Białystok, 2014.
- [61] Kepten E., Bronshtein I., Garini Y. Ergodicity convergence test suggests telomere motion obeys fractional dynamics. *Phys. Rev. E*, 83: 041919, 2011.
- [62] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier (2006).
- [63] Kirar Vishnu Pratap Singh. Memristor: The Missing Circuit Element and its Application. *International Scholarly and Scientific Research & Innovation* 6(12), 2012.
- [64] Kiryakova V. *Generalized Fractional Calculus and Applications*. Longman – Harlow and J. Wiley & Sons. N. York (1994)
- [65] Korohoda P. Pośredni pomiar bioimpedancji kończyn i tułowia człowieka. *Automatyka*. tom 12, zeszyt 3, 2008.
- [66] Kosztołowicz T. *Zastosowanie równań różniczkowych z pochodnymi ułamkowymi do opisu subdyfuzji*. Wydawnictwo Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego Jana Kochanowskiego, Kielce 2008.

- [67] Krishna B.T. Studies on fractional order differentiators and integrators: A survey. *Signal Processing*, Volume 91, Issue 3, pp. 386–426, March 2011.
- [68] Latawiec K.J., Stanisławski R., Łukaniszyn M., Czuczvara W. and Rydel M. Fractional-order modeling of electric circuits: modern empiricism vs. classical science. *Progress in Applied Engineering (PAEE)*, Kościelisko, 2017, pp. 1–4. doi: 10.1109/PAEE.2017.8008998.
- [69] Liu D.Y., Tian Y., Boutat D., Laleg-Kirati T.M. An algebraic fractional order differentiator for a class of signals satisfying a linear differential equation. *Signal Processing*, Volume 116, pp. 78–90, November 2015.
- [70] Lo A.W. Fat tails, long memory, and the stock market since the 1960s. *Economic Notes*, 26: pp. 219–252, 2001.
- [71] Machado J.A.T., Silva M.F., Barbosa R.S., Jesus I.S., Reis C.M., Marcos M.G., Galhano A.F. Some applications of fractional calculus in engineering. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010.
- [72] Machado J.A.T., Silva M.F., Barbosa R.S., Jesus I.S., Reis C.M., Marcos M.G., Galhano A.F. Some applications of fractional calculus in engineering. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, ID 639801.
- [73] Machado J.A.T. *Fractional Calculus: Models, Algorithms, Technology. Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, 4(4), 2015.
- [74] Magdziarz M., Weron A., Burnecki K., Klafter J.. Fractional Brownian motion versus the continuous-time random walk. A simple test for subdiffusive dynamics. *Phys Rev. Lett.*, 103:180602, 2009.
- [75] Magin R., Ortigueira M.D., Podlubny I., Trujillo J. On the fractional signals and systems. *Signal Processing*, Volume 91, Issue 3, pp. 350–371, March 2011.
- [76] Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*, London, Imperial College Press, 2010.
- [77] Martin R. Modeling Electrochemical Double Layer Capacitor, from Classical to Fractional Impedance. The 14th Mediterranean Electrotechnical Conf., Ajaccio, pp. 61-66, 2008.
- [78] Martin R., Quintana J.J., Ramos A., and de la Nuez I. Modeling electrochemical double layer capacitor, from classical to fractional impedance. Conference Paper in *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 3(2): pp. 61-66, June 2008.
- [79] Marushchak Y., Kopchak B. Analiza modeli całkowania i różniczkowania ułamkowego. *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej* 292, *Elektrotechnika* 34 RUTJEE, z. 34 (2/2015), s. 213–222, 2015.
- [80] Matsuda K., Fujii H. H1-optimized wave-absorbing control: analytical and experimental results, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*16(6), pp. 1146–1153, 1993.
- [81] Maundy B., Elwakil A.S., and Freeborn T.J. On the practical realization of higher-order filters with fractional stepping. *Signal Processing*, vol. 91, pp. 484–491, 2011.
- [82] Maundy B., Elwakil A.S., Freeborn T.J. On the practical realization of higher-order filters with fractional stepping. *Signal Process.* 91(3), pp. 484–491 (2011). doi:10.1016/j.sigpro.2010.06.018.
- [83] McLachlan N.,W. *Bessel Functions for Engineers*. Clarendon Press, Oxford, 1955.

- [84] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion. A fractional dynamics approach. *Phys. Rep.*, 339: pp. 1–77, 2000.
- [85] Miller K.S. Derivatives of Noninteger Order. *Mathematics Magazine*, Volume 68, Issue 3, 1995.
- [86] Miller K.S. and Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [87] Mitkowski W. and Skruch P. Fractional-order models of the supercapacitors in the form of RC ladder networks, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, vol. 61, No. 3, s. 581–587. DOI: 10.2478/bpasts-2013-0059.
- [88] Mitkowski W. Approximation of Fractional Diffusion-Wave Equation. *Acta Mechanica et Automatica*, 5(2), pp. 65–68, 2011.
- [89] Monje C.A., Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue, D., Feliu, V. *Fractional-Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*. Springer, Heidelberg, 2010.
- [90] Morales M.A., Lainez R. Mathematical modelling of fractional order circuits. arXiv:1602.03541v1 [physics.class-ph] 21 Jan 2016.
- [91] Morales M.A., Lainez R. Mathematical modelling of fractional order circuits. arXiv:1602.03541v1 [physics.class-ph] 21 Jan 2016.
- [92] Moshre-Torbati M, Hammond JK. Physical and geometrical interpretation of fractional operators. *J Franklin I*; 335: 1077-1086, 1998.
- [93] Munkhammar J. *Fractional Calculus and the Taylor-Riemann series*, RHIT U. J. Math. 2005.
- [94] Nadolski R., Staszak J. Analysis of the field current after three-phase sudden short-circuit of turbogenerators using equivalent circuits. *Electrical Engineering* 78, pp. 399-406, 1995.
- [95] Oldham K.B., Spanier J. *The Fractional Calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Mathematics in Science and Engineering, V, Academic Press. N. York (1974).
- [96] Orsingher E., Beghin L. Time-fractional telegraph equations and telegraph processes with Brownian time. *Probab. Theory Relat. Fields* 128, pp. 141–160, 2004.
- [97] Orsingher E., Zhao X. The space-fractional telegraph equations and The related fractional telegraph processes. *Chin. Ann. Math.* 24B:1 pp. 45–56, 2003.
- [98] Ortigueira, M.D. *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*. Springer, Dordrecht 2011.
- [99] Osowski J., Szabatin J. *Podstawy teorii obwodów*, tom III, WNT, Warszawa, 1995.
- [100] Osowski J.: *Zarys rachunku operatorowego teoria i zastosowanie w elektrotechnice*. WNT, Warszawa 1965.
- [101] Ostalczyk P. Jednak: “Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitych rzędów”. Riposta na artykuł Ryszarda Sikory pt.: “Pochodne ułamkowe w teorii obwodów elektrycznych Uwagi krytyczne. *Przegląd Elektrotechniczny*, R.92, Nr 10/2016”. *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)*, ISSN 0033-2097 R.93 NR 3/2017, s. 175–180. doi:10.15199/48.2017.03.41.
- [102] Ostalczyk P. *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2008.

- [103] Oustaloup A. Fractional order sinusoidal oscillators: optimization and their use in highly linear modulation, *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS-28* (10), pp. 10–19, 1981.
- [104] Oustaloup A. *La Derivation Non Entiere*, Hermes, Paris, 1995.
- [105] Oustaloup A., Levron F., Mathieu B., Nanot F.M. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis. *IEEE Trans. Circuits Syst. I Fundam. Theory Appl.* 47(1), pp. 25–39, 2000.
- [106] Oustaloup A., Levron F., Nanot F. and Mathieu B. Frequency band complex non integer differentiator: Characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(1): pp. 25–40, 2000.
- [107] Pandey A., Allos F., Hu A.P., Budgett D. Integration of supercapacitors into wirelessly charged biomedical sensors, 2011 6th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, vols. 56–61, 2011.
- [108] Paszkowski S. *Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*, PWN, Warszawa 1975.
- [109] Peng C.K., Mietus J., Hausdorff J., Havlin S., Stanley H., Goldberger A. Longrange anticorrelations and non-Gaussian behavior of the heartbeat. *Phys. Rev. Lett.*, 70: pp. 1343–1346, 1993.
- [110] Petras I. Fractional-order feedback control of a DC motor. *Journal of electrical engineering*, vol. 60, no. 3, pp. 117–128, 2009.
- [111] Petras I. *Fractional-Order. Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation*. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [112] Pintelon R., Schoukens J., Pauwels L. Van Gheem Els: *Diffusion Systems: Stability, Modeling and Identification*. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 54, no. 5, pp. 2061–2067, 2005.
- [113] Podlubny I. *Fractional Calculus: Methods for Applications*. XXXVII Summer school on mathematical physics Ravello, Italy, september 17-29, 2012.
- [114] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego 1999.
- [115] Podlubny I. *Fractional order systems and fractional order controllers*. The Academy of Sciences Institute of Experimental Physics, Kosice, Slovak Republic, 1994.
- [116] Podlubny I., *Fractional Differential Equations (An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and some of Their Applications)*. Academic Press, San Diego (1999).
- [117] Proc. of Tutorial Workshop 2 of IEEE CDC'02: Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics, 2002, Las Vegas. Materiały dostępne pod adresem http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/cdc02_tw2_in.pdf .
- [118] Psychalinos C., Tsirimokou G., Elwakil A.S *Switched-Capacitor Fractional-Step Butterworth Filter Design*. *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 35, No. 4, pp. 1377-1393, 2015.
- [119] Quintana J.J., Ramos A., Nuez I. Identification of the fractional impedance of ultracapacitors. Proc. of 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (IFAC FDA'06), Porto, Portugal, 2006.

- [120] Rachid M., Maamar B., Said D. Comparison between two approximation methods of state space fractional systems. *Signal Process.* 91(3), pp. 461–469, 2011. doi:10.1016/j.sigpro.2010.03.006.
- [121] Radwan A.G., Fouda ME. *On the Mathematical Modeling of Memristor, Memcapacitor, and Meminductor.* Springer International Publishing Switzerland, 2015.
- [122] Radwan A., Elwakil A., Soliman A. On the generalization of second-order filters to the fractional-order domain. *J. Circuit Syst. Comp.* 18, pp. 361–286, 2009.
- [123] RetiVere N., Ivanes M. Modeling of electric machines by implicit derivative half-order systems, *IEEE Power Eng. Rev.* 18 (9), pp. 62–64, 1998.
- [124] Reyes-Melo M. E., Martinez-Vega J. J., Guerrero-Salazar C. A., Ortiz-Mendez U. Modeling of relaxation phenomena in organic dielectric materials, applications of differential and integral operators of fractional order. *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*, vol. 6, no. 3, pp. 1037–1043, 2004.
- [125] Robinson P.M. *Time Series with Long Memory.* Oxford University Press, 2003.
- [126] Różowicz S., Zawadzki A. Input-output transformation using the feedback of nonlinear electrical circuits. Algorithms and linearization examples. *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2018 (1-4), 2018, ISSN 1024-123X, doi: 10.1155/2018/9405256.
- [127] Różowicz S., Zawadzki A. The use of differential geometry methods for linearization of nonlinear electrical circuits with multiple-inputs and multiple-outputs (MIMO), *Electrical Engineering*. Vol.100(4), 2018, pp.2815-2824, ISSN 0948-7921, doi: 10.1007/s00202-018-0746-0.
- [128] Ryżyk I.M., Gradsztejn I.S. *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, PWN Warszawa 1964.
- [129] Sabatier J., Agrawal O.P., Machado J.A.T. *Advances in Fractional Calculus. Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering.* Springer, London 2007.
- [130] Sabatier J., Agrawal O. P., Machado J. A. T. *Advances in Fractional Calculus, Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering.* Springer, London 2007.
- [131] Saito K. and Sugi M. Simulation of power-law relaxations by analog circuits: Fractal distribution of relaxation times and non-integer exponents. *IEICE Trans. Fundam. Electron. Commun. Comput. Sci.*, vol. E76, no. 2, pp. 205–209, 1993.
- [132] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *The Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications.* Gordon and Breach, Amsterdam (1993).
- [133] Sarwas G. Modelowanie superkondensatorów przy użyciu rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu, *Prace Instytutu Elektrotechniki, Zeszyt 239*, s. 17–28, 2008.
- [134] Sierociuk D. Estymacja i sterowanie dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu. *Rozprawa doktorska*, Wydział Elektryczny Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007.
- [135] Sikora R. Pochodne ułamkowe w teorii obwodów elektrycznych. Uwagi krytyczne. *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)*, ISSN 0033-2097, R. 92 NR 10/2016, s. 274-276, 2016. doi:10.15199/48.2016.10.62.

- [136] Soltan A., Radwan A.G. and Soliman A.M. Fractional-order mutual inductance: analysis and design, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, Vol. 44, pp. 85–97, 2016.
- [137] Stanislawski R. and Latawiec K.J. Stability analysis for discrete-time fractional-order LTI state-space systems. Part I: New necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, Vol. 61, No. 2, pp. 353-361. 2013, DOI: 10.2478/bpasts-2013-0034. Part II: New stability criterion for FD-based systems. Vol. 61, No. 2, pp. 363-370. 2013. DOI: 10.2478/bpasts-2013-0035.
- [138] Stanislawski R., Latawiec K.J., Łukaniszyn M. A Comparative Analysis of Laguerre-Based Approximators to the Grunwald-Letnikov Fractional-Order Difference. *Mathematical Problems in Engineering* pp. 1-10, 2015. doi: 10.1155/2015/512104.
- [139] Tang C., You F., Cheng G., Gao D., Fu F., and Dong X. Modeling the frequency dependence of the electrical properties of the live human skull. *Physiol. Meas.*, vol. 30, pp. 1293–1301, 2009.
- [140] Tavazoei M.S. Reduction of oscillations via fractional order pre-filtering. *Signal Processing*, Volume 107, pp. 407–414, February 2015.
- [141] Tripathy M.C. and Behera S. Modelling and Analysis of Fractional Capacitors. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, vol. 2, Issue 10, pp. 29–32, 2015. ISSN: 2394-3661.
- [142] Tripathy M.Ch., Mondal D., Biswak K., Sen S. Experimental Studies on Realization of Fractional Inductors and Fractional-Order Bandpass Filters. *International Journal on Circuit Theory and Application*, no. 43, pp. 1183–1196, 2015.
- [143] Tripathy M.Ch., Mondal D., Biswak K., Sen S. Experimental Studies on Realization of Fractional Inductors and Fractional-Order Bandpass Filters. *International Journal on Circuit Theory and Application*, no. 43, pp. 1183–1196, 2015.
- [144] Trzaska Z. Fractional-order systems: their properties and applications. *Elektronika* 10, pp. 137–144, 2008.
- [145] Tseng Chien-Cheng, Lee Su-Ling. Design of linear phase FIR filters using fractional derivative constraints. *Signal Processing*, Volume 92, Issue 5, pp. 1317–1327, 2012.
- [146] Tsirimokou G., Psychalinos C., Elwakil A.S. Fractional-Order Electronically Controlled Generalized Filters. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2016. doi: 10.1002/cta.2250.
- [147] Tsirimokou G., Psychalinos C., Elwakil A.S., and Allagui A, Simple Non-Impedance Based Measuring Technique for Supercapacitors. *Electronics Letters*, vol. 51, no. 21, pp. 1699–1701, 2015.
- [148] Valerio D. Fractional Robust Systems Control. PhD Dissertation, Technical University of Lisbona, 2005.
- [149] Vinagre B.M. and Feli V. Optimal Fractional Controllers for Rational Order Systems: A Special Case of the Wiener-Hopf Spectral Factorization Method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.52, no.12, pp. 2385–2389, December 2007.
- [150] Vinagre B.M., Monje C.A., and Calderón A.J. Fractional order systems and fractional order control actions. In Lecture 3 of the IEEE CDC02 TW#2: Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics, 2002.

- [151] Visweswaran G.S., Varshney P., Gupta M. New approach to realize fractional power in domain at low frequency. *IEEE Trans. Circuits Syst. II Express Br.* 58(3), pp. 179–183, 2011.
- [152] Westerlund S. and Ekstam S. Capacitor theory. *IEEE Trans. On Dielectrics and Electrical Insulation*, vol. 1, no. 5, pp. 826–839, 1994.
- [153] Westerlund S. *Dead Matter Has Memory!* Kalmar, Sweden: Causal Consulting, 2002.
- [154] Westerlund S., Ekstam L. Capacitor theory. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 1, 1994]
- [155] Włodarczyk M. Uwagi na temat jednostek elementów ułamkowego rzędu. XXXIX Konferencja Elektrotechniki I Teorii Obwodów. SPETO 2016, s. 55–56, 2016.
- [156] Włodarczyk M., Zawadzki A. Algorytmy obliczeń pochodnych niecałkowitego rzędu funkcji jednostkowej. *Informatyka w dobie XXI wieku. Technologie informatyczne w nauce, technice i edukacji.* Wyd. Naukowe Instytutu Technologii Eksploatacyjnej – Państwowego Instytutu Badawczego, s. 87–90, Radom 2009.
- [157] Włodarczyk M., Zawadzki A. Connecting a Capacitor to Direct Voltage in Aspect of Fractional Degree Derivatives. *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)*, R. 85 s. 120–122, NR 10/2009.
- [158] Włodarczyk M., Zawadzki A. Modelowanie rzeczywistych impulsów prostokątnych z zastosowaniem pochodnych ułamkowego rzędu. *Informatyka w dobie XXI wieku. Technologie informatyczne i ich zastosowania.* Wyd. Naukowe Instytutu Technologii Eksploatacyjnej – Państwowego Instytutu Badawczego, s. 313–321, Radom 2010.
- [159] Włodarczyk M., Zawadzki A. The application of hypergeometric functions to computing fractional order derivatives of sinusoidal functions. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, Vol. 64, No. 1, pp. 243-248, 2016. ISSN: 0239-7528. DOI: 10.1515/bpasts-2016-0026.
- [160] Włodarczyk M., Zawadzki A, Różowicz S. Fractional models of selected combustion engine ignitron systems. *Przegląd Elektrotechniczny; R92*, Vol 4/2016, str.: 30-33, 2016. doi:10.15199/48.2016.04.08
- [161] Yang Q. *Novel analytical and numerical methods for solving fractional dynamical systems.* Praca doktorska, Queensland University of Technology, 2002.
- [162] Zawadzki A., Różowicz S. Application of input–state of the system transformation for linearization of selected electrical circuits. *Journal of Electrical Engineering.* Tom: 67/3, pp. 199–205, 2016. ISSN: 1335-3632.
- [163] Zawadzki A., Włodarczyk M. Modelowanie procesów ładowania i rozładowania superkondensatora. *Pomiary Automatyka Kontrola*, vol. 56, nr 1/2010.
- [164] Zawadzki A. Analiza porównawcza metod wyznaczania transformacji linearyzujących nieliniowe równania stanu układu. *Przegląd Elektrotechniczny NR 4/2014*, s. 28–33, 2014.
- [165] Zawadzki A. Analysis of transient processes in energy storing circuits using fractional derivatives. XXXV Międzynarodowa Konferencja z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów IC-SPETO 2012, pp. 125–126, 2012.
- [166] Zawadzki A. Application of local coordinates rectification in linearization of selected parameters of dynamic nonlinear systems. *COMPEL - The International Journal for*

- Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering. 33/5, pp. 1819–1830, 2014. ISSN: 0332-1649.
- [167] Zawadzki A. Zastosowanie pochodnych niecałkowitego rzędu do modelowania stanów przejściowych w obwodach elektrycznych zawierających indukcyjność. *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)*, Tom: 89, Zeszyt: 4, s. 92–94, 2013.
- [168] Zawadzki A., Różowicz S. Application of Input–State of the System Transformation for Linearization of Some Nonlinear Generators. *International Journal of Control, Automation, and Systems* 13/3, pp. 626–633, 2015. ISSN: 1598-6446.
- [169] Zawadzki A., Włodarczyk M. Analiza jakości aproksymacji odwrotnej transformaty Laplace’a ułamkowego rzędu metodą CFE. XXXVIII Międzynarodowa Konferencja z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów IC-SPETO 2015, s. 45–46, 2015.
- [170] Zawadzki A., Włodarczyk M. Numeryczne metody obliczania pochodnych niecałkowitego rzędu funkcji sinusoidalnych. *Nauka, technika, edukacja a nowoczesne technologie informatyczne*, Wydawnictwo Naukowe Instytutu Technologii Eksploatacji - Państwowego Instytutu Badawczego, s. 194–205, Radom 2011.
- [171] Zawadzki A., Włodarczyk M. Zastosowanie rachunku ułamkowego rzędu do modelowania pewnej klasy generatorów nieliniowych. *Prace naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka*. Zeszyt 1, s. 65–73, 2014.
- [172] Zhang S.Q. The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation, *J. Math. Anal. Appl.* 252, pp. 804–812, 2000.

ANALIZA WYBRANYCH LINIOWYCH OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH Z ELEMENTAMI NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

Streszczenie

Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu (*Fractional Calculus*), rozwijany intensywnie od strony aparatu matematycznego, znalazł jak dotąd nie-liczne zastosowania w elektrotechnice, a głównie w teorii obwodów elektrycznych. Klasyczne podejście do analizy układów elektrycznych i ich modelowania zwykle pomija efekty wynikające z nieidealności elementów (stratność, nieliniowość, niejednorodność). Ten fakt jak i też pojawienie się nowych elementów i urządzeń elektrotechnicznych: superkondensatorów, rezystorów z pamięcią, nazywanych „memrystorami”, czy cewek indukcyjnych z efektem wypierania prądu (ang. Inductance with a skin effect), stały się przyczyną wprowadzenia elementów niecałkowitego rzędu jako pewnego uogólnienia elementów klasycznych. Mimo że narzędzia stosowane w analizie są bardziej zaangażowane matematycznie i bardziej skomplikowane, niż w realizacji klasycznej, to jednak zastępowanie tradycyjnych modeli obwodowych przez modele wywodzące się z rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu prowadzi do wierniejszego opisu rzeczywistych elementów. Zastosowanie rachunku niecałkowitego rzędu otworzyło nowy obszar zastosowań dający możliwości przybliżenia elementów rzeczywistych w stopniu, który nie był możliwy do osiągnięcia w przypadku podejścia klasycznego.

W pracy przedstawiono analizę wybranych liniowych obwodów elektrycznych z elementami niecałkowitego rzędu. W wyniku przeprowadzonych studiów literaturowych dokonano wyboru pojęć niezbędnych do analizy wybranych układów elektrycznych. Zamieszczono definicje podstawowych pochodnych niecałkowitego rzędu, funkcji specjalnych (gammy Eulera $\Gamma(x)$, Mittag-Lefflera) oraz hipergeometrycznych (Lommel'a i Whittakera) stosowanych do wyznaczania analitycznych postaci pochodnych niecałkowitego rzędu. Omówiono metody opisu ciągłych układów dynamicznych niecałkowitego rzędu oraz aproksymacji operatora różniczkowania niecałkowitego rzędu, tj. metodę CFE (*Continued Fraction Expansion*) i metodę Oustaloupa. Metody te posłużyły do sformułowania transformat Laplace'a w postaci wielomianów rzędów całkowitych wykorzystanych między innymi do analizy stanów nieustalonych. Wyznaczono analityczne postaci pochodnych Riemanna-Liouville'a i Caputo typowych sygnałów wymuszających występujących w obwodach i układach elektrycznych. Wprowadzono koncepcję elementu uogólnionego niecałkowitego rzędu oraz podano warunki zapewnienia jego spójności wymiarowej. Główny obszar badań dotyczył opisu rozważanych obwodów równaniami różniczkowymi niecałkowitego rzędu zwyczajnymi (obwody z elementami $RL_\alpha C_\alpha$, w tym czwórniki i filtry) oraz cząstkowymi (linia długa). Wyznaczono analityczne postaci rozwiązań takich równań oraz przeprowadzono eksperymenty numeryczne potwierdzające prawidłowość uzyskanych wyników.

ANALYSIS OF LINEAR ELECTRICAL CIRCUITS WITH THE USE OF FEACTIONAL-ORDER ELEMENTS

S u m m a r y

Fractional Calculus whose mathematical apparatus has been extensively developed has found few applications in electrical engineering, mainly in the theory of electrical circuits. Classical approach to the analysis of electrical systems and their modelling does not usually deal with the problems resulting from the imperfectness of components (losses, nonlinearity, heterogeneity). This fact as well as the emergence of new electrotechnical elements and devices including supercapacitors, memory resistors, called "memristors", or inductance coils with a skin effect, has resulted in the use of fractional-order elements as generalizations of classical elements. Although the Fractional Calculus tools are more advanced mathematically and more complex than those of classical method, the replacement of traditional circuit models with those derived from Fractional Calculus leads to more accurate description of the real elements. The use of Fractional Calculus has opened new areas of application that make it possible to approximate real elements to the degree unattainable in classical approach.

The monograph presents the analysis of the selected linear circuits with the use of fractional-order elements. Based on the literature the concepts necessary for the analysis of the discussed electrical circuits were selected. Definitions of basic fractional derivatives, special (gamma Euler $\Gamma(x)$, Mittag-Leffler) and hypergeometric functions (Lommel and Whittaker) used to determine analytical forms of fractional derivatives were presented. The methods describing continuous fractional-order dynamical systems and the approximation of fractional differential operator, that is, CFE (*Continued Fraction Expansion*) as well as Oustaloup approximation method were discussed. These methods were applied to obtain Laplace transforms in the form of integer-valued polynomials used, among others, for the analysis of transient states. The analytical forms of the Riemann-Liouville and Caputo derivatives of typical input signals occurring in electrical circuits and systems were determined. The concept of a generalized fractional-order element was introduced and the conditions for its dimensional coherence were presented. The main research area was focused on the description of the considered circuits with the use of ordinary fractional differential equations (circuits with $RL_{\alpha}C_{\alpha}$ elements, including two-port networks and filters) and partial fractional differential equations (long line). The analytical solutions of the above equations were determined and the results were confirmed by numerical experiments.