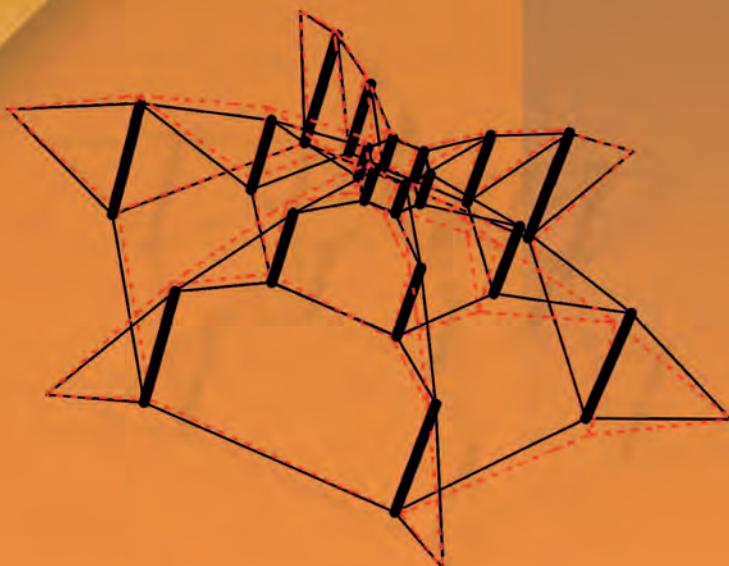


MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY

M116

Paulina Obara

**DYNAMIKA
I STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA
STRUKTUR TENSEGRITY**



Politechnika Świętokrzyska

Kielce 2019

MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY

M116

Paulina Obara

**DYNAMIKA
I STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA
STRUKTUR TENSEGRITY**

Kielce 2019

MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY NR M116

**Redaktor Naukowy serii
INŻYNIERIA ŁĄDOWA I TRANSPORT**
prof. dr hab. inż. Jerzy WAWRZEŃCZYK

Recenzenci:

prof. dr hab. inż. Wojciech GILEWSKI
prof. dr hab. inż. Wacław SZCZEŚNIAK

Projekt okładki

Tadeusz UBERMAN

Wydanie monografii finansowane w ramach projektu z programu Ministera Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości” w latach 2019-2022, nr projektu 025/RID/2018/19, kwota finansowania 12 000 000 zł



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

© Copyright by Politechnika Świętokrzyska, Kielce 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część tej pracy nie może być powielana czy rozpowszechniana w jakiejkolwiek formie, w jakikolwiek sposób: elektroniczny bądź mechaniczny, włącznie z fotokopiowaniem, nagrywaniem na taśmy lub przy użyciu innych systemów, bez pisemnej zgody wydawcy.

PL ISSN 1897-2691
PL ISBN 978-83-65719-57-7

Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej
25-314 Kielce, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7
tel./fax 41 34 24 581
e-mail: wydawca@tu.kielce.pl
www.wydawnictwo.tu.kielce.pl

SPIS TREŚCI

Rozdział 1. WSTĘP	7
1.1. Przedmiot rozważań	7
1.2. Cel, zakres i założenia przyjęte w pracy	8
1.3. Układ pracy	9
Rozdział 2. KONCEPCJA I ZASTOSOWANIE STRUKTUR TENSEGRITY	11
2.1. Wprowadzenie	11
2.2. Zarys historyczny	12
2.3. Przegląd literatury w zakresie dynamiki	16
2.4. Struktury tensegrity w budownictwie	20
2.4.1. Kopyły cięgnowe	22
2.4.2. Dwuwarstwowe kratownice	26
2.4.3. Wieże i maszty	32
2.4.4. Mosty i kładki	35
2.5. Poszukiwanie form konstrukcyjnych tensegrity	36
Rozdział 3. GEOMETRYCZNE NIELINIOWY MODEL MATEMATYCZNY TENSEGRITY	40
3.1. Wprowadzenie	40
3.2. Przestrzenny element skończony tensegrity	44
3.2.1. Równanie równowagi w wersji nieprzyrostowej. Sieczna macierz sztywności	46
3.2.2. Równanie równowagi w wersji przyrostowej. Styczna macierz sztywności	49
3.2.3. Równanie ruchu. Konsekwentna macierz mas	52
3.2.4. Transformacja do globalnego układu współrzędnych	53
3.3. Struktury tensegrity	54
Rozdział 4. CHARAKTERYSTYCZNE CECHY STRUKTUR TENSEGRITY	59
4.1. Wprowadzenie	59
4.2. Cechy i klasyfikacja konstrukcji tensegrity	60
4.3. Jakościowa ocena konstrukcji	62
4.3.1. Analiza spektralna macierzy sztywności i macierzy zgodności	62
4.3.2. Analiza własności macierzy wydłużen – rozkład SVD	63
4.4. Jakościowa ocena wybranych struktur tensegrity	65
4.4.1. Podstawowe modele dwuwymiarowe	66
4.4.2. Kopyły cięgnowe	79
4.4.3. Podstawowe moduły trójwymiarowe	88

4.4.4. Dwuwarstwowe kratownice	93
4.4.5. Wieże	97
Rozdział 5. WPŁYW STANU SAMONAPRĘŻENIA NA STATYCZNE WŁAŚCIWOŚCI STRUKTUR TENSEGRITY	100
5.1. Wprowadzenie	100
5.2. Idealne i „czyste” tensegrity	105
5.3. Struktury o cechach tensegrity klasy 1	116
5.4. Struktury o cechach tensegrity klasy 2	122
5.5. Wnioski	124
Rozdział 6. WPŁYW STANU SAMONAPRĘŻENIA NA DYNAMICZNE WŁAŚCIWOŚCI STRUKTUR TENSEGRITY	126
6.1. Wprowadzenie	126
6.2. Idealne i „czyste” tensegrity	131
6.3. Struktury o cechach tensegrity klasy 1	138
6.4. Struktury o cechach tensegrity klasy 2	140
6.5. Wnioski	141
Rozdział 7. STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA STRUKTUR TENSEGRITY	143
7.1. Wprowadzenie	143
7.2. Metoda bilansu harmonicznych	146
7.3. Metoda małego parametru	148
7.4. Obszary niestateczności wybranych struktur	151
7.5. Wnioski	161
Rozdział 8. PODSUMOWANIE. ORYGINALNE ELEMENTY PRACY	162
Literatura	166
Streszczenie	185
Summary	189

LITERATURA

1. Adam B., Smith I.F.C. (2006), *Learning, Self-Diagnosis And Multi-Objective Control Of An Active Tensegrity Structure*, Advances in Engineering Structures, Mechanics & Construction, 439-448.
2. Adam B., Smith I.F.C. (2007a), Self-diagnosis and self-repair of an active tensegrity structure, *Journal of Structural Engineering* 133 (12), December, 1752-1761.
3. Adam B., Smith I.F.C. (2007b), Tensegrity Active Control – Multi objective Approach, *Journal of Computing in Civil Engineering* 21 (1), 3-10, January.
4. Adam B., Smith I.F.C. (2008a), Active tensegrity: a control framework for an adaptive civil - engineering structure, *Computers & Structures* 86, 2215-2223.
5. Adam B., Smith I.F.C. (2008b), Reinforcement learning for structural control, *Journal of Computing in Civil Engineering* 22 (1), 133-139.
6. Al Sabouni-Zawadzka A. (2016), *Studium możliwości zastosowania konstrukcji inteligentnych w budownictwie mostowym*, Rozprawa doktorska, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
7. Al Sabouni-Zawadzka A., Gilewski W. (2016a), On orthotropic properties of tensegrity structures, *Procedia Engineering* 153, 887–894.
8. Al Sabouni-Zawadzka A., Gilewski W. (2016b), *Technical coefficients for continuum models of orthotropic tensegrity modules*, Advances in Mechanics: Theoretical, Computational and Interdisciplinary Issues, CRC Belkema, Taylor & Francis Group, London, 197–200.
9. Al Sabouni-Zawadzka A., Gilewski W. (2018), Smart metamaterial based on the simplex tensegrity pattern, *Materials* 11 (5), doi:10.3390/ma11050673.
10. Al Sabouni-Zawadzka A., Gilewski W. (2019), Soft and Stiff Simplex Tensegrity Lattices as Extreme Smart Metamaterials, *Materials* 12 (187); doi:10.3390/ma12010187.
11. Albertin A., Malerba P.G., Pollini N., Quagliaroli M. (2012), Genetic Algorithms in the Optimization of Cable Systems, *Newsletter EginSoft*, Year 9 , n°1, 30-33.
12. Allen E., Zalewski W., (2009), *Form i Forces: Designing Efficient, Expressive Structures*, Hoboken N.J, John Wiley & Sons.
13. Amouri S., Averseng J., Dube J.-F. (2013), *Active control design of modular tensegrity structures*, Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2013, September, Wroclaw, Poland.
14. Argyris J.H., Scharpf D.W. (1972), Large deflection analysis of prestressed networks, *Journal of the Structural Division* 98 (3), 633-654.

15. Ashwear N., Eriksson A. (2014), Natural frequencies describe the pre-stress in tensegrity structures, *Computer and Structures* 138 (1), 162-171.
16. Ashwear N., Eriksson A. (2015), Influence of temperature on the vibration properties of tensegrity structures, *International Journal of Mechanical Sciences* 99, 237-250.
17. Ashwear N., Tamadapu G., Eriksson A. (2016), Optimization of modular tensegrity structures for high stiffness and frequency separation requirements, *International Journal of Solids and Structures* 80, 297-309.
18. Awrejcewicz J., Andrianov I. (2000), Metody asymptotyczne i ich zastosowanie w teorii powłok, WNT, Warszawa.
19. Averseng J., Crosnier B. (2004) *Static and dynamic robust control of tensegrity systems*, IASS 2004 Symposium on Shell and Spatial Structures – From Models to Realization, 45(3), 169-174.
20. Averseng J., Dube J.-F., Crosnier B., Motro R. (2005), *Active control of a tensegrity plane grid*, Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15, 6830-6834.
21. Barnes M.R. (1999), Form-finding i analysis of tension structures by dynamic relaxation, *International Journal of Space Structures* 14 (2), 1999.
22. Bathe K.J. (1996), *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, New York, USA.
23. Baudriller H., Bernard M., Cañadasa P., Montcourier P., Parmeggiani A., Bettache N., (2006), Form-finding of complex tensegrity structures: application to cell cytoskeleton modeling, *Comptes Rendus Mecanique* 334 (11), 662-668.
24. Bel Hadj Ali N., Rhode-Barbarigos L., Pascual A. A., Smith I.F.C. (2010), Design optimization and dynamic analysis of a tensegrity-based footbridge, *Engineering Structure* 32, 3650-3659.
25. Bel Hadj Ali N., Smith I.F.C. (2010), Dynamic behavior and vibration control of a tensegrity structure, *International Journal of Solids and Structures* 47 (9), 1285-1296.
26. Bieniek Z. (2009a), A review of the Tensegrity Systems, Symmetry: Art and Science, *The Journal of the International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry, Special Issue for the Conference of ISIS Symmetry Wrocław and Cracow*, Poland, Lugosi G., Nagy D. [Eds.], September 14-19, 2009/1-4, str. 48-51.
27. Bieniek Z. (2009b), Space-filling tetrahedra, Symmetry: Art and Science, *The Journal of the International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry, Special Issue for the Conference of ISIS Symmetry Wrocław – Kraków*, Poland, Lugosi G., Nagy D. [Eds.], September 14-19, 2009/1-4, pp. 44-47.

28. Bieniek Z. (2011a), *Chosen Ideas of Geometrical Shaping of Modular Tensegrity Structures*, Structural Engineers World Congress, Como, Italy, Congress paper on CD.
29. Bieniek Z. (2011b), Spojrzenie na rozwój i definicje systemów tensegrity, *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej*, Nr 276 Budownictwo i Inżynieria Środowiska 58, nr. 3/III, 10-16.
30. Bieniek Z. (2012), *Tensegrity – integrujące rozciąganie w systemach architektonicznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Monografia nr 96/12, Rzeszów.
31. Bieniek Z. (2015a), A mathematical model of the Class Theta tetrahedral tensegrity module, *Lightweight Structures in Civil Engineering – Contemporary Problems, XXI LSCE, Local Seminar of IASS Polish Chapter*, Tarczewski R., Bieniek Z. [Eds.], Rzeszów University of Technology, 9-16.
32. Bieniek Z. (2015b), Examples of cable-bar modular structures based on the Class-Theta tensegrity systems, *Journal of Civil Engineering and Architecture* 9, 1452-1462.
33. Bieniek Z. (2016), Self-Equilibrium Geometry of the Class-Theta Tetrahedral Tensegrity Module, *Engineering Transactions* 64 (4), 441-448.
34. Bieniek Z., Mascolo I., Amendola A. (2018), On the design, elastic modeling and experimental characterization of novel tensegrity units, *PSU Research Review* 2 (2), 145-151, <https://doi.org/10.1108/PRR-07-2018-0019>.
35. Biondini F., Malerba P.G., Quagliaroli M. (2011), *Structural Optimization of Cable Systems by Genetic Algorithms*, The 2011 World Congress on Advances in Structural Engineering and Mechanics (ASEM'11⁺), Seoul, Korea, 18-22 September.
36. Bołotin W.W. (1956), Dinamiczeskaja ustojcziwost uprugich sistiem, Gostekhizdat, Moskwa.
37. Briseghella L., Majorana C.E. Pellegrino C. (1998), Dynamic stability of elastic structures: a finite element approach, *Computers & Structures* 69, 11-25.
38. Burkhardt R.W. Jr. (2008), A Practical Guide to Tensegrity Design, <http://bobwb.Tripod.com>.
39. Cai J., Wang X., Deng X., Feng J. (2018), Form-finding method for multi-mode tensegrity structures using extended force density method by grouping elements, *Composite Structures* 187, 1-9.
40. Calladine C.R. (1978), Buckminster Fuller's "tensegrity" structures and clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames, *International Journal of Solids and Structures* 14, 161-172.
41. Calladine C.R. (1982), Modal stiffnesses of a pretensioned cable net, *International Journal of Solids and Structures* 18 (10), 829-846.
42. Calladine C.R., Pellegrino S. (1991), First order infinitesimal mechanisms, *International Journal of Solids and Structures* 27, 505-515.

43. Caluwaerts K., Carbajal J.P. (2015), Energy conserving constant shape optimization of tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures* 58, 117-127.
44. Chan W.L., Arbelaez D., Bossens F., Skelton R.E. (2004), *Active vibration control of a three-stage tensegrity structure*, SPIE 11th Annual International, Symposium on Smart Structures and Materials, San Diego, March 2004.
45. Chan W.L., Skelton R.E. (2002), *Equilibria and Stiffness of Planar Tensegrity Structures*, AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, San Antonio, Texas, USA.
46. Chen Y., Feng J. (2012a), Generalized eigenvalue analysis of symmetric prestressed structures using group theory, *Journal of Computing in Civil Engineering* 26 (4), 488-497.
47. Chen Y., Feng J. (2012b), Initial prestress distribution and natural vibration analysis of tensegrity structures based on group theory, *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 12 (2), 213-231.
48. Chen Y., Feng J. (2018), Group-theoretic exploitations of symmetry in novel prestressed structures, *Symmetry* 10 (6), 1-16.
49. Chmielewski T., Zębaty Z. (1998), *Podstawy dynamiki budowli*, Arkady, Warszawa.
50. Connelly R., Back A. (1998), Mathematics and tensegrity, *American Sciences* 86, 142-151.
51. Connelly R., Fowler P.W., Guest S.D., Schulze B., Whiteley W.J. (2009), When is a symmetric pin-jointed framework isostatic?, *International Journal of Solids and Structures* 46, 762-773.
52. Connelly R., Terrell M. (1995), Globally rigid symmetric tensegrities, *Structural Topology* 21, 59-78.
53. Crawford L. (2016), *Transgender Architectonics: The shape of Change in Modernist Space*, Routledge.
54. Crisfield M.A. (1991), *Non-linear finite element analysis of solid and structures: Essentials*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA.
55. Cui T.J., Smith D.R., Liu R. (2010), *Metamaterials. Theory, Design and Applications*, Springer, New York, NY, USA; Dordrecht, The Netherlands; Heidelberg, Germany; London, UK.
56. Cunningham W.J. (1962) *Analiza układów nieliniowych*, WNT, Warszawa.
57. De Borst R., Crisfield M.A., Remmers J.J.C., Verhoosel C.V. (2012), *Non-linear finite element analysis of solid and structures*, John Wiley & Sons, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, PO19 1UD, United Kingdom.
58. De Jager B., Skelton R.E. (2006), Stiffness of planar tensegrity truss topologies, *International Journal of Solids and Structures* 43, 1308-1330.
59. Deifeld T.E.C., de Oliveria Pauletti R.M. (2005), *Numerical Simulation of the Assembling of Tensegrity Domes*, Proc. XXVI Iberian Latin-American

- Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE 2005, Guarapari, Espirito Santo, Brasil, 19-21 October 2005.
- 60. Djouadi S., Motro R., Pons J. C., Crosnier B. (1998), Active control of tensegrity systems, *Journal of Aerospace Engineering* 11 (2), 37-44.
 - 61. Domer B., Fest E., Lalit V., Smith I.F.C. (2003), Combining dynamic relaxation method with artificial neural networks to enhance simulation of tensegrity structures, *Journal of Structural Engineering* 129 (5), 672-681.
 - 62. Domer B., Raphael B., Shea K., Smith I.F.C. (2003), A study of two stochastic search methods for structural control, *Journal of Computing in Civil Engineering* 17 (3), July, 132-141.
 - 63. Domer B., Smith I.F.C. (2005), An active structure that learns, *Journal of Computing in Civil Engineering*, 19 (1), 16-24.
 - 64. Emmerich D.G. (1964), *Construction de reseaux autotendants*, French Patent No 1.377.290.
 - 65. Emmerich D.G. (1988), *Structures tendues et autotendantes*, Ecole d'architecture de Paris la Villette.
 - 66. Engheta N., Ziolkowski R.W. (2006), *Metamaterials. Physics and Engineering Explorations*, Wiley-Interscience: New York, NY, USA.
 - 67. Fabbrocino F., Carpentieri G. (2017), Three-dimensional modeling of wave dynamics of tensegrity lattices, *Composite Structures* 173, 9-16.
 - 68. Faroughi S., Khodaparast H.H., Friswell M.I. (2015), Non-linear dynamic analysis of tensegrity structures using a co-rotational method, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 69, 55-65.
 - 69. Faroughi S., Lee J. (2014), Geometrical nonlinear analysis of tensegrity based on a co-rotational method, *Advances in Structural Engineering* 17 (1), 41-51.
 - 70. Faroughi S., Lee J. (2015), Analysis of tensegrity structures subject to dynamic loading using a Newmark approach, *Journal of Building Engineering* 2, 1-8.
 - 71. Fest E., Shea K., Domer B., Smith I.F.C. (2003), Adjustable Tensegrity Structures, *Journal of Structural Engineering* 129 (4), April, 515-526.
 - 72. Fest E., Shea K., Smith I.F.C. (2004), Active tensegrity structure, *Journal of Structural Engineering* 130 (10), October, 1454-1465.
 - 73. Fraddosio A., Marzano S., Pavone G., Piccioni M.D. (2017), Morphology and self-stress design of V-Expander tensegrity cells, *Composites Part B: Engineering*, 115, 102-116.
 - 74. Fraternali F., Senatore L., Daraio C. (2012), Solitary waves on tensegrity lattices, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 60 (6), 1137-1144.
 - 75. Fuller R.B. (1954), *Geodesic Domes*, United States Patent US 2.682.235.
 - 76. Fuller R.B. (1962), *Tensile-integrity structures*, United States Patent No 3.063.521.
 - 77. Fuller R.B. (1967), *Octahedron building truss*, U.S. Patent No. 3,354,591.
 - 78. Fung Y.C. (1969), *Podstawy mechaniki ciala stałego*, PWN, Warszawa.
 - 79. Geiger D.H. (1988), *Roof structure*, U.S. Patent No. 4,736,553.

80. Gengnagel C. (2002), *Arbeitsblätter "Tensegrity"*, Munich: Fakultät für Architektur, Technische Universität München.
81. Gerardo C., Levy M.P. (1992), *Analysis of the Georgia dome cable roof*, Proc., Eighth Conf. of Computing in Civil Engineering and Geographic Information Systems Symp., ASCE, Reston, VA.
82. Gilewski W., Al Sabouni-Zawadzka A. (2014), Control of tensegrity plate due to member loss, *Procedia Engineering* 91, 204-209.
83. Gilewski W., Al Sabouni-Zawadzka A. (2015), On possible applications of smart structures controlled by self-stress, *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 15 (2), 469-478.
84. Gilewski W., Kasprzak A. (2011), Tensegrity w konstrukcjach mostowych, *Acta Scientiarum Polonorum Architectura* 10 (3), 35-43.
85. Gilewski W., Kasprzak A. (2012), *Introduction to mechanics of tensegrity modules*, Theoretical Foundation of Civil Engineering. Mechanics of Structures and Materials, Jemioło S., Lutomirski Sz., eds., OWPW, Warszawa, Tom 1, 83-94.
86. Gilewski W., Kasprzak A. (2013), *Tensegrity Form-finding via modal analysis*, T. Łodygowski i in. (eds.), 20th International Conference on Computer Methods in Mechanics, Short Papers, Poznań, TS02-27-28.
87. Gilewski W., Kłosowska J., Obara P. (2015a), Zastosowanie rozkładu wartości osobliwych do analizy jakościowej kratownic i konstrukcji tensegrity, *ACTA Scientiarum Polonarum, Serie Architectura* 14, 3-20.
88. Gilewski W., Kłosowska J., Obara P. (2015b), Applications of tensegrity structures in civil engineering, *Procedia Engineering* 111, 242-248.
89. Gilewski W., Kłosowska J., Obara P. (2016a), *Form finding of tensegrity structures via Singular Value Decomposition of compability matrix*, Advances in Mechanics: Theoretical, Computational and Interdisciplinary Issues, 191-195.
90. Gilewski W., Kłosowska J., Obara P. (2016b), *Verification of tensegrity properties of Kono Structure and Blur Building*, XXV Polish - Russian - Slovak Seminar –theoretical Foundation Of Civil Engineering 153, 173–179.
91. Gilewski W., Kłosowska J., Obara P. (2017), The influence of self-stress on the behavior of tensegrity-like real structure, *MATEC Web of Conferences* 117, 00079. XXVI R-S-P Seminar 2017.
92. Gilewski W., Kłosowska J., Obara P. (2018), Self-stress control of real civil engineering tensegrity structures, *AIP Conference Proceedings* 1922, 150004.
93. Gilewski W., Kłosowska J., Obara P. (2019), Parametric analysis of some tensegrity structures, *MATEC Web of Conferences* 262, 10003. Krynica 2018.
94. Golub G., Kahan W. (1965), Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis* 2 (2), 205-224.

95. Gomez Estrada G., Bungartz H.J., Mohrdieck C. (2006), Numerical form-finding of tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures* 43, 6855-6868.
96. Gomez-Jauregui V. (2004), *Tensegrity Structures and their Application to Architecture*, Master Thesis, School of Architecture Queen's University Belfast.
97. Gomez-Jauregui V. (2009), *Controversial Origins of Tensegrity*, Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009, Valencia, A. Domingo, C. Lazaro (eds), Evolution i Trends in Design, Analysis i Construction of Shell i Spatial Structures, 28 September – 2 October 2009, Universidad Politecnica de Valencia, 1642-1652.
98. Gómez-Jáuregui V., Arias R., Otero C., Manchado C. (2012), Novel Technique for Obtaining Double-Layer Tensegrity Grids, *International Journal of Space Structures* 27 (2&3).
99. Gomez-Jauregui V., Manchado C., Otero C. (2013), *Comparison between new families of Double-Layer Tensegrity, Grids* Proceedings of the First Conference Transformables 2013, In the Honor of Emilio Perez Piñero 18th-20th September 2013, School of Architecture Seville, Spain, EDITORIAL STARBOOKS, Felix Escrig and Jose Sanchez (eds.), 201-206.
100. Gómez-Jáuregui V., Otero C., Arias R., Manchado C. (2011), *New configurations for double-layer tensegrity grids*, Conference: Structural Engineers World Congress.
101. Gomułński A., Witkowski M. (1993), *Mechanika budowli (kurs dla zaawansowanych)*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
102. Gough M. (1998), In the Laboratory of Constructivism: Karl Ioganson's Cold Structures, *JSTOR* 84, 90-117.
103. Guest S. D. (2010), The stiffness of tensegrity structures, *IMA Journal of Applied Mathematics* 76, 57-66.
104. Gutowski R. (1971), *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa.
105. Hajduk J., Osiecki J. (1970), *Ustroje cięgnowe. Teoria i obliczanie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
106. Hanaor A. (1987), *Preliminary Investigation of Double-Layer Tensegrities*, in H.V. Topping (ed.), Proceedings of International Conference on the Design and Construction of Non-conventional Structures, Vol. 2, Edinburgh, Scotland, Civil-Comp Press.
107. Hanaor A. (1991), Double-layer tensegrity grids: static load response. II – experimental study, *Journal of Structural Engineering* 117 (6), 1675-1684.
108. Hanaor A. (1992), Aspects of design of double-layer tensegrity domes, *International Journal of Space Structures* 7 (2), 101-113.
109. Hanaor A. (1993), Double-layer tensegrity grids as deployable structures. *International Journal of Space Structures* 8, 135-145.

110. Hanaor A. (1994), Geometrically rigid double-layer tensegrity grids, *International Journal of Space Structures*, 9 (4), 227-238.
111. Hanaor A., Liao M.K. (1991), Double-layer tensegrity grids: static load response I – analytical study, *Journal of Structural Engineering* 117 (6), 1660-1674.
112. Harichandran A., Yamini Sreeval I. (2016), Form-finding of tensegrity structures based on force density method, *Journal of Science and Technology* 9 (24), 1-6.
113. Juan S.H., Tur J.M.M. (2008), Tensegrity frameworks: Static analysis review, *Mechanism and Machine Theory* 43 (7), 859-881.
114. Kan Z., Peng H., Chen B., Zhong W. (2018), Nonlinear dynamic and deployment analysis of clustered tensegrity structures using a positional formulation FEM, *Composite Structures* 187, 241-258.
115. Kasprzak A. (2014), *Ocena możliwości wykorzystania konstrukcji tensegrity w budownictwie mostowym*, Rozprawa doktorska, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
116. Kawaguchi K., Lu Z.-Y. (2002), *Construction of three-strut tension systems*, G.A.R. Parke, P. Disney (eds), Space Structures 5, vol. 1, Civil-Comp Press, Guildford.
117. Kawaguchi K., Ohya S., Vormus S. (2009), *Monitoring of full scale tensegrity skeletons under temperature change*, Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures - IASS, 224-231.
118. Kawaguchi M., Tatemichi I., Chen P.S. (1999), Optimum shapes of a cable dome structure, *Engineering Structures* 21, 719-725.
119. Kebiche K., Kazi-Aoual M.N., Motro R. (1999), Geometrical non-linear analysis of tensegrity systems, *Engineering Structures* 21 (9), 864-876.
120. Kenner H. (1976), *Geodesic Math and how to Use It*, University of California Press.
121. Kleiber M. (1985), *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa-Poznań.
122. Klema V.C. (1980), The singular value decomposition: it's computation and some applications, *IEEE Transactions on Automatic Control* 25 (2), 164-176, DOI: 10.1109/TAC.1980.1102314.
123. Kłosowska J. (2018), *Ocena możliwości wykorzystania konstrukcji tensegrity w budownictwie kubaturowym*, Rozprawa doktorska, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce.
124. Kłosowska J., Obara P. (2016) *Analiza kopuł Geigera i Fullera pod kątem cech tensegrity*, Badania i Rozwój Młodych Naukowców w Polsce. Architektura i Urbanistyka. Część 1.Tom: 1, 58-67.
125. Kłosowska J., Obara P. Gilewski W., (2018), Self-stress control of real civil engineering tensegrity structures, *AIP Conference Proceedings* 1922, 150004.

126. Kono Y., Choong K.K., Shimada T., Kunieda H. (1999), An experimental investigation of a type of double-layer tensegrity grids, *Journal of the International Association for Shell i Spatial Structures* 40, 130, 103-111.
127. Kono Y., Kunieda H. (1996), *Tensegrity grids transformed from double-layer space grids*, presented at the Proceedings Conceptual Design of Structures, IASS, Stuttgart, 293-300.
128. Kono Y., Kunieda H. (1997a), *A class of double-layer tensegrity grid domes*, Singapore, 455-463.
129. Kono Y., Kunieda H. (1997b), Experimental Study On Static Load Responses Of Double Layer Tensegrity Grids, *J. Struct. Constr. Eng., AJJ*, no. 502, 93-97.
130. Kono Y., Kunieda H. (2001), *Frame Structure And Method For Forming The Same*, Japan Patent WO9744543.
131. Kono Y., Kunieda H., Shimada T. (1997), Form-Finding Of Double-Layer Tensegrity Grids With Multiple States of Self-Stress, *J. Struct. Constr. Eng., AJJ*, no. 501, 73-76.
132. Koohestani K. (2011), Form-finding of tensegrity structures via genetic algorithm, *International Journal of Solids and Structures* 49 (5), 739-747.
133. Koohestani K. (2013), A computational framework for the form-finding and design of tensegrity structures, *Mechanics Research Communications* 54, 41-49.
134. Koohestani K., Guest S.D. (2013), A new approach to the analytical and numerical form-finding of tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures* 50 (19), 2995–3007.
135. Korkmaz S., Bel Hadj Ali N., Smith I.F.C. (2010), *Self-repair of a tensegrity pedestrian bridge through grouped actuation*, Proceedings of the International Conference on Computing in Civil and Building Engineering.
136. Korkmaz S., Bel Hadj Ali N., Smith I.F.C. (2011a), Configuration of control system for damage tolerance of a tensegrity bridge, *Advanced Engineering Informatics* 26, 145-155.
137. Korkmaz S., Bel Hadj Ali N., Smith I.F.C. (2011b), Determining control strategies for damage tolerance of an active tensegrity structure, *Engineering Structures* 33, 1930-1939.
138. Kruszewski J. (1959), Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji, Arkady, Warszawa.
139. Langer J. (1980), *Dynamika budowli*, Politechnika Wrocławskiego, Wrocław.
140. Lazopoulos K. A., Lazopoulou N.K. (2006), Stability of tensegrity structure: application to cell mechanics, *Archive of Applied Mechanics* 75 (3-4), 289-301.
141. Lee J., Tran H.C., Lee K. (2009), *Advanced form-finding for cable dome structures*, Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium, 2009, Valencia, 2166-27.
142. Lee S., Lee J. (2014), Optimum self-stress design of cable-strut structures using frequency constraints, *International Journal of Mechanical Sciences* 89, 462-469.

143. Lee S.W., Choong K.K. (2018), Form-finding of four-stage tensegrity mast, *International Journal of Civil Engineering and Technology* 9 (7), 1425-1434.
144. Lee S.J. (2012), A form-finding of planar tensegrity structures, *Architectural Research* 14 (4), 143-152.
145. Lefschetz S., La Salle J. (1966), Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej, PWN, Warszawa.
146. Leon S.J. (1994), *Linear Algebra with Applications*, Macmillan, New York, USA.
147. Levy M. P. (1991), Floating fabric over Georgia dome. *Civil Engineering ASCE* 61, 34-37.
148. Levy M.P. (1994), *The Georgia dome and beyond: achieving lightweight-longspan structures*. Spatial, Lattice and Tension Structures: Proceedings of the IASS-ASCE International Symposium 1994, Held in Conjunction with the ASCE Structures Congress XII, 560-562.
149. Li Y., Feng Xi-Q. Cao Y.-P., Gao H. (2010), A Monte Carlo Form-finding method for large scale regular and irregular tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures* 47 (14-15), 1888-1898.
150. Linkwitz K. (1999), Formfinding by the “Direct Approach” and Pertinent Strategies for the Conceptual Design of Prestressed and Hanging Structures, *International Journal of Space Structures* 14 (2), 73-87.
151. Long C. (1983), Visualization of matrix singular value decomposition, *Mathematics Magazine* 56 (3), 161-167.
152. Luo Y., Lu J. (2006), Geometrically non-linear force method for assemblies with infinitesimal mechanisms, *Computer and Structures* 84 (31), 2194-2199.
153. Marcinowski J. (1999), *Nieliniowa stateczność powłok sprężystych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
154. Markocki B., Oleszek R. (2011a), Koncepcja kładki dla pieszych o konstrukcji tensegrity w Magdalence koło Warszawy, *Inżynieria i Budownictwo*, nr 10/2011, 553- 557.
155. Markocki B., Oleszek R. (2011b), *Konstrukcje tensegrity w zastosowaniu mostowym na przykładzie koncepcji kładki KL-3 nad trasą S-7 Salomea-Wolica*, VII Krajowa Konferencja Estetyka Mostów, Warszawa.
156. Masic M., Skelton R.E. (2002), Deployable Plates Made from Stable-element Class 1 Tensegrity, Smart Structures and Mechanics 2002: Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies, A.M.R. McGowan, ed., *Proceedings of SPIE* 4698, 220-230.
157. Masic M., Skelton R.E. (2004), *Optimization of Class 2 Tensegrity Towers*, SPIE's 11th Annual Int. Symp. on Smart Structures and Materials, San Diego, CA.
158. Masic M., Skelton R.E. (2006), Selection of prestress for optimal dynamic/control performance of tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures* 43, 2110-2125.

159. Masic M., Skelton R.E., de Oliveira M.C. (2005), *Integrated Structure and Control Design of Modular Tensegrities*. Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, Seville, Spain.
160. Masic M., Skelton R.E., Gill P.E. (2005), Algebraic tensegrity form-finding, *International Journal of Solids and Structures* 42, 4833-4858.
161. Masic M., Skelton R.E., Gill P.E. (2006), Optimization of tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures* 42, 4687-4703.
162. Mc Guire W., Gallagher R.H. (1979), *Matrix Structural Analysis*, Wiley, New York, USA.
163. Melaragno M. (1993), Tensegrities for skeletal domes: the Georgia dome; a case study, *Periodica polytechnica ser. Architecture* 37 (1-4), 73-79.
164. Metodieva I.Y. (2014), Potential applications of tensegrity structures to bridge construction, *Proceedings of Second International Conference on Traffic and Transport Engineering*, Belgrade, 583-589.
165. Micheletti A. (2005), *Modular tensegrity structures: the Tor Vergata footbridge*, Proceedings of the 2nd International Conference on Footbridges, Venice, Italy.
166. Micheletti A. (2008), On generalized reciprocal diagrams for self-stressed frameworks, *International Journal of Space Structures* 23 (3), 153-166.
167. Micheletti A. (2012), Modular tensegrity structures: the TorVergata footbridge, *Mechanics, Models and Methods in Civil Engineering*, LNACM 61, 375-384.
168. Micheletti A., Cadoni D. (2011), *Design of Single-Layer Floating-Compression Tensegrities*, 10e Colloque National en calcul des Structures, CSMA 2011, Giens, France.
169. Micheletti A., Williams W.O. (2007), A marching procedure for form-finding for tensegrity structures, *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 2 (5), 857-882.
170. Mirats Tur J.M., Hernandez Juan S. (2009), Tensegrity frameworks: Dynamic analysis review and open problems, *Mechanism and Machine Theory* 44, 1-18.
171. Misiak J., Stachura S. (2010), Wybrane zagadnienia statycznej i dynamicznej konstrukcji prętowych i powłokowych, Oficyna Wydawnicza WSEiZ, Warszawa.
172. Modano M., Mascolo I., Fraternali F., Bieniek Z. (2018), *Numerical and Analytical Approaches to the Self-Equilibrium Problem of Class $\theta = 1$ Tensegrity Metamaterials*, Front. Mater. 5:5, doi: 10.3389/fmats.2018.00005.
173. Moored K.W., Bart-Smith H. (2009), Investigation of clustered actuation in tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures* 46, 3272-3281.
174. Moored K.W., Kemp T.H., Bart-Smith H. (2011), Analytical prediction, optimization, and design of a tensegrity-based artificial pectoral fin, *International Journal of Solids and Structures* 48, 3142-3159.

175. Motro R. (1984), *Forms and forces in tensegrity systems*, H. Nooshin (ed.), Proceedings of Third International Conference on Space Structures, Elsevier, 180-185.
176. Motro R. (1987), *Tensegrity Systems for Double-Layer Space Structures*, in H.V. Topping (ed.), Proceedings of International Conference on the Design and Construction of Non-conventional Structures, Vol. 2, Edinburgh, Scotland, Civil-Comp Press.
177. Motro R. (1992), Tensegrity systems: the state of the art, *International Journal of Space Structures* 7 (2), 75-83.
178. Motro R. (2003), *Tensegrity. Structural systems for the future*, Kogan Page, London, UK.
179. Motro R. (2009), Structural morphology of tensegrity systems, *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)* 10 (1), 1-19.
180. Motro R. (2011), *Tension Structures in "Fifty years of progress for shell and spatial Structures"*, IASS Jubilee Book, Multi-Sciences 14.
181. Motro R. (2012), *Tensegrity: from Art to Structural Engineering*, IASS-APCS Symposium, May 2012, Seoul, Sout Korea.
182. Murakami H. (2001a), Static and dynamic analyses of tensegrity structures. Part 1. Nonlinear equations of motion, *International Journal of Solids and Structures* 38, 3599-3613.
183. Murakami H. (2001b), Static and dynamic analyses of tensegrity structures. Part 2. Quasi-static analysis, *International Journal of Solids and Structures* 38, 3615-3629.
184. Murakami H., Nishimura Y. (2001a), Static and dynamic characterization of regular truncated icosahedral and dodecahedral tensegrity modules, *International Journal of Solids and Structures* 38, 9359-9381.
185. Murakami H., Nishimura Y. (2001b), Initial shape finding and modal analyses of cyclic right-cylindrical tensegrity modules, *Computers & Structures* 79 (9), 891-917.
186. Murakami H., Nishimura Y. (2001c), Static and dynamic characterization of some tensegrity modules, *Journal of Applied Mechanics* 68 (1), 19-27.
187. Nagase K., Skelton R.E. (2014), Network and vector forms of tensegrity system dynamics, *Mechanics Research Communications* 59, 14-25.
188. Neimitz A. (2016), *Elementy mechaniki ośrodków ciągłych i ciała stałego*, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce.
189. Nowacki W. (1970), *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa.
190. Nowacki W. (1961), *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa
191. Obara P., Gilewski W. (2016), Dynamic stability of moderately thick beams and frames with the use of harmonic balance and perturbation methods, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences* 64 (4), 739-750.

192. Obara P. (2019a), Application of linear six-parameter shell theory to the analysis of orthotropic tensegrity plate-like structures, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 57 (1), 167-178.
193. Obara P. (2019b), Analysis of orthotropic tensegrity plate strips using a continuum two-dimensional model, *MATEC Web of Conferences* 262, 10010. Krynica 2018.
194. Obara P., Kłosowska J., Gilewski W. (2019), Truth and myths about 2D tensegrity trusses, *Applied Sciences* 9 (179), 1-19.
195. Ohsaki M., Zhang J.Y. (2006), Stability conditions of prestressed pin-joint structures, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 41, 1109-1117.
196. Olejnikova T. (2012), Double Layer Tensegrity Grids, *Acta Polytechnica Hungarica* 9 (5), 95-106.
197. Oliveto N.D., Sivaselvan M.V. (2011), Dynamic analysis of tensegrity structures using a complementary framework, *Computers and Structures* 89, 2471-2483.
198. Oppenheim I.J., Williams W.O. (2001), Vibration of an elastic tensegrity structure, *European Journal of Mechanics and Solids* 20, 1023–1031
199. Pagitz M., Mirats Tur J.M. (2009), Finite element based form finding algorithm, *International Journal of Solids and Structures* 46 (17), 3235-3240.
200. Pałkowski S. (2015), Stalowe konstrukcje cięgnowe – przykłady realizacji, *Bulider*, nr 1, 59-61.
201. Paul C., Lipson H., Cuevas F.V. (2005), *Evolutionary Form-Finding of Tensegrity Structures*, Proceedings of the 2005 Conference: Genetic & Evolutionary Computation, Washington, USA.
202. Pelczarski M. (2013), O kształtowaniu konstrukcji dachu katowickiej hali Spodek. Rozważania z wywiadów z Profesorem Wacławem Zalewskim, *Architectus* 2 (34), 69-82.
203. Pellegrino S. (1986), *Mechanics of kinematically indeterminate structures*, Ph.D. Thesis, University of Cambridge.
204. Pellegrino S. (1990), Analysis of prestressed mechanisms, *International Journal of Solids and Structures* 26, 1329-1350.
205. Pellegrino S. (1992), A Class of Tensegrity Domes, *International Journal of Space Structures* 7 (2), 127-142.
206. Pellegrino S. (1993), Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix, *International Journal of Solids and Structures* 30, 3025-3035.
207. Pellegrino S., Calladine C.R. (1986), Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks, *International Journal of Solids and Structures* 22 (4), 409-428.
208. Podhorecki A. (2005), *Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych*, Wydawnictwo Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej, Bydgoszcz.

209. Pugh A. (1976), *An introduction to tensegrity*, University of California Press, Berkeley, USA.
210. Quirant J., Kazi-Aoual M.N., Motro R. (2003), Designing tensegrity systems: The case of a double layer grid, *Engineering Structures* 25 (9), 1121-1130.
211. Radóń U. (2012), *Zastosowanie metody FORM w analizie niezawodności konstrukcji kratowych podatnych na przeskok*, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce.
212. Rahami H., Kaveh A., Ardalan Asl M., Mirghaderi S.R. (2013), Analysis of near-regular structures with node irregularity using SVD of equilibrium matrix, *International Journal of Civil Engineering* 11 (4), 226-239.
213. Raja M.G., Narayanan S. (2007), Active control of tensegrity structures under random excitation, *Journal of Smart Materials and Structures* 16 (3), 809-817.
214. Rakowski G. i inni (1992), *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe*, Tom 2, Rozdział 5, Arkady, Warszawa.
215. Rakowski G. (1996), *Metoda elementów skończonych – wybrane problemy*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
216. Rakowski G., Kasprzyk Z. (2005), *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
217. Rastorfer D. (1988), *Structural Gymnastic for the Olympics*, Architectural Record.
218. Rhode-Barbarigos L. (2012), *An Active Deployable Tensegrity Structure*, Ph. D. Thesis.
219. Rhode-Barbarigos L., Bel Hadj Ali N., Motro R., Smith I.F.C. (2009), *Tensegrity modules for pedestrian bridges*, Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009: Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures, 28 September-2 October 2009, Universidad Politecnica Valencia, Spain, Domingo A., Lazaro C. (Eds.).
220. Rhode-Barbarigos L., Bel Hadj Ali N., Motro R., Smith I.F.C. (2010), Designing tensegrity modules for pedestrian bridges, *Engineering Structures* 32 (4), 1158-1167.
221. Rhode-Barbarigos L., Jain H., Kripakaran P., Smith I.F.C. (2010), Design of tensegrity structures using parametric analysis and stochastic search, *Engineering with Computers* 26 (2), 193-203.
222. Rhode-Barbarigos L., Motro R., Smith I.F.C. (2012), *A transformable tensegrity-ring footbridge*, IASS-APCS Symposium, Seoul, Korea.
223. Rimoli J.J. (2018), A reduced-order model for the dynamic and post-buckling behavior of tensegrity structures, *Mechanics of Materials* 116, 146-157.
224. Safaei S.D., Eriksson A., Micheletti A., Tibert G. (2013), Study of various tensegrity modules as building blocks for slender booms, *International Journal of Space Structures* 2 (5), 41-52.

225. Schek H. (1974), The force density method for form finding and computation of general networks, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3 (1), 115-134.
226. Schlaich M. (2004), The Messeturm in Rostock. A Tensegrity Tower, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures IASS* 45 (2), n. 145, 93-98.
227. Shekastehband B., Abedi K., Chenaghlu M.R. (2011), Sensitivity analysis of tensegrity systems due to member loss, *Journal of Constructional Steel Research* 67 (9), 1325-1340.
228. Shekastehband B., Abedi K., Dianat N., Chenaghlu M.R. (2012), Experimental and numerical studies on the collapse behavior of tensegrity systems considering cable rupture and strut collapse with snap-through, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 47 (7), 751-768.
229. Shekastehband B., Ayoubi M. (2019), Nonlinear dynamic instability behavior of tensegrity grids subjected to impulsive loads, *Thin-Walled Structures* 136, 1-15.
230. Singh G., Ni R., Marwaha A. (2015), A review of metamaterials and its applications, *Int. J. Eng. Trends Technol.* 19, 305–310.
231. Skelton R.E. (2005), *Dynamics and control of tensegrity systems*, IUTAM Symposium on Vibration Control of Nonlinear Mechanisms and Structures, Springer, 309-318.
232. Skelton R.E. (2006), *Dynamics of tensegrity systems: compact forms*, 45th IEEE Conference on Decision and Control, 2276–2281.
233. Skelton R.E., de Oliveira M.C. (2009), *Tensegrity Systems*, Springer, London, UK.
234. Skelton R. E., de Oliveira M.C. (2010), Optimal complexity of deployable compressive structures, *Journal of the Franklin Institute* 347, 228-256.
235. Skelton R.E., Pinaud J.P., Mingori D.L. (2001a), Dynamics of the shell class of tensegrity structures, *Journal of the Franklin Institute* 338, 255-320.
236. Skelton R.E., Adhikari R., Pinaud J.P., Chan W., Helton J.W. (2001b), *An Introduction to the Mechanics of Tensegrity Structures*, Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida USA, December, 4254-4258.
237. Skelton R.E., Helton J.W., Adhikari R., Pinaud J.P., Chan W. (2002a), *An introduction to the mechanics of tensegrity structures. In Handbook of Mechanical Systems Design* (Chapter 17), CRC press, Boca Raton, USA.
238. Skelton R.E., Williamson D., Han J.H. (2002b), Equilibrium conditions of a class 1 tensegrity structures, *Advances in the Astronautical Sciences, Spaceflight Mechanics* 112, 02-177, 927-950.
239. Smith I.F.C. (2009), Control enhancements of a biomimetic structure, *Journal of Information Technology in Construction* 14, 229-236.
240. Smith I.F.C., Sychterz A., Veuve N. (2017), Adaptive control of a deployable tensegrity structure, *Engineering Structures* 152, 14-23.

241. Snelson K. (1965), *Continuous tension, discontinuous compression structures*, United States Patent No 3,169,611.
242. Snelson K. (1996), Snelson on the Tensegrity Invention, *International Journal of Space Structures* 11, 43-48.
243. Snelson K. (2013), *Art and Ideas*, NY: Kenneth Snelson In Association With Marlborough Gallery.
244. Stewart G.W. (1998), *Matrix Algorithms: Basic Decompositions*, SIAM, Philadelphia, USA.
245. Strang G. (1993), *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, USA.
246. Sultan C. (2009), Tensegrity: 60 years of art, science and engineering, *Advances in Applied Mechanics* 43, 69-145.
247. Sultan C., Corless M., Skelton R. (2002), Linear dynamics of tensegrity structures, *Engineering Structures* 24, 671-685.
248. Sultan C., Corless M., Skelton R.E. (1999), *Reduced prestressability conditions for tensegrity systems*, Conference: 40th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2300-2308.
249. Szczęśniak W. (2005) *Dynamika analityczna i Mathematica w zadaniach i przykładach obliczeniowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
250. Szmelter J. (1980), *Metody komputerowe w mechanice*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
251. Terry W.R. (1994), *Georgia Dome cable roof construction techniques*, John F. Abel, John W. Leonard, i Celina U. Penalba (ed.), Spatial, Lattice i tension structures: Proceeding of the IASS-ASCE International Symposium, New York, ASCE, 563-572.
252. Terry W.L. (1996), *Tension braced dome structure*, U.S. Patent No. 5,502,928.
253. Tibert A.G. (2002), *Deployable tensegrity structures for space applications*, Ph. D. Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.
254. Tibert A.G., Pellegrino S. (2002), Deployable tensegrity reflectors for small satellites, *Journal of Spacecraft and Rockets* 39, 701-709.
255. Tibert A.G., Pellegrino S. (2003a), *Deployable Tensegrity Masts*, 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit, Norfolk, VA.
256. Tibert A.G., Pellegrino S. (2003b), Review of Form-finding Methods for Tensegrity Structures, *International Journal of Space Structures* 18 (4), 209-223.
257. Timoshenko S., Goodier J.N. (1962), *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa.
258. Tran H.C., Lee J. (2007), Advanced form finding for cable-strut structures, *International Journal of Solids and Structures* 47, 1785-94.
259. Tran H.C., Lee J. (2010a), Advanced form-finding of tensegrity structures, *Computers & Structures* 88, 237-246.

260. Tran H.C., Lee J. (2010b), Initial self-stress design of tensegrity grid structures, *Computers & Structures* 88, 558-566.
261. Tran H.C., Lee J. (2010c), Self-stress design of tensegrity gird structures with exostresses, *International Journal of Solids and Structures* 47, 2660-2671.
262. Tran H.C., Lee J. (2011a), Determination of a unique configuration of free-form tensegrity structures, *Acta Mechanica* 220, 331-148.
263. Tran H.C., Lee J. (2011b), Form-finding of tensegrity structures using double singular value decomposition, *Engineering with Computers* 29, 71-86.
264. Tran H.C., Lee J. (2011c), Form-finding of tensegrity structures with multiple states of self-stress, *Acta Mechanica* 222, 131-147.
265. Tran H.C., Lee J. (2011d), Geometrical and material nonlinear analysis of tensegrity structures, *Acta Mechanical Science* 27 (6), 938-949.
266. Veenendaal D., Block P. (2012), An overview and comparison of structural form finding methods for general networks, *International Journal of Solids and Structures* 49 (26), 3741-3753.
267. Volokh K.Y. (2003), Stability conjecture in the theory of tensegrity structures, *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 3 (1), 1-16.
268. Wang B.B. (1998), Cable-strut systems: Part I – Tensegrity, *Journal of Constructional Steel Research* 45 (3), 281-289.
269. Wang B.B. (1999), Simplexes in tensegrity systems, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 40, 129, 57-64.
270. Wang B.B., (2004), *Free-standing tension structures, From tensegrity systems to cable-strut systems*, CRC Press, New York.
271. Wang B.B. (2012), Realizing Cable-Strut Systems, *International Journal of Architectural Technology* 42 (1), 42-53.
272. Wang B.B., Li Y. (2003a), Novel cable-strut grids made of prisms: Part I. Basic theory and design, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 44 (142), 93-108.
273. Wang B.B., Li Y. (2003b), Novel cable-strut grids made of prisms: Part II. Deployable and architectural studies, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 44 (142), 109-125.
274. Wang B.B., Li Y. (2005), Cable-strut systems of non-contiguous strut configurations - Morphological study, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 46 (147), 23-39.
275. Wang B.B., Liu X.L. (1996), Integral-tension research in double-layer tensegrity grids, *International Journal of Space Structures* 11 (4), 349-355.
276. Wang Y.T., Liu X.N., Zhu R., Hu G.K. (2018), Wave propagation in tunable lightweight tensegrity metastructure, *Scientific Reports* 8:11482, DOI:10.1038/s41598-018-29816-6.
277. Warmiński J. (2011), Nieliniowe postacie drgań, PWN, Warszawa.
278. Waszczyzyn Z., Cichoń Cz. (1995), *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe*, Tom 3, Rozdział 10, Arkady, Warszawa.

279. Waszczyzyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M. (1990), *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*, Arkady, Warszawa.
280. Williamson D., Skelton R.E., Han J.H. (2003a), Equilibrium conditions of a tensegrity structure, *International Journal of Solids and Structures* 40, 6347-6367.
281. Williamson D., Skelton R.E., Han J.H. (2003b), Equilibrium conditions of class 1 tensegrity structures, *Revue Francaise de Genie* 7, 291-310.
282. Woźniak A. (2013), *Analiza nośności kładki dla pieszych o konstrukcji typu tensegrity*, Praca inżynierska, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie.
283. Wroldsen A.S. (2007), *Modelling and Control of Tensegrity Structures*, Ph.D. Thesis, Department of Marine Technology, Norwegian University of Science and Technology.
284. Xu X., Luo Y. (2010), Form-finding of nonregular tensegrities using a genetic algorithm, *Mechanics Research Communications* 37 (1), 85-91.
285. Xu X., Luo Y. (2011), Multistable tensegrity structures, *Journal of Structural Engineering* 137 (1), 117-123.
286. Xu X., Wang Y., Luo Y. (2018), Finding member connectivities and nodal positions of tensegrity structures based on force density method and mixed integer nonlinear programming, *Engineering Structures* 166, 240-250.
287. Zalewski W. (2006), *Shaping Structures*.
288. Zhang J. (2007), *Structural Morphology and Stability of Tensegrity Structures*, Ph.D. Thesis, Kyoto University, Japan.
289. Zhang J.Y., Guest S.D., Connelly R., Ohsaki M. (2010), Dihedral ‘star’ tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures* 47, 1-9.
290. Zhang J.Y., Guest S.D., Ohsaki M. (2009), Symmetric prismatic tensegrity structures: Part I. Configuration and stability, *International Journal of Solids and Structures* 46, 1-14.
291. Zhang J.Y., Ohsaki M. (2006), Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures* 43, 5658-5673.
292. Zhang J.Y., Ohsaki M. (2007), Stability conditions for tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures* 44, 3875-3886.
293. Zhang J.Y., Ohsaki M. (2015), *Tensegrity Structures: Form, Stability, and Symmetry*, Springer Japan.
294. Zhang J.Y., Ohsaki M., Kanno Y. (2006), A direct approach to design of geometry and forces of tensegrity systems, *International Journal of Solids and Structures* 43, 2260-2278.
295. Zhang L.Y., Li Y., Cao Y.-P., Feng X.Q. (2014), Stiffness matrix based form-finding method of tensegrity structures, *Engineering Structures* 58, 36-48.

296. Zhang P., Feng J. (2017), Initial prestress design and optimization of tensegrity systems based on symmetry, *International Journal of Solids and Structures* 106–107, 68-90.
297. Zhang A., Sun C., Jiang Z. (2018), Experimental study on the construction shape-forming process and static behaviour of a double strut cable dome, *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A (Applied Physics & Engineering)* 19 (3), 225-239.
298. Zhang L.Y., Zhu S.-X., Li S.-X., Xu G.-K. (2018), Analytical form-finding of tensegrities using determinant of force-density matrix, *Composite Structures* 189, 87-98.
299. Zhang Q., Zhang D., Dobah Y., Scarpa F., Fernando Fraternali F., Skelton R. (2018), Tensegrity cell mechanical metamaterial with metal rubber, *Appl. Phys. Lett.* 113: 031906, DOI.org/10.1063/1.5040850.
300. Ziembka S. (1959), *Analiza drgań, tom II*, PWN, Warszawa.
301. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (2000), *The Finite Element Method. Vol. 1. The Basis*, Butterworth-Heinemann, London, UK.
302. Życzkowski M. (1988), Stateczność prętów i ustrojów prętowych, PWN, Warszawa.

Strony internetowe:

- <http://www.aa64.net>,
- <http://bobwb.tripod.com/synergetics/photos/planar.html>, Snelson K., p. 2 from 1962 Patent Drawings Snelson's Planar Pieces, Burkhardt R., Snelson's Planar Pieces,
- <http://www.wz-structure.org>, An archive of structural designs by Waclaw Zalewski (1917-2016),
- <http://www.dsny.com/#/projects/blur-building>, Diller E., Scofidio R., Renfro C., Gilmartin B.

DYNAMIKA I STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA STRUKTUR TENSEGRITY

STRESZCZENIE

W pracy przeprowadzono szeroko pojętą analizę parametryczną pewnej grupy konstrukcji prętowych, które nazywane są tensegrity. Są to konstrukcje zbudowane wyłącznie z elementów ściskanych i rozciąganych. Od konwencjonalnych ustrojów prętowo-cięgnowych odróżniają je pewne specyficzne właściwości mechaniczne i matematyczne. W elementach tych konstrukcji występuje samorównoważny układ sił wewnętrznych nazywany stanem samonaprężenia (*self-stress state*). W przypadku braku stanu samonaprężenia struktury tensegrity są niestabilne, czyli geometrycznie zmienne. Stabilizacja następuje dopiero po wprowadzeniu wstępnych naprężen, a ich modyfikacja pozwala na sterowanie parametrami statycznymi i dynamicznymi konstrukcji.

Kompletna analiza struktur tensegrity składa się z dwóch etapów. Pierwszym jest poszukiwanie formy tensegrity (*form-finding*), czyli zidentyfikowanie stanów samonaprężenia i mechanizmów infinitezymalnych (analiza jakościowa), natomiast drugim – analiza zachowania się konstrukcji pod wpływem oddziaływania obciążen zewnętrznych (analiza ilościowa).

Ocenę jakościową wykonano wykorzystując analizę spektralną macierzy kratownic, w tym rozkład macierzy wydłużeń według wartości osobliwych (*singular value decomposition SVD*). Analiza została przeprowadzona w zakresie szerokiego spektrum konstrukcji płaskich i przestrzennych, z podziałem na zastosowanie ich w budownictwie. W konstrukcjach zidentyfikowano charakterystyczne cechy struktur tensegrity. Na tej podstawie dokonano kwalifikacji do jednej z czterech grup zdefiniowanych w pracy, tj. *idealne tensegrity*, „czyste” tensegrity i konstrukcje o cechach tensegrity klasy 1 lub klasy 2. Ta klasyfikacja ma istotne znaczenie z uwagi na różne zachowanie się konstrukcji pod wpływem oddziaływań zewnętrznych.

Ocenę ilościową, obejmującą obliczenia odpowiedzi konstrukcji na działanie obciążen, wykonano uwzględniając oddziaływanie obciążen stałych i zmiennych w czasie. W pierwszym przypadku przeprowadzono statyczną i dynamiczną analizę parametryczną, ze szczególnym uwzględnieniem wpływu wstępnego sprężenia na przemieszczenia, nośność i sztywność konstrukcji (analiza statyczna) oraz na częstotliwości drgań konstrukcji (analiza dynamiczna). W drugim przypadku przeprowadzono analizę parametryczną struktur tensegrity poddanych oddziaływaniu obciążen periodycznych. Analiza ta prowadzi do wyznaczenia tzw. obszarów niestateczności dynamicznej i określenia wpływu wstępnego sprężenia na rozkład tych obszarów.

Obliczenia odpowiedzi konstrukcji na działanie obciążen statycznych, wykonano stosując analizę nieliniową. W celu miarodajnej oceny wprowadzono

parametr, który określa wpływ stanu samonaprężenia na całkowitą sztywność struktury przy zadanym obciążeniu. Udowodniono, że sztywność konstrukcji zależy nie tylko od geometrii i właściwości materiałowych, ale również od poziomu stanu samonaprężenia i od obciążenia zewnętrznego. Przeprowadzone analizy wykazały, że wpływ stanu samonaprężenia na całkowitą sztywność struktury jest większy przy mniejszym obciążeniu oraz, że wpływ obciążenia jest najbardziej znaczący przy małych wartościach sił wstępniego sprężenia. Modyfikacja poziomu stanu samonaprężenia w strukturach tensegrity pozwala również na sterowanie ich właściwościami dynamicznymi. Liczba częstotliwości drgań własnych, które są zależne od wstępniego sprężenia, równa jest liczbie mechanizmów infinitezymalnych. Przy braku sprężenia częstotliwości te są zerowe, a odpowiadające im postacie drgań realizują mechanizm. Po wprowadzeniu stanu samonaprężenia częstotliwości wzrastają proporcjonalnie do pierwiastka kwadratowego tego stanu. Pozostałe częstotliwości są praktycznie niewrażliwe na zmianę poziomu stanu samonaprężenia. W przypadku zidentyfikowania kilku mechanizmów, bardziej wrażliwe na zmianę wstępniego sprężenia są wyższe częstotliwości. Na odpowiedź dynamiczną struktury tensegrity ma również wpływ obciążenie zewnętrznne, które powoduje dodatkowe sprężenie ustroju. Wraz ze wzrostem poziomu stanu samonaprężenia wpływ obciążenia zewnętrznego na częstotliwości drgań maleje.

Przeprowadzona w pracy analiza wykazała, że sterowanie parametrami statycznymi i dynamicznymi jest możliwe tylko w przypadku konstrukcji charakteryzujących się występowaniem mechanizmu infinitezymalnego. W literaturze mianem *tensegrity* nazywane są również konstrukcje, w których nie występuje mechanizm. W pracy takie konstrukcje nazwano *strukturami o cechach tensegrity klasy 2* – struktury te są niewrażliwe na poziom stanu samonaprężenia.

Ostatnim etapem pracy była analiza parametryczna struktur tensegrity poddanych oddziaływaniu obciążień periodycznych. Celem analizy było wyznaczenie granic głównych obszarów niestateczności dynamicznej. Znaczenie techniczne tych obszarów jest szczególnie duże. Interpretując fizycznie zjawisko niestateczności dynamicznej (rezonansu parametrycznego), powiemy, że jeżeli parametry obciążenia znajdą się pomiędzy wyznaczonymi granicami niestateczności, to powstają drgania o wzrastającej amplitudzie. Drgania te są groźne w aspekcie trwałości konstrukcji. W rozważaniach uwzględniono tylko struktury, w których zidentyfikowane zostały mechanizmy infinitezymalne. Przeprowadzona analiza wykazała, że liczba głównych obszarów niestateczności zależy od liczby mechanizmów, czyli od liczby częstotliwości drgań własnych zależnych od stanu samonaprężenia. Zakres obszaru niestateczności jest natomiast ściśle związany z poziomem wstępniego sprężenia. W celu miarodajnej oceny, wpływu poziomu wstępniego sprężenia na rozkład głównych obszarów niestateczności, wprowadzono parametr, który określa zmianę powierzchni obszaru w zależności od poziomu stanu samonaprężenia. Największy obszar jest przy

minimalnym poziomie. Wraz ze wzrostem wartości stanu samonaprężenia rosną wartości częstości rezonansowych, a zakres obszarów niestateczności się zmniejsza. Otrzymane wyniki są potwierdzeniem wniosków otrzymanych z poprzednich analiz, a mianowicie – wpływ obciążenia na zachowanie się struktur tensegrity jest najbardziej znaczący przy małych wartościach sił wstępniego sprężenia. W przypadku konstrukcji obciążonych siłami periodycznymi, ryzyko wzbudzenia drgań niestabilnych jest dużo większe przy niskim poziomie stanu samonaprężenia. W strukturach, które charakteryzują się porównywalnym wytężeniem zastrzałów i ciągów, przy maksymalnym poziomie samonaprężenia granice obszarów się pokrywają, czyli w znacznym stopniu zmniejsza się ryzyko wzbudzenia ruchu o rosnących w czasie amplitudach.

Na potrzeby przeprowadzanych analiz zbudowano procedurę obliczeniową opartą na metodzie elementów skończonych, w której zaimplementowano analizę geometrycznie nieliniowych układów prętowych. Procedura została napisana w środowisku *Mathematica*, które pozwoliło na uproszczenie operacji matematycznych, poprzez wykorzystanie zaimplementowanych tam funkcji i komend. Rozwiążanie algebraicznego układu równań nieliniowych wykonano implementując we wspomnianym środowisku metodę Newtona-Raphsona. Program umożliwia dowolne definiowanie geometrii konstrukcji, parametrów materiałowych, wstępnych naprężeń i obciążzeń, a następnie śledzenie zachowania się wybranych statycznych, geometrycznych i dynamicznych parametrów.

DYNAMIC AND DYNAMIC STABILITY OF TENSEGRITY STRUCTURES

SUMMARY

The study includes a broad parametric analysis of a group of rod structures called tensegrities. Tensegrity structures consist of only compression and tension components arranged in a system, whose unique mechanical and mathematical properties distinguish them from conventional cable-strut frameworks. A system of internal forces holds the structural components in stable equilibrium called the self-stress state. In the absence of self-stress a tensegrity structures are unstable or geometrically variable. Stability is provided by pre-stress, and the adjustment of pre-stressing forces allows controlling the static and dynamic properties of the structure.

Complete analysis of tensegrity structures is a two-stage process. The first stage includes form-finding, which is the identification of self-stress states and infinitesimal mechanisms (qualitative analysis). The second stage focuses on the behaviour of tensegrities under external loads (quantitative analysis).

The qualitative assessment used spectral analysis of truss matrix and decomposition of compatibility matrix (*singular value decomposition* SVD). The analysis covered a broad spectrum of planar and spatial structures split into categories by application in construction. Characteristic features of tensegrity structures were identified. On this basis, the structures were classified in one of the four groups defined in the paper, i.e. *ideal tensegrities*, “pure” *tensegrities* and *structures with the characteristics of a class 1 or class 2 tensegrity*. This classification is important due to different behaviours of the structure under external actions.

The quantitative assessment, including the calculation of the structure's response to loads, was carried out taking into account constant and time-varying loads. In the first case, a static and dynamic parametric analysis was carried out, with particular emphasis on the influence of the self-stress state on displacements, load-bearing capacity and stiffness (static analysis), and on the vibration frequency (dynamic analysis) of the structure. In the second case, a parametric analysis of tensegrity structures subjected to periodical loads was carried out to determine the areas of dynamic instability and identify the effect of pre-stressing on the distribution of these areas.

Non-linear analysis was used to calculate the static load response of the structure. A reliable assessment required introducing a parameter for determining the effect of the self-stress state on the overall stiffness of the structure at a given load. The stiffness of the structure was found to depend not only on the geometry and material properties, but also on the self-stress level and external load. The results show that the effect of self-stress on the overall stiffness of the structure is

greater with less load and that the effect of load is most significant with low pre-stressing forces. Adjustment of self-stress levels is also used to control the dynamic properties of tensegrity structures. The number of self-stress dependent natural frequencies is equal to the number of infinitesimal mechanisms. In the absence of prestress, these frequencies are equal to zero and the corresponding forms of vibration realize the mechanism. After introducing the self-stress state the frequencies increase proportionally to the square root of this state. The remaining frequencies are practically insensitive to changes in the self-stress level. If several mechanisms are identified, higher frequencies are more sensitive to self-stress changes. The dynamic response of a tensegrity is also influenced by the external load which induces additional stress in the system. As the level of self-stress increases, the effect of the external load on the vibration frequency decreases.

The analysis shows that the control of static and dynamic parameters is possible only when infinitesimal mechanisms occur in the structure. Some structures described in the literature as tensegrities have no mechanism. In this paper such structures are referred to as *structures with the characteristics of a class 2 tensegrity* – structures insensitive to the level of self-stress state.

The final stage of the study included parametric analysis of tensegrity structures under periodic loads. The analysis aimed to establish the boundaries of the main regions of dynamic instability. If the load parameters are between the defined instability boundaries, the amplitudes of the formed vibrations increase thus posing a risk to the durability of structures. The analysis only considered the structures with infinitesimal mechanisms. The analysis showed that the number of main instability regions depends on the number of mechanisms, i.e. on the number of self-stress dependent natural frequencies. The influence of the initial pre-stress level on the distribution of the main regions of instability was assessed by introducing a parameter for determining the change in the surface under increasing self-stress level. Resonant frequencies were shown to increase with increasing initial pre-stress levels and the range of instability areas decreases. In the case of structures with struts and cables under comparable stress, the boundaries of the regions overlapped at maximum self-stress, thus markedly reducing the risk of exciting movement having amplitudes that increase in time.

For the needs of the analyses, a calculation procedure based on the finite element method was constructed, in which the analysis of geometrically non-linear rod systems was implemented. The use of *Mathematica* functions and commands simplified mathematical operations. The algebraic system of nonlinear equations was solved by implementing the Newton-Raphson in this environment. The program helps define the geometry of the structure, material parameters, initial stresses and loads, and then track the behaviour of selected static and dynamic parameters.