

**MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY**

**M132**

**Dariusz Bojczuk**

**POCHODNA TOPOLOGICZNA  
I SKOŃCZONE MODYFIKACJE TOPOLOGII  
W OPTYMALNYM PROJEKTOWANIU  
KONSTRUKCJI TARCZOWYCH  
I PŁYTOWYCH**



Politechnika Świętokrzyska

Kielce 2020

**MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY**

**M132**

**Dariusz Bojczuk**

**POCHODNA TOPOLOGICZNA  
I SKOŃCZONE MODYFIKACJE TOPOLOGII  
W OPTYMALNYM PROJEKTOWANIU  
KONSTRUKCJI TARCZOWYCH  
I PŁYTOWYCH**

Kielce 2020

**MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY NR M132**

**Redaktor Naukowy serii  
INŻYNIERIA MECHANICZNA**  
prof. dr hab. inż. Tomasz Lech STAŃCZYK

**Recenzenci**

prof. dr hab. inż. Ryszard KORYCKI  
prof. dr hab. inż. Ryszard KUTYŁOWSKI

**Redakcja**

Irena PRZEORSKA-IMIOŁEK

**Projekt okładki**

Tadeusz UBERMAN

© Copyright by Politechnika Świętokrzyska, Kielce 2020

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część tej pracy nie może być powielana czy rozpowszechniana w jakiejkolwiek formie, w jakikolwiek sposób: elektroniczny bądź mechaniczny, włącznie z fotokopiowaniem, nagrywaniem na taśmy lub przy użyciu innych systemów, bez pisemnej zgody wydawcy.

ISSN 1897-2691  
ISBN 978-83-65719-90-4

Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej  
25-314 Kielce, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7  
tel./fax 41 34 24 581  
e-mail: [wydawca@tu.kielce.pl](mailto:wydawca@tu.kielce.pl)  
[www.wydawnictwo.tu.kielce.pl](http://www.wydawnictwo.tu.kielce.pl)

# Spis treści

<b>1. WSTĘP .....</b>	7
1.1. Aktualny stan wiedzy .....	9
1.2. Cele, zakres i układ pracy .....	13
<b>2. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI I POCHODNA TOPOLOGICZNA W PROBLEMACH WPROWADZANIA OTWORÓW W TARCZACH .....</b>	16
2.1. Definicja pochodnej topologicznej .....	16
2.2. Analiza wrażliwości ze względu na zmianę wielkości, położenia i kształtu otworu .....	17
2.2.1. Analiza wrażliwości funkcjonału odkształceń i przemieszczeń .....	17
2.2.2. Analiza wrażliwości funkcjonału naprężeń i reakcji .....	20
2.3. Pochodna topologiczna ze względu na wprowadzenie otworu kołowego .....	21
2.3.1. Analiza wrażliwości funkcjonału odkształceń i przemieszczeń ze względu na ekspansję otworu .....	23
2.3.2. Pochodna topologiczna funkcjonału odkształceń i przemieszczeń .....	24
2.3.3. Analiza wrażliwości i pochodna topologiczna funkcjonału naprężeń i reakcji .....	27
2.4. Analiza wrażliwości ze względu na zmianę wielkości, kształtu i położenia otworu eliptycznego .....	28
2.4.1. Analiza wrażliwości funkcjonału odkształceń i przemieszczeń ze względu na zmianę wielkości otworu .....	30
2.4.2. Analiza wrażliwości funkcjonału odkształceń i przemieszczeń ze względu na zmianę kształtu otworu .....	33
2.4.3. Analiza wrażliwości funkcjonału odkształceń i przemieszczeń ze względu na obrót otworu .....	36
2.4.4. Wyznaczanie optymalnego kształtu i położenia otworu eliptycznego o zadanym polu .....	38
2.4.5. Lokalizacja naprężeń maksymalnych oraz miejsca inicjacji pęknięcia na brzegu otworu eliptycznego .....	39
2.4.6. Analiza wrażliwości dla szczeliny płaskiej jako przypadek osobliwy .....	41
2.5. Pochodna topologiczna funkcjonału odkształceń i przemieszczeń ze względu na wprowadzanie otworu eliptycznego .....	45
2.6. Analiza wrażliwości i pochodna topologiczna funkcjonału naprężeń i reakcji ze względu na wprowadzanie otworu eliptycznego .....	47
2.7. Uwagi i wnioski .....	49

<b>3. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI I POCHODNA TOPOLOGICZNA ZE WZGLEDU</b>	
<b>NA WPROWADZANIE USZTYWNIEŃ W TARCZACH .....</b>	50
3.1. Analiza wrażliwości i pochodna topologiczna ze wzgledu	
na wprowadzanie inkluzji .....	50
3.1.1. Analiza wrażliwości ze wzgledu na ekspansję inkluzji .....	50
3.1.2. Postać ogólna pochodnej topologicznej ze wzgledu na wprowadzanie inkluzji eliptycznej .....	52
3.1.3. Postać szczególnowa pochodnej topologicznej energii odkształcenia ze wzgledu na wprowadzanie inkluzji kołowej .....	54
3.2. Analiza wrażliwości i pochodna topologiczna ze wzgledu	
na wprowadzanie włókna .....	58
3.2.1. Analiza wrażliwości i pochodna topologiczna funkcjonału odkształceń i przemieszczeń .....	60
3.2.2. Analiza wrażliwości i pochodna topologiczna funkcjonału naprężeń i reakcji .....	63
3.3. Analiza wrażliwości i pochodna topologiczna ze wzgledu	
na wprowadzanie zebra .....	64
3.4. Uwagi i wnioski .....	67
<b>4. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI I POCHODNA TOPOLOGICZNA W PROBLEMACH</b>	
<b>WPROWADZANIA OTWORÓW W PŁYTACH .....</b>	68
4.1. Analiza wrażliwości płyt ze wzgledu na ekspansję otworu .....	68
4.1.1. Podstawowe równania płyt we współrzędnych prostokątnych .....	68
4.1.2. Analiza wrażliwości funkcjonału krzywizn i przemieszczeń .....	69
4.1.3. Analiza wrażliwości funkcjonału momentów i reakcji .....	71
4.2. Pochodna topologiczna ze wzgledu na wprowadzanie otworu kołowego .....	72
4.2.1. Podstawowe równania płyt we współrzędnych biegunowych .....	72
4.2.2. Pola przemieszczeń i momentów w płycie jednorodnej osłabionej otworem .....	73
4.2.3. Pola momentów i krzywizn w płycie sprężonej osłabionej otworem .....	75
4.2.4. Pochodna topologiczna funkcjonału krzywizn i przemieszczeń .....	77
4.2.5. Pochodna topologiczna funkcjonału momentów i reakcji .....	78
4.3. Uwagi i wnioski .....	79
<b>5. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI I POCHODNA TOPOLOGICZNA ZE WZGLEDU</b>	
<b>NA WPROWADZANIE USZTYWNIEŃ W PŁYTACH .....</b>	80
5.1. Analiza wrażliwości i pochodna topologiczna ze wzgledu na wprowadzanie inkluzji .....	80
5.1.1. Analiza wrażliwości ze wzgledu na ekspansję inkluzji .....	80
5.1.2. Postać ogólna pochodnej topologicznej ze wzgledu na wprowadzanie inkluzji eliptycznej .....	82

5.2. Analiza wrażliwości i pochodna topologiczna funkcjonału krzywizn i przemieszczeń ze względu na wprowadzanie żebra .....	84
5.2.1. Analiza wrażliwości ze względu na zmianę położenia i wymiarów żebra ...	85
5.2.2. Pochodna topologiczna ze względu na wprowadzanie żebra .....	87
5.3. Uwagi i wnioski .....	88
<b>6. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI I POCHODNA TOPOLOGICZNA ZE WZGLEDU NA WPROWADZANIE INKLUZJI I OTWORÓW W KONSTRUKCJACH TRÓJWYMIAROWYCH .....</b>	<b>89</b>
6.1. Pochodna topologiczna dla problemów trójwymiarowych – definicja, oznaczenia .....	89
6.2. Analiza wrażliwości ze względu na ekspansję inkluzji lub otworu w konstrukcjach trójwymiarowych .....	90
6.3. Pochodna topologiczna ze względu na wprowadzanie inkluzji lub otworu w konstrukcjach trójwymiarowych .....	94
6.4. Uwagi i wnioski .....	95
<b>7. ZASTOSOWANIE POCHODNEJ TOPOLOGICZNEJ I MODYFIKACJI SKOŃCZONYCH W OPTYMALIZACJI TOPOLOGII I KSZTAŁTU TARCZ ORAZ PŁYT .....</b>	<b>96</b>
7.1. Koncepcja zastosowania pochodnej topologicznej i modyfikacji skończonych w optymalizacji topologii i kształtu .....	96
7.1.1. Warunki wprowadzania nieskończenie małej modyfikacji .....	97
7.1.2. Warunki wprowadzania skończonej modyfikacji .....	98
7.1.3. Korekta kształtu konstrukcji .....	100
7.2. Przykłady optymalizacji tarcz .....	103
7.2.1. Algorytm heurystyczny optymalizacji topologii i kształtu tarcz .....	104
7.2.2. Przykład: optymalizacja położenia otworu kwadratowego w tarczy prostokątnej .....	105
7.2.3. Przykład: optymalizacja topologii i kształtu tarczy typu konstrukcji mostowej .....	106
7.2.4. Przykład: optymalizacja topologii i kształtu tarczy typu belki wysokiej ...	108
7.3. Przykłady optymalizacji płyt .....	109
7.3.1. Algorytm heurystyczny optymalizacji topologii i kształtu płyt .....	109
7.3.2. Przykład: optymalizacja położenia otworu kołowego w płycie .....	111
7.3.3. Przykład: optymalizacja topologii i kształtu podpartej przegubowo na obwodzie płyty prostokątnej .....	113
7.3.4. Przykład: optymalizacja topologii i kształtu utwierzonej na obwodzie płyty prostokątnej .....	114
7.4. Uwagi i wnioski .....	116

<b>8. ZASTOSOWANIE POCHODNEJ TOPOLOGICZNEJ I MODYFIKACJI SKOŃCZONYCH W OPTYMALIZACJI USZTYWNIEŃ TARCZ ORAZ PŁYT</b>	117
8.1. Koncepcja zastosowania pochodnej topologicznej i modyfikacji skończonych w optymalizacji usztywnień	117
8.1.1. Warunki wprowadzania usztywnień	118
8.1.2. Korekta kształtu i wymiarów konstrukcji usztywnionej	121
8.1.3. Algorytm heurystyczny optymalizacji tarcz i płyt z usztywnieniami	123
8.2. Przykłady optymalizacji tarcz i płyt z usztywnieniami	124
8.2.1. Przykład: optymalne wzmocnienie tarczy za pomocą włókien usztywniających	124
8.2.2. Przykład: optymalne usztywnienie tarczy wspornikowej żebrami	125
8.2.3. Przykład: optymalne usztywnienie płyty zaporowej żebrami	127
8.2.4. Przykład: optymalne usztywnienie żebrami płyty skręcanej	128
8.3. Uwagi i wnioski	129
<b>9. ZASTOSOWANIE POCHODNEJ TOPOLOGICZNEJ I MODYFIKACJI SKOŃCZONYCH W OPTYMALNYCH NAPRAWACH I WZMACNIANIU TARCZ ORAZ PŁYT</b>	130
9.1. Koncepcja zastosowania pochodnej topologicznej i modyfikacji skończonych w optymalnych naprawach i wzmacnianiu	131
9.1.1. Wyznaczanie wstępnej lokalizacji elementów wzmacniających	131
9.1.2. Wyznaczanie skończonych zmian funkcjonału celu wywołanych wzmacniającymi zmianami skończonymi	132
9.1.3. Algorytm heurystyczny optymalnej naprawy i wzmacniania tarcz lub płyt	137
9.2. Przykłady numeryczne optymalnych napraw i wzmacniania tarcz oraz płyt	138
9.2.1. Przykład: optymalne wzmocnienie płyty przez wprowadzenie żeber usztywniających	138
9.2.2. Przykład: optymalne wzmocnienie płyty przez wprowadzenie sprężystych lub sztywnych podpór punktowych	140
9.2.3. Przykład: optymalne wzmocnienie tarczy przez wprowadzenie sztywnych podpór punktowych	141
9.3. Uwagi i wnioski	142
<b>10. PODSUMOWANIE</b>	144
Literatura	147
Streszczenie	165
Summary	167

## LITERATURA

- [1] Adelman H.M., Haftka R.T.: Sensitivity analysis of discrete structural systems. *AIAA J.*, 24(1986), s. 823-832
- [2] Allaire G., Jouve F., Toader A.-M.: A level set method for shape optimization. *CR Acad. Sci. Paris, Série I*, 334(2002), s. 1125-1130
- [3] Allaire G.: Shape optimization by the homogenization method. New York: Springer, 2002
- [4] Allaire G., Jouve F., Toader A.-M.: Structural optimization using sensitivity analysis and a level set method. *J. Comp. Phys.*, 194(2004), s. 363-393
- [5] Allaire G., de Gournay F., Jouve F., Toader A.-M.: Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control and Cybernetics* 34(2005), s. 59-80
- [6] Ammari H., Kang H.: Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements. Lecture Notes in Mathematics 1846. Berlin: Springer-Verlag, 2004
- [7] Amstutz S.: Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property. *Asymptotic Anal.*, 49(2006), s. 87-108
- [8] Arora J.S., Cardoso J.B.: Variational principle for shape design sensitivity analysis. *AIAA J.*, 30(1992), s. 538-547
- [9] Arora J.S., Haug E.J.: Methods of design sensitivity analysis in structural optimization. *AIAA J.*, 17(1979), s. 970-973
- [10] Arora J.S.: Introduction to optimal design. McGraw-Hill, New York, 1989
- [11] Barthelemy B., Haftka R.T.: Recent advances in approximation concepts for optimal structural design. *Struct. Optim.*, 12(1993), s. 129-144
- [12] Barthelemy B., Haftka R.T., Cohen G.A.: Physically-based sensitivity derivatives for structural analysis programs. *Comp. Mech.*, 4(1989), s. 465-476
- [13] Bathe K., Wilson E.: Numerical methods in finite element analysis. Prentice-Hall, 1976
- [14] Baumgartner A., Harzheim L., Mattheck C.: SKO (soft kill option): The biological way to find an optimum structure topology. *Int. J. Fatigue*, 14(1992), s. 387-393
- [15] Bažant Z.P., Cedolin L.: Stability of structures. Oxford University Press, 1991
- [16] Beckers M.: Topology optimization using a dual method with discrete variables. *Struct. Optim.*, 17(1999), s. 14-24
- [17] Belblidia F., Alfonso S.B., Hinton E., Antonino G.R.: Integrated design optimization of stiffened plate structures. *Eng. Computation.*, 16(1999), s. 934-951
- [18] Belegundu A.D., Rajan S.D.: A shape optimization approach based on natural design variables and shape functions. *Comp. Method. Appl. M.*, 66(1988), s. 87-106
- [19] Belytschko T., Xiao S.P., Parimi C.: Topology optimization with implicit functions and regularization. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 57(2003), s. 1177-1196
- [20] Bendsoe M.P., Ben-Tal A., Zowe J.: Optimization methods for truss geometry and topology design. *Struct. Optim.*, 7(1994), s. 141-159

- [21] Bendsoe M.P., Diaz A., Kikuchi N.: Topology and generalized layout optimization of elastic structures. [in:] "Topology optimization of structures", Kluwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands, 1993, s. 159-205
- [22] Bendsoe M.P., Kikuchi N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization. *Comp. Meth. Appl. M.*, 71(1988), s. 197-224
- [23] Bendsoe M.P.: Methods for the optimization of structural topology, shape and material. Springer-Verlag, Berlin, 1995
- [24] Bendsoe M.P., Olhoff N., Taylor J.E.: A variational formulation for multicriteria structural optimization. *J. Struct. Mech.*, 11(1983), s. 523-544
- [25] Bendsoe M.P.: Optimal shape design as material distribution problem. *Struct. Optim.*, 1(1989), s. 193-202
- [26] Bendsoe M.P.: Optimization of structural topology, shape and material. Springer, Berlin, 1997
- [27] Bendsoe M.P., Sigmund O.: Material interpolation schemes in topology optimization. *Arch. Appl. Mech.*, 69(1999), s. 635-654
- [28] Bendsoe M.P., Sigmund O.: Topology optimization: theory, methods and applications. Springer, Heidelberg, 2003.
- [29] Birker T.: New developments in structural optimization using optimality criteria. Ph.D. Thesis, Essen University, 1996
- [30] Boer H. de, Van Keulen F.: Refined semi-analytical design sensitivities. *Int. J. Solids Struct.*, 37(2000), s. 6961-6980
- [31] Bojczuk D.: Analiza wrażliwości i optymalizacja konstrukcji. *Konferencja Naukowa nt. Współpraca Badawcza Politechniki Świętokrzyskiej z Krajowymi i Zagranicznymi Ośrodkami Naukowymi i Przemysłowymi*, Kielce, 1-3 czerwca, 1995, s. 27-38
- [32] Bojczuk D.: Analiza wrażliwości i optymalizacja konstrukcji prętowych. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej. Kielce, 1999
- [33] Bojczuk D.: Analiza wrażliwości sprężystych konstrukcji prętowych i belkowych. *Rozpr. Inż.*, 35(1987), s. 171-204
- [34] Bojczuk D.: Finite element formulation of sensitivity analysis for non-linear structures in critical states. *Proceedings of 2<sup>nd</sup> European Conference on Computational Mechanics*, Cracow, June 26-29, 2001, CD-ROM
- [35] Bojczuk D.: Method of optimal reinforcement of structures based on topological derivative. *Proceedings of the III European Conference on Computational Mechanics*, Mota Soares C et al. (Eds), Lisbon, Springer, 2006, CD-ROM
- [36] Bojczuk D., Mróz Z.: Determination of optimal actuator forces and positions in smart structures using adjoint method. *Struct. Multidisc. Optim.*, 30(2005), s. 308-319
- [37] Bojczuk D., Mróz Z.: Non-linear sensitivity analysis of discrete structures. *Found. Civ. Envir. Eng.*, 1(2002), s. 19-40
- [38] Bojczuk D., Mróz Z.: On optimal design of supports in beam and frame structures. *Struct. Optim.*, 16(1998), s. 47-57
- [39] Bojczuk D., Mróz Z.: Optimal design of truss and beam structures with account for topology variation. *Proceedings of the Second World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Zakopane, 26-30 maja, 1997, s. 517-523

- [40] Bojczuk D., Mróz Z.: Optimal design of trusses with account for topology variation. *Mech. Struct. Mach.*, 26(1998), s. 21-40
- [41] Bojczuk D., Mróz Z.: Optimal topology and configuration design of trusses with stress and buckling constraints. *Struct. Optim.*, 17(1999), s. 25-35
- [42] Bojczuk D., Mróz Z.: Sensitivity analysis for non-linear beams and frames. *J. Theor. and Appl. Mech.*, 32(1994), s. 867-886
- [43] Bojczuk D., Mróz Z.: Some applications of topological sensitivity derivative. *Proceedings of the Seventh Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Seul (Korea Płd.), May 21-25, 2007, s. 1817-1826
- [44] Bojczuk D., Mróz Z.: Topological derivative and finite topology variations in optimal design of structures. *Optimal shape design and modeling*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2004, s. 1-13
- [45] Bojczuk D., Mróz Z.: Topological sensitivity derivative and finite topology modifications: application to optimization of plates in bending. *Struct. Multidisc. Optim.*, 39(2009), s. 1-15
- [46] Bojczuk D., Mróz Z.: Topological sensitivity derivative with respect to area, shape and orientation of an elliptic hole in a plate. *Struct. Multidisc. Optim.*, 45(2012), s. 153-169
- [47] Bojczuk D.: Optimal design of beam structures supported by inclined bars. *Volume of Abstracts. 32<sup>nd</sup> Solid Mechanics Conference*, Zakopane, 1-5 września 1998, s. 87-88
- [48] Bojczuk D.: Optimal design of structures using finite topology modifications. *Volume of Abstracts. 33<sup>rd</sup> Solid Mechanics Conference*, Zakopane, 5-9 września 2000, s. 125-126
- [49] Bojczuk D.: Optimal design of trusses by control of self-equilibrated state of stress. *Proceedings of VII International Conference "Numerical Methods in Continuum Mechanics"*, Stara Lesna, Słowacja, 6-9 października 1998, s. 362-367
- [50] Bojczuk D., Rębosz-Kurdek A.: Optimal design of bar structures with their supports in problems of stability and free vibrations. *J. Theoret. Appl. Mech.*, 52(2014), s. 533-546
- [51] Bojczuk D., Rębosz-Kurdek A.: Topology and configuration optimization of trusses based on virtual bars concept. *Proceedings of the 10<sup>th</sup> World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Orlando, (Florida, USA), May 19-24, 2013, USB Flash Disk, paper ID: 5342
- [52] Bojczuk D., Rębosz-Kurdek A.: Topology optimisation of trusses using bars exchange method. *Bull. Pol. Acad. Sci. – Te.*, 60(2012), s. 185-189
- [53] Bojczuk D.: Sensitivity analysis of eigenfrequencies and their modes in initially stressed structures. *XVI Symposium "Vibrations in Physical Systems"*, Błażejewko, 23-26 maja, 1994, s. 65-66
- [54] Bojczuk D.: Sensitivity analysis of free transverse vibration frequencies of frames. *XIV Symposium "Vibrations in Physical Systems"*, Błażejewko, 23-26 maja, 1990, s. 63-64
- [55] Bojczuk D.: Sensitivity analysis of nonlinear truss and beam structures in finite element formulation. *Proceedings of the XIV Polish Conference on Computer Methods in Mechanics*, Rzeszów, 26-28 maja, 1999, s. 47-48
- [56] Bojczuk D., Szteleblak W.: Application of finite variations to topology and shape optimization of 2D structures. *J. Theoret. Appl. Mech.*, 44(2006), s. 323-349

- [57] Bojczuk D., Szteleblak W.: Design optimisation for plane elasticity problems using finite topology variations, *Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Conference on Computer Methods in Mechanics*, Wisła, 2003, CD-ROM
- [58] Bojczuk D., Szteleblak W.: Optimal repair and reinforcement of bar structures using finite topology variations, *Engineering Mechanics, 23<sup>rd</sup> International Conference, Book of Full Texts*, Edited by V. Fuis, Brno, 2017, s. 186-189
- [59] Bojczuk D., Szteleblak W.: Optimal repair and reinforcement of plates. *AIP Conf. Proc.*, 1922(2018), s: 150006-1÷150006-10
- [60] Bojczuk D., Szteleblak W.: Optimization of layout and shape of stiffeners in 2D stiffeners. *Comput. Struct.*, 86(2008), s. 1436-1446
- [61] Bojczuk D., Szteleblak W.: Some aspects of optimal design of plates by approaches based on topological derivative. *Volume of Abstracts. 35<sup>th</sup> Solid Mechanics Conference*, Kraków, 4-8 września 2006, s. 369-370
- [62] Bojczuk D., Szteleblak W.: Topology and shape optimization of plates using finite variations, *Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference on Computer Methods in Mechanics*, Częstochowa, 2005, CD-ROM
- [63] Bojczuk D.: Topology and configuration optimization of beam-support systems. *Proceedings of the XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics*, Poznań, 5-8 maja, 1997, s. 183-189
- [64] Bojczuk D.: Topology and configuration optimization of truss structures. *Conference Materials of Intensive School on “Optimal Design, Theory and Applications”*, Pavia, Italy, 16-21 September, 1996
- [65] Braibant V., Fleury C.: Shape optimal design using B-splines. *Comp. Method. Appl. M.*, 44(1984), s. 247-267
- [66] Burczyński T. (Ed.): Computational sensitivity analysis and evolutionary optimization of systems with geometrical singularities. *Zeszyty Naukowe Katedry Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki*, Politechnika Śląska, Gliwice, 2002
- [67] Burczyński T., Fedeliński P.: Shape sensitivity analysis of natural frequencies using boundary elements. *Struct. Optim.*, 2(1990), s. 47-54
- [68] Burczyński T., Kokot G.: Evolutionary algorithms and boundary element method in generalized shape optimization, *J. Theor. Appl. Mech.*, 41(2003), 2, 341-364
- [69] Burczyński T., Kokot G.: Topology optimization using boundary elements. *Proceedings of the XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics*, Poznań, 5-8 maja, 1997, s. 221-228
- [70] Burczyński T.: Recent advances in boundary element approach to design sensitivity analysis - a survey. [in:] *“Design sensitivity analysis”*, Eds. Kleiber M. and Hisada T., Atlanta Technology Publications, Atlanta, 1993, s. 1-25
- [71] Burczyński T., Szczepanik M., Kuś W.: Evolutionary optimization of stiffeners location in 2-D structures. *Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference on Computer Methods in Mechanics*. Częstochowa, 2005, CD-ROM
- [72] Burger M., Hackl B., Ring W.: Incorporating topological derivatives into level set method. *J. Comp. Phys.*, 194(2004), s. 344-362

- [73] Cardoso J.B., Arora J.S.: A variational method for design sensitivity analysis in non-linear structural systems. *AIAA J.*, 26(1988), s. 595-603
- [74] Cheng G.D., Guo X.:  $\varepsilon$ -relaxed approach in structural topology optimization. *Struct. Optim.*, 13(1997), s. 258-266
- [75] Cheng G.: Some developments of structural topology optimization. *Theoretical and Applied Mechanics*, Elsevier Science B. V. (1997), s. 379-394
- [76] Cheng K.-T., Olhoff N.: An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. *Int. J. Solids Struct.*, 17(1981), s. 305-323
- [77] Cherkaev A.V., Grabovsky Y., Movchan A.B., Serkov S.K.: The cavity of the optimal shape under the shear stresses. *Int. J. Solids Struct.*, 35(1998), s. 4391-4410
- [78] Cea J., Garreau S., Guillaume P., Masmoudi M.: The shape and topological optimizations connection. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188(2000), s. 713-726
- [79] Choi J., Kwak B.M.: Boundary integral equation method for shape optimization of elastic structures. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 26(1988), s. 1579-1595
- [80] Choi K.K., Haug E.J.: Shape design sensitivity analysis of elastic structures. *J. Struct. Mech.*, 11(1983), s. 231-269
- [81] Chuang Ching H., Hou Gene J.-W.: Eigenvalue sensitivity analysis of planar frames with variable joint and support locations. *AIAA J.*, 30(1992), s. 2138-2147
- [82] Chun Y.W., Hang E.J.: Two dimensional shape optimal design. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 13(1978), s. 311-336
- [83] Cox H.L.: The design of structures of least weight. Pergamon, London, 1956
- [84] Czarnecki S., Dzierżanowski G., Lewiński T.: Topology optimization of two-component plates, shells and 3d bodies, *Optimal shape design and modelling, Selected papers presented at WISDOM 2004*, Ed. Lewiński T., Sigmund O., Sokółowski J., Żochowski A., Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 15-29, 2004
- [85] Dailey R.L.: Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues. *AIAA J.*, 27(1989), s. 486-491
- [86] Dems K.: First and second-order shape sensitivity analysis of structures. *Struct. Optim.*, 3(1991), s. 79-88
- [87] Dems K., Mróz Z.: On a class of conservation rules associated with sensitivity analysis in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 22(1986), s. 737-758
- [88] Dems K., Mróz Z.: Sensitivity analysis and optimal design of interfaces in thermo-elastic structures. *Volume of Abstracts. 32<sup>nd</sup> Solid Mechanics Conference*, Zakopane, 1-5 września 1998, s. 265-266
- [89] Dems K., Mróz Z.: Sensitivity of buckling loads and vibration frequencies with respect to stiffness and initial strain parameters. *J. Struct. Mach.*, 17(1989), s. 431-457
- [90] Dems K., Mróz Z.: Shape sensitivity analysis and optimal design of physically nonlinear plates. *Arch. Mech.*, 41(1989), s. 481-501
- [91] Dems K., Mróz Z., Szeląg D.: Optimal design of rib-stiffeners in disks and plates. *Int. J. Solids Struct.*, 25(1989), s. 973-998
- [92] Dems K., Mróz Z.: Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis. I. Variation of material parameters within fixed domain. *Int. J. Solids Struct.*, 19(1983), s. 677-692

- [93] Dems K., Mróz Z.: Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis. II. Structure shape variation. *Int. J. Solids Struct.*, 20(1984), s. 527-552
- [94] Dems K.: Sensitivity analysis in thermal problems - I: Variation of material parameter within a fixed domain. *J. Thermal Stresses*, 9(1986), s. 303-324
- [95] Dems K.: Sensitivity analysis in thermal problems - II: Structural shape variation, *J. Thermal Stresses*, 10(1987), s. 1-16
- [96] Dems K., Turant J.: Sensitivity analysis and optimal design of elastic hinges and supports in beam and frame structures. *Mech. Struct. Mach.*, 25(1997)
- [97] Dems K.: Wieloparametrowa optymalizacja kształtu konstrukcji, Zeszyty Naukowe nr 371, Politechnika Łódzka, Łódź, 1980
- [98] Diaz A., Belding B.: On optimum truss design layout by a homogenization method. *Report CDL-90-2*, Department of Mechanical Engineering, Michigan State University, U.S.A., 1990
- [99] Diaz A., Bendsoe M. P.: Shape optimization of structures for multiple loading situations using homogenization method. *Struct. Optim.*, 4(1992), s. 17-22
- [100] Diaz A., Lipton R., Soto C.A.: A new formulation of the problem of optimum reinforcement of Reisner - Mindlin plates. *Comp. Method. Appl. M.*, 123(1994), s. 121-139
- [101] Dorn W.S., Gomory R.E., Greenberg H.J.: Automatic design of optimal structures. *J. de Mecanique*, 3(1964), s. 25-52
- [102] Eschenauer H.A., Kobelev V.V., Schumacher A.: Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Struct. Optim.*, 8(1994), s. 42-51
- [103] Eschenauer H.A., Olhoff N.: Topology optimization of continuum structures: a review. *Appl. Mech. Rev.*, 54(2001), s. 331-390
- [104] Feijóo R.A., Padra C., Saliba R., Taroco E., Venere M.J.: Shape sensitivity analysis for energy release rate evaluation and its application to the study of three-dimensional cracked bodies. *Comp. Meth. Appl. M.*, 188(2000), s. 649-664
- [105] Fernandes P., Guedes J.M., Rodrigues H.: Topology optimization of three-dimensional linear elastic structures with a constraint on “perimeter”. *Struct. Multidisc. Optim.*, 73(1999), s. 308-319
- [106] Fung Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa, 1969
- [107] Gao X.-L.: A general solution of an infinite elastic plate with an elliptic hole under biaxial loading. *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 67(1996), s. 95-104
- [108] Garcia M.J., Gonzales C.A.: Shape optimisation of continuum structures via evolution strategies and fixed grid finite element analysis. *Comput. Struct.*, 26(2004), s. 583-594
- [109] Garcia M.J., Steven G.P.: Fixed grid finite elements in elasticity problems. *Eng. Computation.*, 16(1999), s. 145-164
- [110] Garreau S., Guillaume P., Masmoudi M.: The topological asymptotic for PDE systems: the elasticity case. *SIAM J. Control Optim.*, 39(2001), s. 1756-1778
- [111] Garstecki A., Glema A.: Sensitivity analysis and optimal redesign of columns in the state of initial distortions and prestress. *Struct. Optim.*, 3(1991), s. 141-148
- [112] Garstecki A., Mróz Z.: Optimal design of supports of elastic structures subjected to loads and initial distortions. *Mech. Struct. Mach.*, 15(1987), s. 47-68

- [113] Garstecki A.: Structural sensitivity analysis and optimal design of frames with respect to joint location. *Contr. & Cyber.*, 23(1994), s. 407-426
- [114] Gelfand I.M., Fomin S.W.: Rachunek wariaacyjny. PWN, Warszawa, 1972
- [115] Gerald C.F., Wheatley P.O.: Applied numerical analysis, Addison-Wesley Publishing Company, 1995
- [116] Gill P.E., Murray W., Saunders M.A., Wright M.H.: Computing forward-difference intervals for numerical optimization. *SIAM J.: Scientific and Statistical Computations*, 4(1983), s. 310-321
- [117] Graczykowski C., Lewiński T.: Michell cantilevers constructed within a halfstrip. Tabulation of selected benchmark results. *Struct. Multidisc. Optim.*, 42(2010), s. 869-877
- [118] Graczykowski C., Lewiński T.: Michell cantilevers constructed within trapezoidal domains - Part I: Geometry of Hencky nets. *Struct. Multidisc. Optim.*, 32(2006), s. 347-368.
- [119] Graczykowski C., Lewiński T.: Michell cantilevers constructed within trapezoidal domains - Part II: Virtual displacement fields. *Struct. Multidisc. Optim.*, 32(2006), s. 463-471.
- [120] Graczykowski C., Lewiński T.: Michell cantilevers constructed within trapezoidal domains - Part III: Force fields. *Struct. Multidisc. Optim.*, 33(2007), s. 27-46.
- [121] Graczykowski C., Lewiński T.: Michell cantilevers constructed within trapezoidal domains - Part IV: Complete exact solutions of selected optimal designs and their approximations by trusses of finite number of joints. *Struct. Multidisc. Optim.*, 33(2007), s. 113-129.
- [122] Graczykowski C., Lewiński T.: The lightest plane structures of a bounded stress level transmitting a point load to a circular support. *Contr. & Cyber.*, 34(2005), s. 227-253
- [123] Guedes J.M., Kikuchi N.: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element method. *Comp. Meth. Appl. M.*, 83(1990), s. 143-198
- [124] Grinmeanu I., Chang K.H., Choi K.K., Chen J.S.: Design sensitivity analysis of hyperelastic structures using a meshless method. *AIAA J.*, 36(1998), s. 618-627
- [125] Gutkowski W.: Controlled enumeration with constraints variation in structural optimization. *ZAMM*, 72(1992), s. 447-452
- [126] Gutkowski W., Mróz Z. (Eds): WCSMO-2 Second World Congress of Structural and multidisciplinary optimization. IFTR, Warsaw, 1997
- [127] Haftka R.T., Adelman H.M.: Recent developments in structural sensitivity analysis. *Struct. Optim.*, 1(1989), s. 137-151
- [128] Haftka R.T., Cohen B.A., Mróz Z.: Derivatives of buckling loads and vibration frequencies with respect to stiffness and initial strain parameters. *J. Appl. Mech.*, 57(1990), s. 18-24
- [129] Haftka R.T., Grandhi R.V.: Structural shape optimization – a survey. *Comp. Method. Appl. M.*, 57(1986), s. 91-106
- [130] Haftka R.T., Gürdal Z.: Elements of structural optimization. Kluwer Academic Publishers, 1992
- [131] Haftka R.T.: Integrated nonlinear structural analysis and design. *AIAA J.*, 27(1989), s. 1622-1627

- [132] Haftka R.T., Mróz Z.: First- and second-order sensitivity analysis of linear and nonlinear structures. *AIAA J.*, 24(1986), s. 1187-1192
- [133] Haftka R.T.: Semi-analytical static non-linear structural sensitivity analysis. *AIAA J.*, 31(1994), s. 1307-1312
- [134] Hammer V.B., Olhoff N.: Topology optimization of continuum structures subjected to pressure loading. *Struct. Optim.*, 19(2000), s. 85-92
- [135] Hashin Z.: Analysis of composite materials – a survey. *J. Appl. Mech.*, 50(1983), s. 481-505
- [136] Hassani B., Hinton E.: A review of homogenization and topology optimization. I-Homogenization theory for media with periodic structure. *Comput. Struct.*, 69(1998), s. 707-718
- [137] Hassani B., Hinton E.: A review of homogenization and topology optimization. II-Analytical and numerical solution of homogenization equations. *Comput. Struct.*, 69(1998), s. 719-738
- [138] Hassani B., Hinton E.: A review of homogenization and topology optimization. III-Topology optimization using optimality criteria. *Comput. Struct.*, 69(1998), s. 739-756
- [139] Haug E.I., Choi K.K., Komkov V.: Design sensitivity analysis of structural systems. Academic Press, 1989
- [140] Hemp W.S.: Optimum structures. Clarendon, Oxford, 1973
- [141] Holnicki-Szulc J., Gierliński J.: Structural analysis, design and control by the virtual distortion method. John Wiley & Sons, Chichester, 1995
- [142] Holnicki-Szulc J., Gierliński J.: Structural modifications simulated by initial distortions. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28(1989), s. 645-666
- [143] Hsieh C.C., Arora J.S.: Structural design sensitivity analysis with general boundary conditions: static problem. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 20(1984), s. 1661-1670
- [144] Il'in A.M., Gadyl'shin R.R.: On the limits of applicability of regular perturbation theory for a membrane with a narrow crack (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk.*, 380(2001), s. 172-175
- [145] Il'in A. M.: Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems. Translations of Mathematical Monographs, 102(1992), AMS
- [146] Iott J., Haftka R.T., Adelman H.M.: Selecting step sizes in sensitivity analysis by finite differences. *NASA TM-86382*, 1985
- [147] Jido M., Otazawa T., Kobayashi K.: Optimal repair and inspection rules under uncertainty. *J. Infrastruct. Syst.*, 14(2008), s. 150-158
- [148] Jones R.M.: Mechanics of composite materials. New York: Mc Graw – Hill, 1975
- [149] Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B.: Effective properties of solids with cavities of various shapes. *Appl. Mech. Rev.*, 47(1994), s. 151-174
- [150] Kallassy A., Marcellin J.L.: Optimization of stiffened plates by genetic search. *Struct. Optim.*, 13(1997), s. 134-141
- [151] Kączkowski Z.: Płyty. Obliczenia statyczne. Warszawa: Arkady, 2000
- [152] Kegl M.: Shape optimal design of structures: an efficient shape representation concept. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 49(2000), s. 1571-1588

- [153] Khludnev A.M., Novotny A.A., Sokołowski J., Żochowski T.: Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions. *J. Mech. Phys. Solids*, 57(2009), s. 1718-1732
- [154] Kienzler R., Fischer F.D., Fratzl P.: On energy changes due to formation of a circular hole in an elastic plate, *Arch. Appl. Mech.*, 76(2006), s. 681-697
- [155] Kim N.H., Choi K.K., Botkin M.E.: Numerical method for shape optimization using meshfree method. *Struct. Multidisc. Optim.*, 24(2002), s. 418-429
- [156] Kim H., Querin O.M., Steven G.P., Xie Y.M.: A method for varying the number of cavities in an optimized topology using evolutionary structural optimization. *Struct. Multidisc. Optim.*, 19(2000), s. 140-147
- [157] Kiciak P.: Podstawy modelowania krzywych i powierzchni, WNT, Warszawa, 2005
- [158] Kirsch U.: Fundamental properties of optimal topologies. [in:] "Topology optimization of structures", Kluwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands, 1993, s. 3-18
- [159] Kirsch U.: Integration of reduction and expansion processes in layout optimization. *Struct. Optim.*, 11(1996), s. 13-18
- [160] Kirsch U.: On singular topologies in optimum structural design. *Struct. Optim.*, 2(1990), s. 39-45
- [161] Kirsch U.: Optimal topologies of structures. *Appl. Mech. Rev.*, 42(1989), s. 223-239
- [162] Kleiber M. (red.): Komputerowe metody mechaniki ciała stałego, PWN, Warszawa, 1995
- [163] Kleiber M., Hien T.D., Postek E.: Incremental finite element sensitivity for nonlinear mechanics applications. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 37(1994), s. 3291-3308
- [164] Kleiber M.: Parameter sensitivity in nonlinear mechanics. John Wiley & Sons, Chichester, 1997
- [165] Kołakowski P.: Analiza wrażliwości i optymalne projektowanie konstrukcji kratowych metodą dystorsji wirtualnych. IPPT PAN, Warszawa, 1998
- [166] Komarakul-Na-Nakorn A., Arora J.S.: Stability criteria: a review. *Comput. Struct.*, 37(1990), s. 35-49
- [167] Kowalczyk M., Bojczuk D.: Non-linear incremental analysis of loading and design sensitivity problems. *Mech. Struct. Mach.* 24(1996), s. 331-360
- [168] Kozłowski W., Mróz Z.: Optimal design of solids plates. *Intern. J. Solids Struct.*, 5(1969), s. 781-794
- [169] Krog L.A., Olhoff N.: Optimum topology and reinforcement design of disk and plate structures with multiple stiffness and eigenfrequency objectives. *Comput. Struct.*, 72(1999), s. 535-563
- [170] Lam Y.C., Santhikumar S.: Automated rib location and optimization for plate structures. *Struct. Multidisc. Optim.*, 25(2003), s. 35-45
- [171] Landriani G.S., Rovati M.: Optimal design for 2-D structures made of composite materials. *ASME J of Eng Materials and Technology*, 113(1991); s. 55-63
- [172] Lee T.H., Arora J.S.: A computational method for design sensitivity analysis of elasto-plastic structures. *Comp. Meth. Appl. M.*, 122(1995), s. 27-50

- [173] Lewiński T.: A note on averaging of stiffnesses of thin elastic periodic plates. *Engineering Transactions*, 34(1986), s. 337-352
- [174] Lewiński T., Czarnecki S., Dzierżanowski G., Sokół T.: Topology optimization in structural mechanics. *Bull. Pol. Acad. Sci. – Te.*, 61 (2013), s. 23-37
- [175] Lewiński T.: Michell structures formed on surfaces of revolution. *Struct. Multidisc. Optim.*, 28(2004), s. 20-30
- [176] Lewiński T., Rozvany G.I.N.: Analytical benchmarks for topological optimization IV: square-shaped line support. *Struct. Multidisc. Optim.*, 36(2008), s. 143-158
- [177] Lewiński T., Rozvany G.I.N.: Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization II: three- sided polygonal supports. *Struct. Multidisc. Optim.*, 33(2007), s. 337-349
- [178] Lewiński T., Rozvany G.I.N.: Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization III: L-shaped domains. *Struct. Multidisc. Optim.*, 35(2008), s. 165-174
- [179] Lewiński T., Rozvany G.I.N., Sokół T., Bołbotowski K.: Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization III: L-shaped domains revisited. *Struct. Multidisc. Optim.*, 47(2013), s. 937-942
- [180] Lewiński T., Sokołowski J.: Topological derivative for nucleation of non-circular voids. Rapport de Recherche No 3439, INRIA-Lorraine, 1998
- [181] Lewiński T., Sokołowski J.: Optimal shells formed on a sphere. The topological derivative method. Rapport de Recherche No 3798, INRIA-Lorraine, 1999
- [182] Lewiński T., Sokół T., Graczykowski C.: Michell structures. Springer International Publishing AG, Cham, Switzerland, 2019
- [183] Lewiński T., Telega J.J.: Plates, laminates and shells: asymptotic analysis and homogenisation. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1999
- [184] Lewiński T., Zhou M., Rozvany G.I.N.: Extended exact solutions for least-weight truss layouts - Part I: Cantilever with a horizontal axis of symmetry. *Int. J. Mech. Sci.*, 36(1994), s. 375-398
- [185] Lewiński T., Zhou M., Rozvany G.I.N.: Extended exact solutions for least-weight truss layouts - Part II: Unsymmetric cantilevers. *Int. J. Mech. Sci.*, 36(1994), s. 399-419
- [186] Li Q., Steven G.P., Xie Y.M.: On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization. *Struct. Optim.*, 18(1999), s. 67-73
- [187] Liu Xiaojian, Begg D.W., Fishwick R.J.: Genetic approach to optimal topology/controller design of adaptive structures. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 41(1998), s. 815-830
- [188] Luongo A.: Eigensolutions sensitivity for nonsymmetric matrices with repeated eigenvalues. *AIAA J.*, 31(1993), s. 1321-1328
- [189] Marczewska I., Sosnowski W., Marczewski A., Bednarek T.: Topology and sensitivity-based optimization of stiffened plates and shells. Proceedings of the Fifth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, Lido di Jesolo, Italy, 2003, CD-ROM
- [190] Marks M.: On optimal orientation of fibres in disc element. *Archives of Civil Engineering*, 50(2004), s. 365-378

- [191] Maute K., Ramm E.: Adaptive topology optimization. *Struct. Optim.*, 10(1995), s. 100-112
- [192] McKeown J.J.: Growing optimal pin-jointed frames. *Struct. Optim.*, 15(1998), s. 92-100
- [193] Miannay D.P.: Fracture Mechanics. Springer, Mechanical Engineering Series, 1998
- [194] Michell A.G.M.: The limits of economy of material in frame structures. *Phil. Mag.*, 8(1904), s. 589-597
- [195] Mills-Curran C.W.: Calculation of eigenvector derivatives for structures with repeated eigenvalues. *AIAA J.*, 26(1988), s. 867-871
- [196] Mlejnek H.P.: Adaptive topology optimization. *Struct. Optim.*, 5(1992), s. 64-69
- [197] Morán A., Oñate E., Miguel J.: A general procedure for deriving symmetric expression for the secant and tangent stiffness matrices in finite element analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 42(1998), s. 219-236
- [198] Mróz Z., Bojczuk D.: Finite topology variations in optimal design of structures. *Struct. Multidisc. Optim.*, 25(2003), s. 153-173
- [199] Mróz Z., Bojczuk D.: Optimal design evolution with finite topology variations. *Proceedings of Fourth Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Dalian (Chiny), June 4-8, 2001, CD-ROM
- [200] Mróz Z., Bojczuk D.: Shape and topology sensitivity analysis and its application to structural design. *Arch. Appl. Mech.*, 82(2012), s. 1541-1555
- [201] Mróz Z., Bojczuk D.: Sensitivity analysis of truss and frame structures in critical states. *Mech. Struct. Mach.*, 24(1996), s. 103-132
- [202] Mróz Z., Bojczuk D.: Topological derivative concept in optimal design of structures. *Proceedings of the Third World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Amherst (USA), May 17-21, 1999, CD-ROM
- [203] Mróz Z., Bojczuk D.: Topological derivative and its application in optimal design of truss and beam structures for displacement, stress and buckling constraints. *Topology Optimization of Structures and Composite Continua*, Rozvany GIN, Olhof N (Eds.), Kluwer Ac Publ, 2000, s. 91-105
- [204] Mróz Z., Bojczuk D.: Topological sensitivity derivative and its application to analysis of nucleation and growth of inclusions and voids in structures. *Proceedings of the 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics*, Warsaw, 2011, CD-ROM
- [205] Mróz Z., Bojczuk D.: Topological sensitivity derivative: application in optimal design and material science. *Found. Civ. Envir. Eng.*, 7(2006), s. 229-250
- [206] Mróz Z.: Design sensitivity of critical loads and vibration frequencies of non-linear structures. [in:] "Optimization of Large Structural Systems", t.1, Ed. Rozvany G.I.N., Kluwer Academic Publishers, 1993
- [207] Mróz Z., Haftka R.T.: Design sensitivity of non-linear structures in regular and critical states. *Intern. J. Solids Struct.*, 31(1994), s. 2071-2098
- [208] Mróz Z., Haftka R.T.: Sensitivity of buckling loads and vibration frequencies of plates. [in:] "Studies in Applied Mechanics, Vol.19: Buckling of Structures", J. Sing. Anniv. Vol., Ed. Elishakoff I. et al., Elsevier, 1988

- [209] Mróz Z., Kamat M., Plaut R.: Sensitivity analysis and optimal design of non-linear beams and plates. *J. Struct. Mech.*, 13(1985), s. 245-266
- [210] Mróz Z., Lekszycki T.: Optimal support reaction in elastic frame structures. *Comput. Struct.*, 14(1982), s. 179-185
- [211] Mróz Z.: Multiparameter optimal design of plates and shells. *J. Struct. Mech.*, 1(1973), s. 371-392
- [212] Mróz Z., Piekarski J.: First and second order design sensitivity at bifurcation point. [in:] “*Advances in Structural Optimization*”, Ed. Herskovits J., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995
- [213] Mróz Z., Piekarski J.: Sensitivity analysis and optimal design of non-linear structures. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 42(1998), s. 1231-1262
- [214] Mróz Z., Rozvany G. I. N.: Optimal design of structures with variable support positions. *J. Opt. Theory & Appl.*, 15(1975), s. 85-101
- [215] Mróz Z.: Sensitivity analysis and optimal design with account for varying shape and support conditions. [in:] “*Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems*”, Ed. Mota Soares C. A., Series F, Springer-Verlag, 1987
- [216] Mura T.: Micromechanics of Defects in Solids. Martinus Nijhoff Publ., Hague, 1982.
- [217] Murthy D.V., Haftka R.T.: Derivatives of eigenvalues and eigenvectors of general complex matrix. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 26(1988), s. 293-311
- [218] Muskhelishvili N.I.: Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. P. Noordhoff Ltd, Gronigen – Holland, 1953
- [219] Nazarov S.A., Sokołowski J.: Asymptotic analysis of shape functionals. *J. Math. Pure Appl.*, 82(2003), s. 125-196
- [220] Nazarov S.A., Sokołowski J., Specovius-Neugebauer M.: Polarization matrices in anisotropic heterogeneous elasticity. *Asymptotic Anal.*, 68(2010), s. 189-221
- [221] Novotny A.A., Feijóo R.A., Padra C., Taroco E.: Topological sensitivity analysis applied to topology design of Kirchhoff's bending problem. *Control and Cybernetics*, 34(2005), s. 339-361
- [222] Novotny A.A., Feijóo R.A., Taroco E., Padra C.: Topological sensitivity analysis. *Comp. Meth. Appl. M.*, 192(2003), s. 803-829
- [223] Novotny A.A., Sokołowski J., Żochowski A.: Topological derivatives of shape functionals. Part I: theory in singularly perturbed geometrical domains. *J. Optim. Theory Appl.*, 180(2019), s. 341-373
- [224] Novotny A.A., Sokołowski J., Żochowski A.: Topological derivatives of shape functionals. Part II: first-order method and applications. *J. Optim. Theory Appl.*, 180(2019), s. 683-710
- [225] Novotny A.A., Sokołowski J., Żochowski A.: Topological derivatives of shape functionals. Part III: second-order method and applications. *J. Optim. Theory Appl.*, 181(2019), s. 1-22
- [226] Oberndorfer J.M., Achitziger W., Hörlein H.R.E.M.: Two approaches for truss topology optimization: a comparison for practical use. *Struct. Optim.*, 11(1996), s. 137-144

- [227] Ojalvo I.U.: Efficient computation of mode-shape derivatives for large dynamic systems. *AIAA J.*, 25(1987), s. 1386-1390
- [228] Olhoff N., Bendsoe M.P., Rasmussen J.: On CAD-integrated structural topology and design optimization. *Comp. Meth. Appl. M.*, 89(1991), s. 259-279
- [229] Olhoff N., Rasmussen J., Lund E.: A method of “exact” numerical differentiation for error elimination in finite-element-based semi-analytical shape sensitivity analysis. *Mech. Struct. Mech.*, 21(1993), s. 1-66
- [230] Olhoff N., Rozvany G.I.N. (Eds): WCSMO-1 Structural and multidisciplinary optimization. Pergamon, Oxford, 1995
- [231] Ortega-Estrada C., Trejo R., De Leon D., Campos D.: Optimal plan for inspection and maintenance of structural components by corrosion. *Proceedings of the World Congress on Engineering, Vol. I*, WCE 2013, London, 2013, s. 548-552
- [232] Osher S., Santosa F.: Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints: I. Frequencies of a two-density inhomogeneous drum. *J. Comp. Phys.*, 171(2001), s. 272-288
- [233] Osher S., Sethian J. A.: Front propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comp. Phys.*, 78(1988), s. 12-49
- [234] Patnaik S.N., Guptill J.D., Berke L.: Singularity in structural optimization. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 36(1993), s. 931-944
- [235] Pedersen P.: On optimal orientation of orthotropic materials. *Struct. Optim.*, 1(1989), s. 101-106
- [236] Pedersen P.: On thickness and orientation design with orthotropic materials. *Struct. Optim.*, 3(1991), s. 69-78
- [237] Pedersen P.: Topology optimization of three dimensional trusses. [in:] “Topology optimization of structures”, Kluwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands, 1993
- [238] Petryk H., Mróz Z.: Time derivatives of integrals and functionals defined on varying volume and surface domains. *Arch. Mech.*, 38(1996), s. 697-724
- [239] Poteralski A.: Optymalizacja immunologiczna układów mechanicznych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2015
- [240] Praca zbiorowa pod redakcją Brandta A.M.: Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1977
- [241] Praca zbiorowa pod redakcją Rakowskiego G.: Mechanika budowli z elementami ujęcia komputerowego. Arkady, Warszawa, 1984
- [242] Prager W.: A note on discretized Michell structures. *Comp. Meth. Appl. M.*, 3(1974), s. 349-355
- [243] Prager W.: Nearly optimal design of trusses. *Comput. Struct.*, 8(1978), s. 451-454
- [244] Prager W., Rozvany G.I.N.: Optimal layout of grillages. *J. Struct. Mech.*, 5(1977), s. 1-18
- [245] Rakowski G., Kacprzyk Z.: Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa, 1993
- [246] Rakowski G.: Sprężystość. Problemy i rozwiązania. Metody analityczne i numeryczne. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej. Kielce, 2001

- [247] Reynolds D., McConnachie J., Bettess P., Christie W.C., Bull J.W.: Reverse adaptivity – a new evolutionary tool for structural optimization. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 45(1999), s. 52-552
- [248] Rossow H.P., Taylor J.E.: A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets. *AIAA J.*, 11(1973), s. 1566-1569
- [249] Rozvany G.I.N.: A critical review of established methods of structural topology optimization. *Struct. Multidisc. Optim.*, 37(2009), s. 319-323
- [250] Rozvany G.I.N.: Analytical treatment of some extended problems in structural optimization. Part I. *J. Struct. Mech.*, 3(1975), s. 359-385
- [251] Rozvany G.I.N.: Analytical treatment of some extended problems in structural optimization. Part II. *J. Struct. Mech.*, 3(1975), s. 387-402
- [252] Rozvany G.I.N., Bendsoe M.P., Kirsch U.: Layout optimization of structures. *Appl. Mech. Rev.*, 48(1995) , s. 41-119
- [253] Rozvany G.I.N., Birker T.: Generalized Michell structures - exact least-weight truss layouts for combined stress and displacement constraints. Part I - General theory for plane trusses. *Struct. Optim.*, 9(1995), s. 78-86
- [254] Rozvany G.I.N., Birker T.: On singular topologies in exact layout optimization. *Struct. Optim.*, 8(1994), s. 228-235
- [255] Rozvany G.I.N.: Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system buckling constraints. *Struct. Optim.*, 11(1996), s. 213-217
- [256] Rozvany G.I.N., Hill R.D.: General theory of optimal load transmission by flexure. *Adv. Appl. Mech.*, 16(1976), s. 183-308
- [257] Rozvany G.I.N.: Lay-out theory for grid-type structures. [in:] *Topology optimization of structures*”, Kluwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands, 1993, s. 251-272
- [258] Rozvany G.I.N., Sokół T.: Exact truss topology optimization: Allowance for support costs and different permissible stresses in tension and compression - Extensions of a classical solution by Michell. *Struct. Multidisc. Optim.*, 45(2012), s. 367-376
- [259] Rozvany G.I.N.: Structural design via optimality criteria. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989
- [260] Rozvany G.I.N., Zhou M., Birker T.: Generalized shape optimization without homogenization. *Struct. Optim.*, 4(1992), s. 250-252
- [261] Ruiter M.J. de, Van Keulen F.: Topology optimization using a topological function description. *Struct. Multidisc. Optim.*, 26(2004), s. 406-414
- [262] Sethian J.A., Wiegmann A.: Structural boundary design via level set and immersed interface methods. *J. Comp. Phys.*, 163(2000), s. 489-528
- [263] Sheu C.Y., Prager W.: Recent developments in optimal structural design. *Appl. Mech. Rev.*, 21(1968), s. 985-992
- [264] Sigmund O.: A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Struct. Multidisc. Optim.*, 21(2001), s. 120-127
- [265] Sigmund O., Petersson J.: Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Struct. Optim.*, 16(1998), s. 68-75

- [266] Silva M., Geubelle P.H., Tortorelli D.A.: Energy release rate approximation for small surface-breaking cracks using the topological derivative. *J. Mech. Phys. Solids*, 59(2011), s. 925-939
- [267] Silva M., Matalon M., Tortorelli D.A.: Higher order topological derivatives in elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 47(2010), s. 3053-3066
- [268] Sokołowski J., Żochowski A.: On the topological derivative in shape optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 37(1999), s. 1251-1272
- [269] Sokołowski J., Żochowski T.: Optimality conditions for simultaneous topology and shape optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 42(2003), s. 1198-1221
- [270] Sokół T.: A 99 line code for discretized Michell truss optimization written in Mathematica. *Struct. Multidisc. Optim.*, 43(2011), s. 181-190
- [271] Sokół T., Lewiński T.: On the solution of the three forces problem and its application to optimal designing of a class of symmetric plane frameworks of least weight. *Struct. Multidisc. Optim.*, 42(2010), s. 835-853
- [272] Sokół T., Lewiński T.: Optimal design of a class of symmetric plane frameworks of least weight. *Struct. Multidisc. Optim.*, 44(2011), s. 729-734
- [273] Sokół T., Lewiński T.: Simply supported Michell trusses generated by a lateral point load. *Struct. Multidisc. Optim.*, 54(2016), s. 1209-1224
- [274] Soto C.A., Diaz A.: On modelling of ribbed plates for shape optimization. *Struct. Optim.*, 6(1993), s. 175-188
- [275] Stok B., Mihelic A.: Two-stage design optimization of shell structures. *Struct. Eng. Review*, 8(1996), s. 91-97
- [276] Sutter T.R., Camarda C.J., Walsh J.L., Adelman H.M.: A comparison of several methods for the calculation of vibration mode-shape derivatives. *AIAA J.*, 26(1988), s. 1506-1511
- [277] Suzuki K., Kikuchi N.: A homogenization method for shape and topology optimization. *Comp. Method. Appl. M.*, 93(1991), s. 291-318
- [278] Szczepanik M.: Algorytmy rojowe w optymalizacji układów mechanicznych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2013
- [279] Szefer G., Mróz Z., Demkowicz L.: Variational approach to sensitivity analysis in non-linear elasticity. *Arch. Mech.*, 39(1987), s. 247-259
- [280] Szeląg D., Mróz Z.: Optimal design of elastic beams with unspecified support positions. *ZAMP*, 58(1978), s. 501-510
- [281] Szteleblak W., Bojczuk D.: Optimisation of rib layout in plate structures. *Proceedings of the 16th International Conference on Computer Methods in Mechanics*, Częstochowa, 2005, CD-ROM
- [282] Svanberg K.: The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 24(1987), s. 359-373
- [283] Taroco E.: Shape sensitivity analysis in linear elastic fracture mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188(2000), s. 697-712
- [284] Tenek L., Hagiwara I.: Optimal rectangular plate and shallow topologies using thickness distribution or homogenisation. *Comp. Method. Appl. M.*, 115(1994), s. 111-124

- [285] Thompson J.M.T., Hunt G.W.: A general theory of elastic stability. John Wiley & Sons, London, 1973
- [286] Thomsen J.: Optimization of composite disks. *Struct. Optim.*, 3(1992), s. 89-98
- [287] Timoshenko S.P., Gere J.M.: Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa, 1963
- [288] Timoshenko S.P., Goodier J.N.: Theory of elasticity. New York-Toronto-London: McGraw-Hill, 1951
- [289] Timoshenko S.P. , Woinowsky-Krieger S.: Theory of plates and shells. McGraw-Hill, 1959
- [290] Tortorelli D.A., Haber R.B.: First-order design sensitivities for transient conduction problems by an adjoint method. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28(1989), s. 733-752
- [291] Tortorelli D.A., Wang Z.: A systematic approach to shape sensitivity analysis. *Int. J. Solids Struct.*, 30(1993), s. 1181-1212
- [292] Van Goethem N., Novotny A.A.: Crack nucleation sensitivity analysis. *Math. Method Appl. Sci.*, 33(2010), s. 1978-1994
- [293] Venkayya V.B.: Structural optimization: a review and some recommendations. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 13(1978), s. 203-228
- [294] Wang X., Mei Y., Wang M.Y.: Incorporating topological derivatives into level set methods for structural topology optimization. "Optimal shape design and modeling", Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2004, s. 145-157
- [295] Wang M.Y., Wang X.M., Guo D.M.: A level set method for structural topology optimization. *Comp. Method. Appl. M.*, 192(2003), s. 227-246
- [296] Wang X., Wang M.Y., Guo D.: Structural shape and topology optimization in a level-set-based framework of region representation. *Struct. Multidisc. Optim.*, 27(2004), s. 1-19
- [297] Washizu K.: Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon Press, Oxford, 1975
- [298] Wasiutyński Z., Brandt A.M.: The present state of knowledge in the field of optimum design of structures. *Appl. Mech. Rev.*, 16(1963), s. 341-350
- [299] Wasiutyński Z., Brandt A.M.: The present state of knowledge in the field of optimum design of structures. *Appl. Mech. Surveys*, Spartan Books 1966, s. 435-450
- [300] Waszczyzyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M.: Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji. Arkady, Warszawa, 1990
- [301] Woźniak Cz. (red.): Mechanika sprężystych płyt i powłok. PWN, Warszawa, 2001
- [302] Wriggers P., Reese S.: Thermoelastic stability of trusses with temperature-dependent constitutive relations. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 35(1992), s. 1891-1906
- [303] Xia Q., Wang M.Y., Wang S., Chen S.: Semi-Lagrange method for level-set based structural topology and shape optimization. *Struct. Multidisc. Optim.*, 31(2006), s. 419-429
- [304] Xie Y.M., Steven G.P.: A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Comput. Struct.*, 49(1993), s. 885-896
- [305] Yang X.Y., Xie Y.M., Steven G.P., Querin O.M.: Bi-directional evolutionary method for stiffness optimization. *AIAA J.*, 37(1999), s. 1483-1488

- [306] Yao T.M., Choi K.K.: 3-D shape optimal design and automatic finite element regridding. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28(1989), s. 369-384
- [307] Zhao C., Hornby P., Steven G.P., Xie Y.M.: A generalized evolutionary method for numerical topology optimization of structures under static loading conditions. *Struct. Optim.*, 15(1998), s. 251-260
- [308] Zhou M.: Difficulties in truss topology optimization with stress and local buckling constraints. *Struct. Optim.*, 11(1996), s. 134-136
- [309] Zhou M., Rozvany G.I.N.: The COC algorithm. Part II: topological, geometrical and generalized shape optimization. *Comp. Method. Appl. M.*, 89(1991), s. 197-224
- [310] Zhou M., Pagaldipti N., Thomas H.L., Shyy Y.K.: An integrated approach to topology, sizing and shape optimization. *Struct. Multidisc. Optim.*, 5(2003), s. 308-317
- [311] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa, 1972

## **POCHODNA TOPOLOGICZNA I SKOŃCZONE MODYFIKACJE TOPOLOGII W OPTYMALNYM PROJEKTOWANIU KONSTRUKCJI TARCZOWYCH I PŁYTOWYCH**

W monografii przedstawiono metodykę wyznaczania pochodnej topologicznej oraz zastosowanie tej pochodnej do wspomaganego komputerowo optymalnego projektowania konstrukcji tarczowych i płytowych.

Przy użyciu metody układów sprzężonych sformułowano jednolite podejście do wyprowadzania wzorów na pochodne topologiczne. Polega ono na zastosowaniu analizy wrażliwości ze względu na ekspansję otworów czy inkluzji do wyznaczenia ogólnych wzorów na pochodne topologiczne. W celu uzyskania szczegółowych zależności konieczna jest znajomość stanów naprężenia, odkształcenia oraz przemieszczenia na brzegu otworu (inkluzji) i w jego otoczeniu oraz graniczne zachowanie tych stanów przy znikaniu otworów (inkluzji). W przypadku otworów kołowych i eliptycznych oraz inkluzji kołowych dla tarcz oraz w przypadku otworów kołowych dla płyt do wyprowadzenia zależności na pochodne topologiczne użyto odpowiednich rozwiązań analitycznych teorii sprężystości. Z kolei w sytuacji braku rozwiązań analitycznych dla konstrukcji zmodyfikowanych wprowadzeniem otworu (inkluzji) pochodną topologiczną można, na podstawie wzorów ogólnych, oszacować numerycznie.

W pracy wprowadzanie włókien i żeber usztywniających potraktowano także jako modyfikacje topologiczne. Wówczas, wybierając jako parametry topologiczne odpowiednio udział objętościowy włókien oraz szerokość żeber, wyprowadzono wzory na pochodne topologiczne przy wykorzystaniu teorii homogenizacji.

Należy zauważyć, że przedstawione rozważania łączące obliczanie pochodnych topologicznych z analizą wrażliwości umożliwiają jednolite podejście do optymalizacji topologii i kształtu. W celu przyspieszenia procesu optymalizacji w monografii zaproponowano usuwanie takich obszarów skończonych, gdzie odpowiednie pochodne topologiczne osiągają odpowiednio małe lub odpowiednio duże wartości. Sformułowano również warunki wprowadzania zarówno skończonych, jak i nieskończonymalych modyfikacji.

Na tej podstawie zaproponowano algorytmy heurystyczne złożone z dwóch wzajemnie powiązanych ze sobą etapów, a mianowicie optymalizacji topologii oraz optymalizacji kształtu i wymiarów. Takie podejście zastosowano także do zagadnień obejmujących wprowadzanie elementów usztywniających. Rozwiążane przykłady numeryczne potwierdzają skuteczność i użyteczność sformułowanych algorytmów.

Ponadto w monografii analizowano problemy optymalnej naprawy i/lub optymalnego wzmacniania niepodlegających modyfikacji płyt oraz tarcz przez wyprowadzanie dodatkowych elementów czy struktur wzmacniających. Zaproponowano odpowiedni algorytm heurystyczny optymalizacji oraz rozwiązano przykłady numeryczne ilustrujące jego działanie.

## S U M M A R Y

### **TOPOLOGICAL DERIVATIVE AND FINITE TOPOLOGY MODIFICATIONS IN OPTIMAL DESIGN OF PLATES IN PLANE STATE OF STRESS AND BENDING PLATES**

Methods of topological derivative determination and their application in computer aided optimal design of plates in plane state of stress and bending plates is considered in the paper.

The uniform approach to derivation of expressions for topological derivatives is presented using adjoint method. At first sensitivity analysis with respect to expansion of holes and inclusions is considered and next on this basis general formulae are derived. In order to get detailed expressions the knowledge of stress, strain and displacement states on the boundary between structure and hole or inclusion and their behavior in the case of the hole or inclusion disappearance, is required. Using known solutions from the elasticity theory the detailed formulae for topological derivatives were presented for introduction of circular and elliptical holes and circular inclusions for plates in plane state of stress and for introduction of circular holes for bending plates. However, when the lack of analytical solutions occurs, topological derivative can be estimated numerically using general formulae.

In this monograph introduction of stiffening fibers and ribs was also treated as topology modifications. Then, choosing appropriate topological parameters, namely non-dimensional volumetric fiber concentration and width of ribs and next using homogenization theory to determine stiffness coefficients for reinforced structure, expressions for topological derivatives were derived.

It is important to notice that the approach presented here enables uniform analysis of shape and topology optimization. However in order to accelerate the optimization process using knowledge of the topological derivative field in the structure domain it is proposed to remove of some subdomains, where topological derivative attains respectively small (big) values. The corresponding conditions of topology modifications were formulated.

On this basis heuristic algorithms composed of two mutually interacted steps, namely topology optimization and shape with size optimization, are formulated. This approach is also extended for problems with introduction of reinforcing elements. The numerical examples confirm applicability and usefulness of the formulated algorithms.

Also, the problem of optimal repair and/or optimal reinforcement of plates in unmodifiable state by introduction of additional elements or stiffening substructures, was formulated. The algorithm of optimal design was proposed and illustrative examples were solved.