

Tadeusz Stefański

TEORIA STEROWANIA

część I

Układy liniowe

Materiały pomocnicze
do wykładów i ćwiczeń
z teorii sterowania
dla studiów zaocznych

Politechnika Świętokrzyska

Kielce 2005

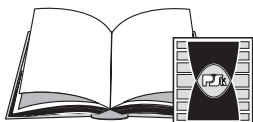
Tadeusz Stefański

TEORIA STEROWANIA

część I

Układy liniowe

Materiały pomocnicze
do wykładów i ćwiczeń
z teorii sterowania
dla studiów zaocznych



WYDAWNICTWO
POLITECHNIKI ŚWIĘTOKRZYSKIEJ
W KIELCACH

MATERIAŁY POMOCNICZE I INFORMACYJNE NR 155

Redaktor Naukowy serii ELEKTRYKA

prof. dr hab. inż. Roman NADOLSKI

Redaktor

Elżbieta WIKŁO

Korekta i formatowanie

Irena PRZEORSKA-IMIOŁEK

Skład komputerowy

Autor

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 2005

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część tej pracy nie może być powielana czy rozpowszechniana w jakiegokolwiek formie, w jakikolwiek sposób: elektroniczny bądź mechaniczny, włącznie z fotokopiowaniem, nagrywaniem na taśmy lub przy użyciu innych systemów, bez pisemnej zgody wydawcy.



25–314 Kielce, Al. 1000–lecia Państwa Polskiego 7, tel. (0–41) 34 24 581
www.tu.kielce.pl/wydawnictwo

Wyd. IV

Obj. 11,5 ark. wyd.

PL ISSN 0239–6394

Spis treści

PRZEDMOWA	7
1. WPROWADZENIE	9
1.1. Pojęcia podstawowe	9
1.1.1. Obiekty sterowania	11
1.1.2. Zasady automatycznego sterowania	13
1.2. Układy automatycznej regulacji	16
1.2.1. Schemat funkcjonalny układu regulacji automatycznej	16
1.2.2. Elementy układu regulacji automatycznej	17
1.3. Klasyfikacja układów sterowania	18
2. PODSTAWY TEORETYCZNE LINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH	21
2.1. Podstawy teoretyczne ciągłych układów dynamicznych	21
2.1.1. Właściwości przekształcenia Laplace'a	24
2.1.2. Odwrotne przekształcenie Laplace'a	25
2.2. Podstawy teoretyczne dyskretnych układów dynamicznych	38
2.2.1. Wprowadzenie	38
2.2.2. Analiza procesu próbkowania	41
2.3. Przekształcenie \mathcal{Z}	44
2.3.1. Definicja	44
2.3.2. Transformaty podstawowych funkcji	45
2.3.3. Właściwości przekształcenia \mathcal{Z}	46
2.3.4. Odwrotne przekształcenie \mathcal{Z}	47
3. METODY OPISU UKŁADÓW LINIOWYCH	52
3.1. Równania różniczkowe i różnicowe	52
3.1.1. Równania różniczkowe	52
3.1.2. Równania różnicowe	53
3.2. Transmitancje operatorowe	56
3.2.1. Transmitancja operatorowa układu ciągłego	56
3.2.2. Transmitancja operatorowa układu dyskretnego	58
3.3. Transmitancja widmowa	59
3.3.1. Transmitancja widmowa układu ciągłego	59
3.3.2. Transmitancja widmowa układu dyskretnego	62
3.4. Równania stanu	63
3.4.1. Równania stanu układów ciągłych	63
3.4.2. Równania stanu układów dyskretnych	66
3.5. Charakterystyki czasowe	68
3.5.1. Charakterystyki czasowe układów ciągłych	68
3.5.2. Charakterystyki czasowe układów dyskretnych	71
3.6. Charakterystyki częstotliwościowe	72
3.6.1. Charakterystyki częstotliwościowe układów ciągłych	72
3.6.2. Charakterystyki częstotliwościowe układów dyskretnych	76

3.6.3. Eksperymentalne wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych	81
3.6.4. Związek między charakterystykami czasowymi a częstotliwościowymi	82
4. METODY ANALIZY UKŁADÓW LINIOWYCH	84
4.1. Metody klasyczne	86
4.1.1. Rozwiązanie szczególne równania różniczkowego	86
4.1.2. Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego	88
4.1.3. Rozwiązanie równań różnicowych	91
4.2. Metody operatorowe	91
4.2.1. Schematy blokowe	91
4.2.2. Postać kanoniczna układu ze sprzężeniem zwrotnym	97
4.2.3. Dyskretna aproksymacja układów ciągłych	98
4.2.4. Podstawowe parametry członów dynamicznych i układów regulacji	103
4.2.5. Regulacja statyczna i astatyczna	107
4.3. Metody częstotliwościowe	110
4.3.1. Człony podstawowe	111
4.3.2. Wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych	123
4.4. Metody przestrzeni stanów	125
4.4.1. Wprowadzenie	125
4.4.2. Przedstawienie ciągłych układów sterowania w przestrzeni stanów	126
4.4.3. Przedstawienie dyskretnych układów sterowania w przestrzeni stanów	130
4.4.4. Rozwiązanie ciągłych równań stanu	133
4.4.5. Rozwiązanie dyskretnych równań stanu	135
5. STABILNOŚĆ	137
5.1. Wprowadzenie	137
5.2. Algebraiczne kryteria stabilności	140
5.3. Częstotliwościowe kryteria stabilności	142
5.3.1. Zapas stabilności	143
5.3.2. Kryterium Nyquista	144
5.3.3. Logarytmiczne kryterium stabilności	146
5.4. Stabilność układów dyskretnych	146
6. SYNTEZA UKŁADÓW LINIOWYCH	151
6.1. Wprowadzenie	151
6.2. Regulatory	152
6.2.1. Regulatory analogowe	152
6.2.2. Analogowe człony korekcyjne	158
6.2.3. Regulatory dyskretnie	160
6.3. Metody zwiększania dokładności statycznej	163
6.4. Metody syntezy ciągłych układów jednowymiarowych	164
6.4.1. Metody częstotliwościowe	165
6.4.2. Metody rozkładu pierwiastków równania charakterystycznego	166
6.4.3. Metody czasowe	169
6.4.4. Metody przestrzeni stanów	170

6.5. Metody syntezy układów dyskretnych	172
6.5.1. Określenie struktury regulatora dla zadanej transmitancji układu zamkniętego	173
6.5.2. Wyznaczanie wartości parametrów regulatora stanu	175
6.5.3. Wyznaczanie wartości parametrów klasycznych algorytmów regulacji	182
PYTANIA	184
ZADANIA	187
LITERATURA	193

PRZEDMOWA

Niniejsze materiały zostały opracowane na podstawie wykładów prowadzonych przez autora w Politechnice Świętokrzyskiej na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki oraz na Wydziale Mechatroniki i Budowy Maszyn. Przedstawiony materiał jest dostosowany do obowiązującego programu nauczania przedmiotu teoria sterowania na studiach zaocznych, wykładanego dla kierunku nauczania elektrotechnika. Zasadniczą uwagę zwrócono na problemy dotyczące dynamiki procesów. Treść materiałów obejmuje cztery zasadnicze części:

- pojęcia podstawowe teorii regulacji (rozdz. 1),
- metody opisu matematycznego układów liniowych (rozdz. 2 i 3),
- metody analizy teoretycznej liniowych układów dynamicznych (rozdz. 4 i 5),
- metody syntezy układów sterowania obiektami liniowymi (rozdz. 6).

Zagadnienia przedstawione w publikacji zostały zilustrowane licznymi przykładami. W celu ułatwienia studiowania podstaw automatyki mniejszą uwagę poświęcono stronie teoretycznej, rezygnując z przedstawiania dowodów lub omawiania przypadków rzadziej spotykanych w praktyce; odsyłając jednocześnie zainteresowanych Czytelników do literatury. W końcowej części materiałów do każdego rozdziału zamieszczono pytania i zadania bez rozwiązań, które powinny ułatwić uczenie się przerabianych partii materiału.

Autor

1. WPROWADZENIE

1.1. Pojęcia podstawowe

W rozwoju przemysłu stymulowanym przez dążenie do wzrostu produkcji, przy jednoczesnym zmniejszeniu zatrudnienia i zużycia surowców, można wyróżnić dwa etapy, zwane powszechnie rewolucjami przemysłowymi. **Etap pierwszy to etap mechanizacji.** Obserwowano wówczas silny rozwój konstrukcji i zastosowań maszyn oraz urządzeń, które zastępowały człowieka w jego pracy fizycznej. **Etap drugi to etap automatyzacji.** Miał wówczas miejsce rozwój takich środków technicznych, które pozwalały zastępować człowieka w jego pracy umysłowej. Automatyzacja zmniejszała przede wszystkim wysiłek umysłowy człowieka w procesie produkcyjnym. Każdy z tych etapów charakteryzował się więc intensywnym rozwojem środków produkcji, które zastępowały w procesie produkcyjnym pracę fizyczną i umysłową człowieka.

Nowe techniki i środki produkcji, wprowadzane w poszczególnych etapach, nie tylko zmniejszały wysiłek człowieka w procesie produkcyjnym. Powodowały one także wzrost produkcji, wydajności na jednego zatrudnionego i wzrost jakości produkcji, przy równoczesnym zmniejszaniu zużycia surowców i materiałów, a także energii na jednostkę produkcji. W obecnym okresie zarysowuje się nowa rewolucja przemysłowa, stanowiąca dalszy rozwój etapu automatyzacji. Wiąże się ona z postępem w dziedzinie technologii i konstrukcji układów cyfrowych oraz rozwojem techniki obliczeniowej. W tym nowym etapie postawiono sobie za cel budowę takich maszyn i urządzeń, które w szerszym stopniu zastępowałyby człowieka w procesie produkcyjnym, a więc zarówno w jego wysiłku fizycznym, jak i umysłowym.

Historię rozwoju automatyki można podzielić na trzy okresy [22]. Pierwszy okres, tzw. **okres sztuki**, obejmuje wiek XVIII i XIX. W tym czasie wzrastające zapotrzebowanie na urządzenia napędowe dla kopalń, warsztatów tkackich, warsztatów obróbki drewna i metalu oraz środków transportowych, doprowadziło do skonstruowania maszyny parowej (XVIII w.) oraz silnika spalinowego i elektrycznego (XIX w.). Zmechanizowane procesy technologiczne wymagały szybkiego i precyzyjnego dozoru, skonstruowano więc pierwsze regulatory, tj. pływakowy regulator poziomu wody w kotle (I.I. Połzunow, 1765 r.) oraz odśrodkowy regulator prędkości maszyny parowej (J. Watt, 1794 r.).

Regulator Watta z powodu swego działania proporcjonalnego prowadził do powstania statycznego uchybu prędkości maszyny (patrz rozdz. 4). Rozwiązanie tego problemu w ówczesnym okresie było ograniczone ze względu na brak odpowiedniej teorii analizy układów, a szczególnie analizy stabilności (jedynym wyjątkiem była praca J.C. Maxwella pt. „O regulatorach” z 1868 r.). Wprawdzie pojawiły się prace matematyków francuskich (np. H. Poincare, 1880 r.), zajmujących się jakościową teorią równań różniczkowych i prace wybitnych matematyków z zakresu stabilności równań różniczkowych (E.J. Routh, 1877 r., M.A. Lapunow, 1892 r. i A. Hurwitz, 1895 r.), lecz do lat pięćdziesiątych XX wieku znane były wyłącznie w kręgu matematyków.

Drugi okres obejmuje lata 1900 – 1940 i nazywany jest **okresem przejściowym** w rozwoju automatyki. Początek XX wieku przyniósł kilka wielkich wynalazków, wśród nich: pierwsze publiczne linie telefoniczne (1908 r.), zbudowanie triody (Lee de Forest, 1909 r.), zastosowanie taśmy montażowej w zakładach samochodowych H. Forda itd. Ponadto okres ten charakteryzował się wytwarzaniem i przesyłaniem energii na wielką skalę, narodzinami przemysłu lotniczego, gwałtownym rozwojem przemysłu przetwórczego i chemicznego. Tego rodzaju postęp spowodował opracowanie wielu konstrukcji pneumatycznych, elektrycznych i hydraulicznych regulatorów. Pojawiło się wówczas wiele prac teoretycznych z zakresu analizy stanów dynamicznych i badania stabilności układów (H. Nyquist, 1932 r., A.W. Michajłow, 1938 r.), a także książka M. Tolle’a o regulacji prędkości (1921 r.).

Trzeci i obecny okres, tzw. **okres nauki**, rozpoczął się na początku lat czterdziestych XX wieku. Zapoczątkował go wybuch II wojny światowej, co pociągnęło za sobą gwałtowny wzrost nakładów na rozwój przemysłu zbrojeniowego. Pojawiło się wiele nowych rozwiązań technicznych, m.in. systemy radiolokacji, nawigacji lotniczej i okrętowej, obrony przeciwlotniczej itd.

Prawdziwą rewolucją w dziedzinie automatyki było skonstruowanie w okresie II wojny światowej elektronicznej maszyny cyfrowej. Maszyny konstruowane kilka lat później, tzw. maszyny pierwszej generacji, zbudowane były z kilkunastu tysięcy lamp elektronicznych i mogły wykonywać kilka tysięcy operacji na sekundę. Wynalezienie tranzystora (1948 – 1949 r.) spowodowało rozwój maszyn matematycznych drugiej generacji, charakteryzujących się znacznie większą szybkością działania, dużo mniejszymi wymiarami, ciężarem i mocą zasilania, co znacznie wpłynęło na wzrost zastosowań tych maszyn do bezpośredniego sterowania procesami technologicznymi. Skonstruowanie elektronicznych obwodów scalonych

(1964 r.) zapoczątkowało rozwój maszyn matematycznych trzeciej generacji, których moc obliczeniowa wzrosła do kilku milionów operacji na sekundę.

W trzecim okresie nastąpił intensywny rozwój teorii automatyki (teorii sterowania). Przełomowymi pracami były prace poświęcone metodom częstotliwościowym (H.W. Bode, 1945 r., N.B. Nichols, 1946 r.), które pozwoliły uniknąć trudnego problemu, jakim była analiza równań różniczkowych wysokiego rzędu. Powstały także prace z teorii układów ze sprzężeniem zwrotnym, którą istotnie rozwinęła metoda miejsc geometrycznych (W.R. Evans, 1954 r.).

W latach pięćdziesiątych XX w. pojawiły się prace, które miały fundamentalne znaczenie dla rozwoju teorii optymalizacji (L.S. Pontriagin, 1956 r., R. Bellman, 1957 r.). Rozwinęły się także badania poświęcone procesom nieliniowym, procesom z uwzględnieniem zakłóceń losowych, układom impulsowym i cyfrowym.

Początek lat sześćdziesiątych zapoczątkował rozwój metod przestrzeni stanów, które wprowadziły odmienny punkt widzenia na teorię sterowania i jej zastosowanie. Ostatnie lata zaowocowały intensywnym rozwojem badań w zakresie teorii i zastosowań sterowania rozmytego, sztucznych sieci neuronowych, algorytmów genetycznych i algorytmów ewolucyjnych.

Całokształt problematyki związanej z automatyzacją procesów nazywa się **automatyką**. Automatyka jest to więc dyscyplina nauki i techniki zajmująca się teorią i praktyczną realizacją nadzoru i sterowania obiektami technologicznymi bez udziału lub z ograniczonym udziałem człowieka. Możemy w niej wyróżnić trzy podstawowe działy:

1. Podstawy teoretyczne automatyki (teoria sterowania).
2. Budowa elementów i urządzeń automatyki.
3. Zastosowanie automatyki w różnych dziedzinach techniki.

W niniejszych materiałach będą omawiane zagadnienia związane z pierwszym z wymienionych działów.

1.1.1. Obiekty sterowania

Przedmiotem automatyzacji mogą być różnorodne procesy zachodzące w otaczającym nas świecie, takie jak np. procesy technologiczne, procesy przetwarzania informacji, procesy zarządzania itp. W kręgu dalszych zainteresowań będą to głównie procesy technologiczne, związane z produkcyjną działalnością człowieka.

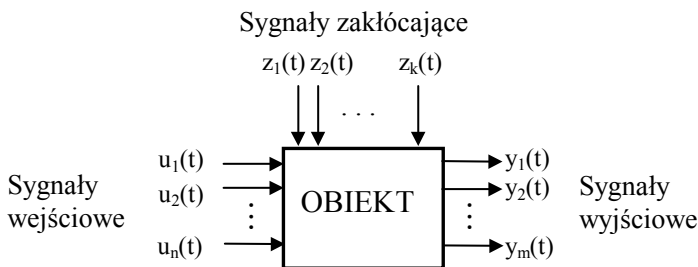
Przez **proces technologiczny** rozumie się określoną czynność lub zespół czynności, polegającą na przetwarzaniu pewnych wielkości fizycznych z danej formy

na inną. W zależności od rodzaju przetwarzania i od rodzaju wielkości fizycznych biorących udział w tym przetwarzaniu, można mówić o różnych rodzajach procesu technologicznego. I tak, w zależności od rodzaju przetwarzania, można mówić o procesach przetwórczych jako o procesach przetwarzania stanu fizycznego lub chemicznego materii (np. reakcje chemiczne, wytop stali), o procesach obróbczych jako o procesach przetwarzania kształtu materii (np. obróbka metali) itp. Natomiast w zależności od wielkości występujących w przetwarzaniu można mówić o procesach: chemicznych, hutniczych, cieplnych, transportowych itd.

W automatyce każdy proces podlegający sterowaniu jest nazywany **obiektem sterowania** lub krótko obiektem. Obiekt można uważać za pewną „całość” powiązaną z otoczeniem przez oddziaływania, którymi wprowadza lub wyprowadza się różnorodne strumienie materiałowe, energetyczne lub informacyjne – konieczne dla normalnej pracy obiektu. Zmiana wartości natężenia niektórych z tych strumieni (zarówno wejściowych, jak i wyjściowych) może wpływać na procesy fizyczne zachodzące w obiekcie. Jeśli zmiana ta jest wprowadzona celowo, to takie postępowanie nazywa się **sterowaniem**, a strumienie podlegające tym zmianom nazywamy **wielkościami wejściowymi** obiektu lub sygnałami sterującymi. Jeśli czynniki wywołujące zmiany strumieni są niekontrolowane, to mamy do czynienia z **zakłóceniami** – zwanymi wielkościami lub sygnałami zakłócającymi. Strumienie wyjściowe nazywa się **wielkościami** lub **sygnałami wyjściowymi**. Są one wynikiem przetwarzania w obiekcie sterowania strumieni wejściowych.

Sterowanie jest to więc celowe oddziaływanie na obiekt za pośrednictwem wielkości wejściowych, aby jego wielkości wyjściowe przyjęły określoną postać lub wartość.

Z punktu widzenia automatyki, każdy obiekt sterowania można przedstawić w postaci, którą ilustruje rysunek 1.1.

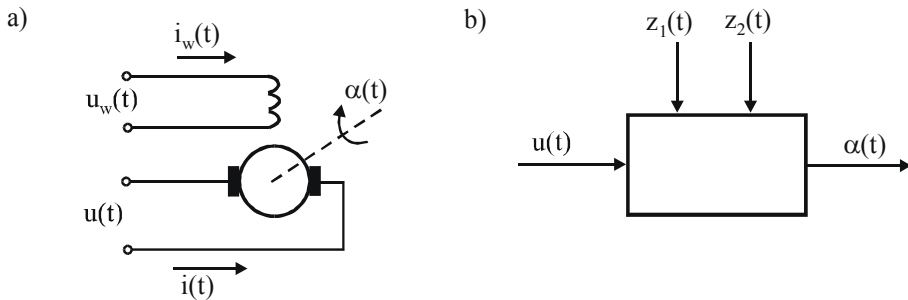


Rys. 1.1. Obiekt sterowania

Dla potrzeb sterowania, a więc celowego oddziaływania za pomocą sygnałów wejściowych na procesy zachodzące w obiekcie, istotna jest znajomość zależności sygnałów wyjściowych od sygnałów wejściowych. Zależność ta wyrażona w postaci równań matematycznych nazywana jest **matematycznym modelem obiektu**. Jest to więc określony opis procesów zachodzących w obiekcie umożliwiającą takie sterowanie, aby wielkości wyjściowe osiągały pożądane wartości.

Przykład 1.1

Prezentacja schematu blokowego obiektu sterowania zostanie przedstawiona na przykładzie silnika prądu stałego z niezależnym uzwojeniem wzbudzenia (rys. 1.2a). Zakłada się, że napięcie przyłożone do uzwojenia wzbudzenia $u_w(t)$ jest stałe, więc również i prąd wzbudzenia $i_w(t)$ jest stały. Natomiast napięcie przyłożone do wirnika $u(t)$ może być zmieniane, co skutkuje w zmianie wartości prądu wirnika $i(t)$, a więc także jego prędkości kątowej. Napięcie wirnika będzie zatem wielkością wejściową (sygnałem sterującym), a kąt obrotu wału silnika $\alpha(t)$ – wielkością wyjściową.



Rys. 1.2. Silnik prądu stałego: a) schemat ideowy, b) schemat blokowy

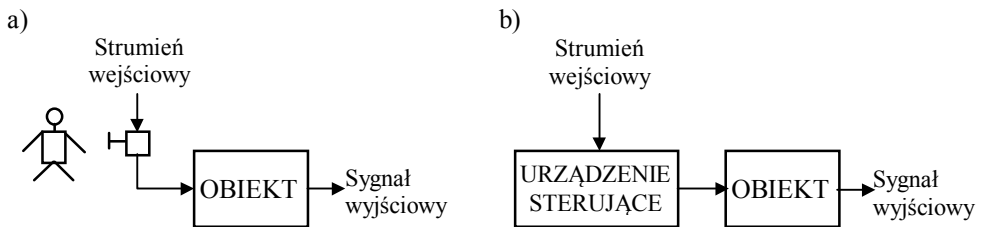
Należy zauważyć, iż na kształt przebiegu czasowego $\alpha(t)$ mogą mieć wpływ również inne czynniki. Jednym z nich jest niestalość napięcia wzbudzenia $u_w(t)$, którego zmiana wartości powoduje również zmianę $\alpha(t)$. Innym czynnikiem może być zmienne obciążenie silnika. Jego wpływ na kąt $\alpha(t)$ jest również oczywisty. Na schemacie blokowym te dwa czynniki, jako wielkości zakłócające, oznaczono odpowiednio przez $z_1(t)$ i $z_2(t)$.

1.1.2. Zasady automatycznego sterowania

Sterowaniem obiektu nazywa się oddziaływanie za pomocą sygnałów wejściowych na procesy zachodzące w obiekcie, tak aby sygnał wyjściowy miał pożą-

daną wartość lub pożądany przebieg czasowy. Innymi słowy, jest to więc wywoływanie celowych zmian wartości sygnałów wyjściowych obiektu.

Sterowanie może być realizowane przy pomocy człowieka (sterowanie ręczne) lub za pomocą specjalnego urządzenia (sterowanie automatyczne) nazywanego **urządzeniem sterującym**. Schematy blokowe sterowania ręcznego i sterowania automatycznego pokazuje rysunek 1.3. Z przedstawionego rysunku wynika, że w sterowaniu ręcznym na strumień wejściowy (zmiana jego wartości) wpływa człowiek, natomiast w sterowaniu automatycznym – urządzenie sterujące.



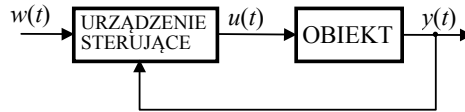
Rys. 1.3. Schemat blokowy układu sterowania: a) ręcznego, b) automatycznego

Wyróżnia się dwa podstawowe rodzaje sterowania automatycznego:

- w układzie otwartym,
- w układzie zamkniętym (regulacja).

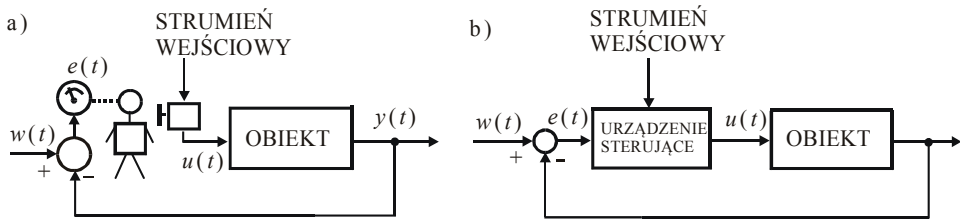
Ogólny schemat **otwartego układu sterowania** przedstawia rysunek 1.3b. Sterowanie w układzie otwartym ma miejsce w strukturze powstałej z pewnej liczby członów połączonych szeregowo. Wielkością sterującą (lub wejściową), zmienianą w sposób świadomy, oddziałuje się na obiekt sterowania, aby wielkość wyjściowa (sterowana) przyjmowała określoną wartość. Zmiana wielkości wyjściowej odbywa się zgodnie z danymi zależnościami fizycznymi i połączeniami, przy czym wielkość wyjściowa nie wpływa na wielkość wejściową. Ponieważ na obiekt mogą działać zakłócenia, tj. wielkości podlegające zmianom przypadkowym, wielkość wyjściowa – pod wpływem tych zakłóceń zewnętrznych – często odchyła się znacznie od wartości żądanej. Ze względu na oddziaływanie jednokierunkowe w torze sterowania, wielkość sterująca powinna być dostosowana nie tylko do pożądanej wartości wielkości wyjściowej, ale także do zakłóceń.

Podstawowy schemat blokowy układu sterowania automatycznego ze sprzężeniem zwrotnym (układu regulacji) pokazano na rysunku 1.4. W tym przypadku urządzenie sterujące wyznacza wartości sygnału sterującego $u(t)$ na podstawie wartości sygnału wejściowego $w(t)$ i wyjściowego (sprzężenia zwrotnego) $y(t)$.



Rys. 1.4. Układ automatycznego sterowania ze sprzężeniem zwrotnym

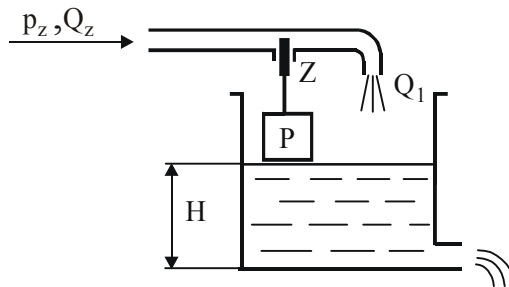
Sterowanie ze **sprzężeniem zwrotnym** może być realizowane w sposób ręczny (rys 1.5a) lub automatyczny (rys. 1.5b). Sterowanie ręczne ze sprzężeniem zwrotnym polega na tym, że człowiek prowadzący sterowanie obserwuje osobno $w(t)$ i $y(t)$ lub tylko ich różnicę $e(t) = w(t) - y(t)$, a następnie tak dobiera wartość sygnału sterującego $u(t)$, aby sygnał $e(t)$ był możliwie bliski zera. W układzie regulacji automatycznej urządzenie sterujące przetwarza sygnał $e(t)$ na wartość sygnału sterującego $u(t)$.



Rys. 1.5. Schemat układu regulacji: a) ręcznej, b) automatycznej

Przykład 1.2

Rysunek 1.6 przedstawia schemat ideowy prostego układu regulacji automatycznej poziomu cieczy w zbiorniku. Zadaniem tego układu regulacji jest utrzymanie stałego poziomu H cieczy w zbiorniku przy zmieniającej się w sposób przypadkowy wartości ciśnienia zasilania p_z oraz wartości natężenia wypływu Q_z .



Rys. 1.6. Schemat układu sterowania ze sprzężeniem zwrotnym

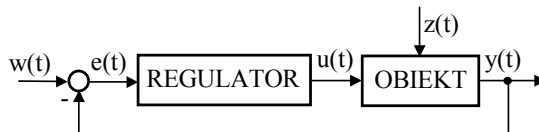
Jeżeli z jakiegokolwiek powodu poziom cieczy H w zbiorniku wzrośnie, to pływak P podnosząc się do góry zmniejszy czynną powierzchnię przekroju poprzecznego zaworu Z , a tym samym zmniejszy wartość natężenia dopływu cieczy Q_1 , co z kolei spowoduje stopniowe obniżenie poziomu cieczy H . Jeżeli natomiast poziom H zmaleje, to opadanie pływak spowoduje otwarcie zaworu i wzrost wartości Q_1 oraz poziomu H .

1.2. Układy automatycznej regulacji

Układem automatycznej regulacji nazywa się układ automatycznego sterowania ze sprzężeniem zwrotnym. Regulacja automatyczna jest obecnie najlepiej rozwiniętą dziedziną automatyki w zakresie teorii, budowy elementów i urządzeń oraz zastosowań. W większości krajów wprowadzono typizację i normalizację elementów układów automatycznej regulacji. Dzięki temu projektowanie układu regulacji automatycznej sprowadza się do odpowiedniego doboru dostępnych w sprzedaży elementów. Zmniejsza to koszty wytwarzania elementów, a tym samym koszty wprowadzania automatyzacji.

1.2.1. Schemat funkcjonalny układu regulacji automatycznej

Podstawowy schemat blokowy regulacji automatycznej ilustruje rysunek 1.7. Jest to układ regulacji jednej zmiennej $y(t)$, czyli tzw. jednowymiarowy układ regulacji automatycznej. W układzie tym sygnał zadany $w(t)$ jest porównywany z sygnałem regulowanym $y(t)$. Różnica tych sygnałów, nazywana **uchybem** $e(t)$ regulacji, jest wprowadzana do regulatora, tj. elementu który przetwarza ten sygnał. Na podstawie wartości uchybu $e(t)$, regulator wytwarza odpowiedni **sygnał sterujący** $u(t)$, tak aby wartość uchybu regulacji $e(t)$ zwykle była możliwie bliska zeru.



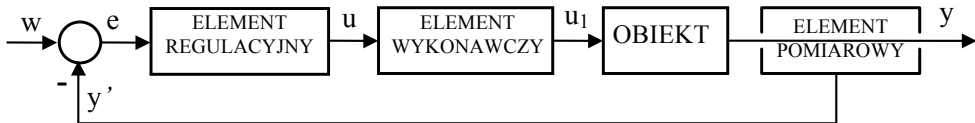
Rys. 1.7. Schemat blokowy układu regulacji automatycznej

Układ automatycznej regulacji pokazany na rysunku 1.7 składa się z trzech elementów, a mianowicie z węzła sumacyjnego (układu różnicowego), regulatora (urządzenia przetwarzającego sygnał uchybu) i obiektu regulacji. W szczegółowym przedstawieniu układu regulacji elementów tych jest znacznie więcej.

Jednym z elementów układu automatycznej regulacji jest obiekt. Jest to element specjalny, dla którego jest projektowany układ automatycznej regulacji, czyli są dobierane pozostałe elementy. Obiekt nie jest zależny od pozostałych elementów i zasadniczo projektant układu regulacji nie ma wpływu na jego właściwości. Może jedynie niekiedy dokonywać wyboru, które wielkości wejściowe lub wyjściowe mają być wielkościami odpowiednio sterującymi i regulowanymi.

1.2.2. Elementy układu regulacji automatycznej

W przedstawionym na rysunku 1.7 układzie regulacji automatycznej występowały podstawowe elementy, spełniające określone funkcje. Przy bardziej szczegółowym ujęciu tego problemu można wyróżnić następujące rodzaje elementów: pomiarowe, regulacyjne i wykonawcze. Usytuowanie tych elementów w układzie regulacji pokazuje rysunek 1.8.



Rys. 1.8. Struktura blokowa układu regulacji

Elementy pomiarowe. Podstawową funkcją elementu pomiarowego jest przetwarzanie wielkości regulowanej y na wielkość y' , która poprzez węzeł sumujący może być bezpośrednio wprowadzona do elementu regulacyjnego. Jeśli np. wielkością regulowaną y jest temperatura, zaś wielkością y' napięcie, to element pomiarowy musi przetworzyć temperaturę na napięcie. Element pomiarowy jest zatem układem przetwarzającym daną wielkość fizyczną na wielkość o innym charakterze (np. temperaturę na napięcie, położenie na napięcie itd.). To przetwarzanie powinno być możliwie dokładne, w przeciwnym przypadku charakterystyki elementu pomiarowego należy uwzględnić przy projektowaniu układu automatycznej regulacji. Zwykle element pomiarowy składa się z dwóch części. Część pierwsza, to **czujnik** przetwarzający daną wielkość wyjściową obiektu na pewną wielkość pośrednią. Część druga to **przetwornik** przetwarzający wielkość pośrednią na wielkość odpowiednią dla danego elementu regulacyjnego.

Elementy regulacyjne. Element regulacyjny, nazywany regulatorem, wykonuje podstawową funkcję układu regulacji. Przetwarza on bowiem sygnał uchybu e

na odpowiedni sygnał u , sterujący obiektem. Algorytm tego przetwarzania decyduje, w myśl przyjętych kryteriów sterowania, o jakości regulacji. Obecnie funkcję regulatora spełnia odpowiedni algorytm (równanie matematyczne), który jest zwykle realizowany za pomocą techniki mikroprocesorowej.

Elementy wykonawcze. Zadaniem elementów wykonawczych jest nastawianie wielkości wejściowych obiektu, przy niejednokrotnie niezbędnej przy tym dużej mocy. Element wykonawczy w układzie regulacji zajmuje położenie między regulatorem a obiektem. Przetwarza on sygnał wyjściowy z regulatora na sygnał o naturze fizycznej przystosowanej do sterowania obiektem. Przykładowo, jeśli sygnałem wyjściowym regulatora jest napięcie elektryczne, a wielkością nastawianą w obiekcie jest natężenie dopływającego strumienia płynu, to elementem wykonawczym jest elektrozawór.

Elementy wykonawcze można podzielić na: *nastawcze*, *napędowe* oraz *mocy*. Elementami nastawczymi są: zawory, zasuwy, dozowniki, pompy, transformatory z odczepami itp. Elementami napędowymi są wszelkiego rodzaju silniki (elektryczne, hydrauliczne). Wzmacniacze mocy są niezbędne wtedy, gdy do sterowania obiektem jest wymagana duża moc.

Elementy pomocnicze. Oprócz wyżej wymienionych elementów, w automatyce stosuje się wiele innych elementów i urządzeń, jak: układy sprzęgające, filtry, rejestratory, wskaźniki, sygnalizatory itp. Odgrywają one mniejszą rolę w samym układzie regulacji automatycznej, ale znaczenie praktyczne tych elementów jest bardzo duże.

1.3. Klasyfikacja układów sterowania

Poprzednio zostały omówione podstawowe zagadnienia związane z układami automatycznej regulacji, obecnie zostaną omówione zagadnienia bardziej ogólne, dotyczące układów automatycznego sterowania. Układy automatycznego sterowania klasyfikuje się według różnych kryteriów, takich jak: zadanie układu, linowość, charakter sygnałów, liczba wejść i wyjść itd.

1. Podział ze względu na zadanie układu:

- a) układy stabilizacji (regulacji stałwartościowej),
- b) układy śledzące (nadążne),
- c) układy optymalne,
- e) układy przełączające (inaczej logiczne lub cyfrowe).

Układy stabilizacji – sygnał wejściowy $w(t)$ (rys. 1.8) ma stałą wartość ($w(t) = \text{const}$), a więc układ w procesie regulacji ma za zadanie utrzymać stałą wartość wielkości wyjściowej, mimo działających zakłóceń. Przykładem układu stabilizacji jest układ regulacji poziomu cieczy w zbiorniku (rys. 1.6).

Układy śledzące – (nadażne) są to zamknięte układy sterowania (często zwane także serwomechanizmami), w których sygnał wejściowy $w(t)$ jest nieznaną (losową) funkcją czasu. Zadaniem układu jest nadażanie wielkości wyjściowej y za zmianami wielkości wejściowej w .

Układy optymalne – są to układy, których struktura i parametry regulatora są określone na podstawie obliczania ekstremum przyjętego wskaźnika jakości. Rozróżnia się układy optymalne zamknięte i otwarte. Otwarte układy sterowania optymalnego w swym działaniu zbliżone są do układów sterowania programowego, tzn. w oparciu o wyznaczenie ekstremum wskaźnika jakości określa się sygnał wejściowy w funkcji czasu. Przykładem takiego układu jest problem sterowania w czasie ciągiem silników, aby samolot osiągnął zadany pułap, przy minimalizacji wskaźnika jakości, którym jest zużycie paliwa. Zamknięte układy sterowania optymalnego wyposażone są w obwód sprzężenia zwrotnego. W tym przypadku strukturę i parametry regulatora określa się z warunku ekstremalizacji (najczęściej minimalizacji) wskaźnika jakości.

Układy przełączające – zapewniają realizację poszczególnych operacji procesu technologicznego w określonej kolejności (sekwencji). Sterowanie daje się wówczas sprowadzić do odpowiednio uwarunkowanego załączania lub wyłączania odpowiednich urządzeń procesu i realizowane jest przez układ, w którym rolę regulatora spełnia tzw. układ logiczny. Zasadniczo rozróżnia się tu dwie grupy układów, tj. układy **kombinacyjne** i **sekwencyjne**. Układem kombinacyjnym jest taki układ, w którym stan sygnałów wyjściowych zależy tylko od stanu sygnałów wejściowych w danej chwili. Układem sekwencyjnym jest natomiast taki układ, w którym stan sygnałów wyjściowych zależy nie tylko od stanu sygnałów wejściowych w danej chwili, ale także od stanu tych sygnałów w chwilach poprzednich.

2. Podział ze względu na liniowość elementów układu:

- a) układy liniowe,
- b) układy nieliniowe.

Układy liniowe – są to układy opisywane za pomocą liniowych równań algebraicznych, różniczkowych, różnicowych lub całkowych. Elementy i układy liniowe spełniają zasadę superpozycji, tzn. odpowiedź na wymuszenie będące kombinacją liniową

składowych wymuszenia jest równa kombinacji liniowej odpowiedzi na poszczególną składową wymuszenia. Na ogół każdy proces jest nieliniowy, lecz zwykle z przybliżeniem wystarczającym do celów technicznych zakłada się jego liniowość lub linearyzuje nieliniowe charakterystyki, zwłaszcza w przypadkach, gdy działanie tego procesu ogranicza się do niewielkiego obszaru wokół pewnego punktu pracy.

Układy nieliniowe – są to układy zawierające chociaż jeden element nieliniowy. Element ten (a zatem i cały układ) nie może być opisany za pomocą równań liniowych.

3. Podział ze względu na charakter sygnałów (sposób działania elementów układu):

- a) układy ciągłe,
- b) układy dyskretne.

Układy ciągłe – są to układy, w których wszystkie sygnały są funkcjami ciągłymi i mogą przybierać każdą wartość z obszaru swych zmienności. Opisane są równaniami różniczkowymi (liniowymi lub nieliniowymi).

Układy dyskretne – są to układy, w których przynajmniej jeden sygnał ma charakter dyskretny, tzn. może przyjmować niektóre, wybrane wartości (kwantowanie) i występujące tylko w niektórych wybranych chwilach czasu (próbkiowanie). Opisane są za pomocą równań różnicowych.

4. Podział ze względu na charakter układu (występowanie procesu przejściowego):

- a) układy statyczne (bezinercyjne),
- b) układy dynamiczne.

Układy statyczne – są to układy, w których wyjście w dowolnej chwili czasu zależy tylko od wejścia (brak procesu przejściowego). Układy te opisane są równaniami algebraicznymi i składają się tylko z elementów rozpraszających energię.

Układy dynamiczne – są to układy, w których wyjście nie jest jednoznacznie funkcją wejścia i zależy dodatkowo od charakteru procesu przejściowego (inercyjności) i stanu układu w chwili początkowej. Opisuje się je równaniami różniczkowymi lub różnicowymi.

5. Podział ze względu na liczbę wejść i wyjść:

- a) układy jednowymiarowe,
- b) układy wielowymiarowe.

Układy jednowymiarowe – są to układy o jednym wejściu i wyjściu.

Układy wielowymiarowe – są to układy, które nie spełniają wymienionego warunku układów jednowymiarowych.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE LINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Sygnały występujące w obiektach sterowania najczęściej mają charakter ciągły. Obiekt taki jest wówczas nazywany **ciągłym układem dynamicznym**. Obecnie rzadko projektuje się układy sterowania, w których wszystkie elementy układu, także i sygnały, mają charakter analogowy. Ze względu na coraz powszechniejsze zastosowanie cyfrowych urządzeń sterujących i pomiarowych projektowane układy sterowania mają zwykle charakter dyskretny.

2.1. Podstawy teoretyczne ciągłych układów dynamicznych

Układy dynamiczne są przedstawiane i analizowane w dziedzinie *czasu, zespolonej i częstotliwości*. W pierwszym przypadku do analizy układów stosuje się teorię równań różniczkowych lub równań stanu. Do analizy w dziedzinie zespolonej jest wykorzystywane ciągle lub dyskretnie *przekształcenie Laplace'a*, natomiast w dziedzinie częstotliwości – *przekształcenie Fouriera*.

Biorąc pod uwagę powszechne zastosowanie metod numerycznych i techniki komputerowej, dominujące znaczenie mają metody czasowe, niemniej jednak jeszcze często operuje się pojęciem transmitancji, stąd jest konieczne – choćby pobieżne – przedstawienie podstaw teoretycznych przekształcenia Laplace'a.

Przekształcenie Laplace'a można stosować do rozwiązywania równań różniczkowych. Analityczne metody rozwiązywania równań różniczkowych są praktyczne w przypadku sygnału wejściowego w postaci funkcji nieciągłej lub rzędu równania większego niż drugi. Wyznaczenie stałych całkowania wymaga żmudnego rozwiązywania równań algebraicznych, których liczba odpowiada rzędowi równania różniczkowego. W celu usystematyzowania metod rozwiązywania równań różniczkowych stosowane jest przekształcenie Laplace'a. Zastosowanie przekształcenia Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych daje następujące korzyści:

- włącza automatycznie warunki początkowe,
- rozwiązanie uzyskuje się przez proste operacje algebraiczne,
- umożliwia proste ujęcie nieciągłych sygnałów wejściowych,
- rozwiązania ogólne i szczególne uzyskuje się jednocześnie.

Wadą tej metody jest przede wszystkim to, że brak zrozumienia teorii może prowadzić do poważnych błędów, a także pewne typy równań różniczkowych dają się rozwiązać łatwiej metodami klasycznymi. Oczywiście obecnie ww. zalety nie mają już tak istotnego znaczenia w porównaniu z okresem, w którym technika komputerowa nie była powszechnie stosowana.

Przekształcenie Laplace'a jest określone wzorem

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.1)$$

gdzie s jest tzw. **operatorem Laplace'a** (zmienna zespolona).

Aby przekształcenie to miało sens, całka występująca po prawej stronie wzoru musi być zbieżna, tj.

$$\left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \right| < \infty \quad (2.2)$$

Przekształcenie powinno być także **jedno-jednoznaczne**, tzn. danej funkcji $f(t)$ powinna odpowiadać jedna i tylko jedna transformata $F(s)$ i na odwrót – danej transformacie powinna odpowiadać jedna i tylko jedna funkcja (oryginał) $f(t)$.

Powyższe jest spełnione, jeśli:

1. Funkcja $f(t)$ jest ciągła dla $t \geq 0$, poza co najwyżej punktami izolowanymi, w których ma nieciągłości pierwszego rodzaju, tzn. posiada w tych punktach skończone granice prawo- i lewostronne, przy czym w skończonym przedziale leży skończona liczba takich punktów.
2. Funkcja $f(t) \equiv 0$ dla $t < 0$.
3. Funkcja $f(t)$ jest wykładniczego rzędu, tzn. istnieją takie liczby rzeczywiste a i M większe od zera, że dla $t > 0$

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad (2.3)$$

Warunek ten oznacza, że funkcję $f(t)$ można ograniczyć krzywą wykładniczą.

Transformaty typowych funkcji z reguły nie oblicza się z zależności (2.1), gdyż są one już wyznaczone i stabelaryzowane. Zbiór transformat podstawowych funkcji zamieszczono w tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Funkcje czasu i transformaty Laplace'a

Lp.	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$
6.	$1 - e^{\pm at}$	$\frac{a}{s(s \mp a)}$
7.	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8.	$\frac{1}{T\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \frac{t}{T}} \sin \frac{t}{T} \sqrt{1-\xi^2}$	$\frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}, \xi < 1$
9.	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \frac{t}{T}} \sin \left[\frac{t}{T} \sqrt{1-\xi^2} + \varphi \right]$ $\varphi = \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{1}{s(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1)}, \xi < 1$
10.	$1 - (1 + ta) e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$
11.	$1 + \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{a-b}$	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$
12.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
13.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

2.1.1. Właściwości przekształcenia Laplace'a

Poniżej przedstawiono podstawowe twierdzenia dotyczące przekształcenia Laplace'a, użyteczne przy stosowaniu tej metody:

Liniowość

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (2.4)$$

gdzie a_1 i a_2 są stałymi.

Przesunięcie w dziedzinie zmiennej rzeczywistej. Jeżeli $F(s)$ jest transformatą Laplace'a funkcji $f(t)$, a t_0 jest dowolną nieujemną wartością rzeczywistą, to transformata funkcji przesuniętej $f(t - t_0)$ takiej, że dla $t < t_0$ $f(t - t_0) = 0$ wyraża się

$$\mathcal{L}[f(t - t_0) \cdot 1(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s) \quad (2.5)$$

Różniczkowanie w dziedzinie zmiennej rzeczywistej

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0^+) \quad (2.6)$$

w szczególności dla $n = 1$ otrzymano

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+) \quad (2.7)$$

gdzie

$$f(0^+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \quad (2.8)$$

jest granicą prawostronną.

Transformata funkcji okresowej. Jeżeli dana jest funkcja okresowa $f(t) = f(t + kT)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ oraz

$$F_T(s) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt \quad (2.9)$$

jest transformatą funkcji za jeden okres, to

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}} \quad (2.10)$$

Wartość końcowa

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)} \quad (2.11)$$

Wartość początkowa

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2.12)$$

Podobnie można zdefiniować **transformatę Fouriera**. Transformata Fouriera wyraża się następującą zależnością

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.13)$$

2.1.2. Odwrotne przekształcenie Laplace'a

W wyniku zastosowania przekształcenia Laplace'a do liniowego równania różniczkowego otrzymuje się równanie algebraiczne względem zmiennej zespolonej s . Rozwiązanie, a więc funkcje reprezentujące zachowanie się zmiennych wyjściowych układu, również zależą od s . Aby zbadać dynamikę układu, należy powrócić do dziedziny czasu. Z tego powodu wprowadzono operację zwaną **odwrotnym przekształceniem Laplace'a**, które oznacza się następująco

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \quad (2.14)$$

Ogólnie wyrażenie na transformatę odwrotną $y(t)$ otrzymuje się ze wzoru Riemanna-Mellina

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} Y(s) ds \quad (2.15)$$

gdzie $c = \text{Res}$.

Bezpośrednie korzystanie ze wzoru Riemanna-Mellina jest trudne i w praktyce stosowane bardzo rzadko, gdyż występująca w tym wzorze całka – poza pewnymi prostymi przypadkami – nie daje się obliczyć bez zastosowania teorii funkcji zmiennej zespolonej. Oryginały dla najczęściej występujących transformat zamieszczono w tabeli 2.1. Najczęściej jednak transformata określona jako wynik rozwiązania równania różniczkowego albo nie znajduje się w tabelach, albo występuje w postaci uniemożliwiającej korzystanie z tabel. Wówczas należy ją prze-

kształcić do takiej postaci (np. rozłożyć na ułamki proste), aby można było posłużyć się tabelami lub ewentualnie korzystać z podstawowych twierdzeń dotyczących transformaty Laplace'a.

Najczęściej transformatę odwrotną $y(t)$ otrzymuje się poprzez zastosowanie:

- bezpośrednio tablic,
- metody rozkładu na ułamki proste,
- metody residuów.

Przypadek bezpośredniego korzystania z tablic został już krótko przedstawiony i w dalszych rozważaniach zostanie pominięty. Poniżej bardziej szczegółowo zostaną przedstawione pozostałe metody.

A. Metoda rozkładu na ułamki proste

Gdy transformata odpowiedzi $Y(s)$ jest *wielomianową funkcją wymierną*, tj. będącą ilorazem dwóch wielomianów o stałych współczynnikach

$$Y(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.16)$$

to oryginał $y(t)$ transformaty $Y(s)$ wyznacza się po jej rozłożeniu na ułamki proste i po zastosowaniu tablic. Zakłada się, że stopień m wielomianu licznika jest mniejszy od stopnia n wielomianu mianownika. Gdy natomiast zachodzi $n = m$, to należy dokonać dzielenia licznika przez mianownik, co spowoduje obniżenie stopnia licznika. W metodzie rozkładu transformaty na ułamki proste mogą wystąpić różne przypadki, w zależności od tego, jakie są pierwiastki mianownika $M(s)$.

1. Przypadek pojedynczych pierwiastków wielomianu $M(s)$

Po podzieleniu licznika i mianownika transformaty (2.16) przez współczynnik a_n otrzymano

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad n > m \quad (2.17)$$

przy czym pozostawiono bez zmian oznaczenia współczynników licznika i mianownika. Oznaczając pierwiastki mianownika, tj. równania charakterystycznego

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.18)$$

przez s_i , $i = 1, 2, \dots, n$, to wyrażenie (2.17) można zapisać w postaci

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-s_1)(s-s_2) \dots (s-s_n)} \quad (2.19)$$

Po rozłożeniu transformaty (2.19) na ułamki proste otrzymano

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s-s_i} \quad (2.20)$$

Współczynniki c_i wyznacza się po sprowadzeniu sumy po prawej stronie wzoru (2.20) do wspólnego mianownika i porównaniu do siebie wyrazów przy odpowiednich potęgach s w licznikach wzorów (2.19) i (2.20). Z otrzymanego w ten sposób układu równań liniowych znajduje się szukane współczynniki rozkładu (2.20). Często korzysta się także z faktu, że współczynnik c_i jest równy residuum funkcji (2.19) w biegunie s_i

$$c_i = \operatorname{res}_{s=s_i} \frac{L(s)}{M(s)} = \lim_{s \rightarrow s_i} \left[\frac{L(s)}{M(s)} (s-s_i) \right] \quad (2.21)$$

Ponieważ

$$\lim_{s \rightarrow s_i} L(s) = L(s_i), \quad \lim_{s \rightarrow s_i} M(s) = 0 \quad (2.22)$$

to

$$\lim_{s \rightarrow s_i} \frac{s-s_i}{M(s)} = \frac{1}{M'(s_i)}, \quad M'(s_i) = \left. \frac{dM(s)}{ds} \right|_{s=s_i} \quad (2.23)$$

zatem po uwzględnieniu tego, że wszystkie pierwiastki wielomianu $M(s)$ są pojedyncze, a więc $M'(s_i) \neq 0$, z równania (2.21) otrzymano

$$c_i = \frac{L(s_i)}{M'(s_i)} \quad (2.24)$$

Wobec tego odpowiedź $y(t)$ wyraża się zależnością

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s-s_i} \right] = \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t} \quad (2.25)$$

lub uwzględniając zależność (2.24)

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{L(s_i)}{M'(s_i)} e^{s_i t} \quad (2.26)$$

przy czym

$$M'(s_i) = (s_i - s_1)(s_i - s_2) \dots (s_i - s_{i-1})(s_i - s_{i+1}) \dots (s_i - s_n) \quad (2.27)$$

Często w mianowniku występuje pojedynczy biegun równy zeru. Wtedy, zapisując $M(s) = sN(s)$; równanie (2.16) ma postać

$$Y(s) = \frac{L(s)}{sN(s)} \quad (2.28)$$

Przyjmując

$$M'(s) = N(s) + sN'(s),$$

$$M'(0) = N(0),$$

$$M'(s_i) = s_i N'(s_i) \neq 0$$

równanie (2.26) zapisano w formie równoważnej

$$y(t) = \frac{L(0)}{N(0)} + \sum_{i=2}^n \frac{L(s_i)}{s_i N'(s_i)} e^{s_i t} \quad (2.29)$$

Przyjęto tu, że stopień wielomianu $M(s) = sN(s)$ jest równy n , a zerowym pierwiastkiem tego wielomianu jest $s_1 = 0$. Oczywiście w przypadku występowania miejsca zerowego $s_1 = 0$, współczynniki c_i można także określić z równania (2.21) lub (2.24).

Przykład 2.1

Wyznaczyć oryginał transformaty $Y(s) = \frac{s^2}{(s-1)(s-2)(s+3)}$

Rozwiązanie

Zadaną transformatę należy rozłożyć na ułamki proste

$$Y(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{s^2}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s-2} + \frac{c_3}{s+3} \quad (2.30)$$

Miejscami zerowym mianownika są: $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ i $s_3 = -3$. Na podstawie zależności (2.21) współczynniki c_1 , c_2 i c_3 wynoszą:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \lim_{s \rightarrow s_1} \left[\frac{L(s)}{M(s)} (s - s_1) \right] = \lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{s^2}{(s-2)(s+3)} \right] = -\frac{1}{4} \\
c_2 &= \lim_{s \rightarrow s_2} \left[\frac{L(s)}{M(s)} (s - s_2) \right] = \lim_{s \rightarrow 2} \left[\frac{s^2}{(s-1)(s+3)} \right] = \frac{4}{5} \\
c_3 &= \lim_{s \rightarrow s_3} \left[\frac{L(s)}{M(s)} (s - s_3) \right] = \lim_{s \rightarrow -3} \left[\frac{s^2}{(s-1)(s-2)} \right] = \frac{9}{20}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Również na podstawie równania (2.24) otrzymano:

$$c_1 = \frac{L(s_1)}{M'(s_1)} = -\frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{L(s_2)}{M'(s_2)} = \frac{4}{5}, \quad c_3 = \frac{L(s_3)}{M'(s_3)} = \frac{9}{20} \tag{2.32}$$

przy czym; patrz równanie (2.27):

$$\begin{aligned}
M'(s_1) &= (s_1 - s_2)(s_1 - s_3) = (1 - 2)(1 + 3) = -4 \\
M'(s_2) &= (s_2 - s_1)(s_2 - s_3) = (2 - 1)(2 + 3) = 5 \\
M'(s_3) &= (s_3 - s_1)(s_3 - s_2) = (-3 - 1)(-3 - 2) = 20
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Współczynniki c_1 , c_2 i c_3 można obliczyć także w oparciu o metodę współczynników nieoznaczonych. Sprowadzając prawą stronę równania (2.30) do wspólnego mianownika i przyrównując do zadanej transformaty $Y(s)$ otrzymano

$$\begin{aligned}
\frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + \frac{c_3}{s + s_3} &= \frac{c_1(s-2)(s+3) + c_2(s-1)(s+3) + c_3(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \\
&= \frac{s^2}{(s-1)(s-2)(s+3)}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Ponieważ są to różne postacie tego samego wyrażenia, więc liczniki obu ułamków są sobie równoważne, co po przeprowadzeniu przekształceń algebraicznych można zapisać

$$(c_1 + c_2 + c_3)s^2 + (c_1 + 2c_2 - 3c_3)s + (-6c_1 - 3c_2 + 2c_3) = 1s^2 + 0s + 0 \tag{2.35}$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach s otrzymano układ równań:

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\
c_1 + 2c_2 - 3c_3 &= 0 \\
-6c_1 - 3c_2 + 2c_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.36}$$

który rozwiązując metodą wzorów Cramera uzyskano:

$$c_1 = -\frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{4}{5}, \quad c_3 = \frac{9}{20} \quad (2.37)$$

Uwzględniając obliczone wartości współczynników, równanie (2.30) przyjmie postać

$$Y(s) = -\frac{1}{4} \frac{1}{s-1} + \frac{4}{5} \frac{1}{s-2} + \frac{9}{20} \frac{1}{s+3} \quad (2.38)$$

Zgodnie z tabelą 2.1 lub równaniem (2.25)

$$y(t) = -\frac{1}{4} e^t + \frac{4}{5} e^{2t} + \frac{9}{20} e^{-3t} \quad (2.39)$$

Podane rozważania dotyczą zarówno przypadku pojedynczych pierwiastków rzeczywistych, jak i zespolonych (w szczególności urojonych). W przypadku pierwiastków zespolonych współczynniki rozkładu na ułamki proste są także zespolone. Jest to niedogodne i na ogół wzory (2.26) i (2.29) stosuje się do wyznaczania składników $y(t)$ dla pojedynczych i rzeczywistych pierwiastków wielomianu $M(s)$.

Składniki $y(t)$ odpowiadające pojedynczym pierwiastkom zespolonym wyznacza się tak, żeby występujące w nich współczynniki były rzeczywiste. Jeżeli wielomian $M(s)$ ma n pierwiastków rzeczywistych i pojedynczych oraz $2p$ pierwiastków zespolonych (tzn. p różnych par pierwiastków zespolonych sprzężonych), zależność pozwalająca otrzymać oryginał $y(t)$ jako funkcję zmiennej rzeczywistej ma postać [20]

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^p c_k e^{s_k t} \quad (2.40)$$

lub analogicznej do wzoru (2.26)

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{L(s_i)}{M'(s_i)} e^{s_i t} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^p \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} e^{s_k t} \quad (2.41)$$

Wreszcie, gdy wśród pierwiastków pojedynczych rzeczywistych występuje jeden pierwiastek równy zeru, wówczas wzór (2.41) przyjmuje postać

$$y(t) = \frac{L(0)}{N(0)} + \sum_{i=2}^n \frac{L(s_i)}{s_i N'(s_i)} e^{s_i t} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^p \frac{L(s_k)}{s_k N'(s_k)} e^{s_k t} \quad (2.42)$$

Przykład 2.2

Wyznaczyć odpowiedź układu o transmitancji

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(s+2)(s^2+6s+25)}$$

na sygnał wejściowy $u(t) = 6$, przy warunkach początkowych

$$y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$$

Rozwiązanie

Transformata odpowiedzi obiektu ma postać

$$Y(s) = \frac{60}{s(s+2)(s^2+6s+25)} \quad (2.43)$$

Wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{aligned} M(s) &= s(s+2)(s^2+6s+25) = sN(s) \\ N(s) &= (s+2)(s^2+6s+25) \\ N'(s) &= (s^2+6s+25) + (s+2)(2s+6) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Wielomian $M(s)$ posiada pierwiastki:

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -3 - j4, \quad s_4 = -3 + j4 \quad (2.45)$$

Zgodnie z równaniem (2.42)

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{L(0)}{N(0)} + \frac{L(s_2)}{s_2 N'(s_2)} e^{s_2 t} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{L(s_3)}{s_3 N'(s_3)} e^{s_3 t} \right] = \\ &= \frac{6}{5} + \frac{60e^{-2t}}{(-2)[(-2)^2 + 6(-2) + 25]} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{60e^{(-3-j4)t}}{(-3-j4)[(-3-j4)+2][2(-3-j4)+6]} \right] = \\ &= \frac{6}{5} - \frac{30}{17} e^{-2t} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{15e^{(-3-j4)t}}{32+j26} \right] = \frac{6}{5} - \frac{30}{17} e^{-2t} + \frac{3}{85} e^{-3t} (16 \cos 4t - 13 \sin 4t) \end{aligned}$$

2. Przypadek wielokrotnych pierwiastków wielomianu $M(s)$

Niech wielomian $M(s)$ n -tego stopnia posiada r różnych pierwiastków s_1, s_2, \dots, s_r każdy o wielokrotności odpowiednio m_1, m_2, \dots, m_r . Transformata odpowiedzi $Y(s)$ ma postać

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-s_1)^{m_1} (s-s_2)^{m_2} \dots (s-s_r)^{m_r}} \quad (2.46)$$

a po rozłożeniu na ułamki proste

$$Y(s) = \frac{c_{11}}{s-s_1} + \frac{c_{12}}{(s-s_1)^2} + \dots + \frac{c_{1m_1}}{(s-s_1)^{m_1}} + \frac{c_{21}}{s-s_2} + \frac{c_{22}}{(s-s_2)^2} + \dots + \frac{c_{2m_2}}{(s-s_2)^{m_2}} + \dots + \frac{c_{r1}}{s-s_r} + \frac{c_{r2}}{(s-s_r)^2} + \dots + \frac{c_{rm_r}}{(s-s_r)^{m_r}}$$

lub w innej postaci

$$Y(s) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{c_{ik}}{(s-s_i)^k} \quad (2.47)$$

Współczynniki c_{ik} wyznacza się ze wzoru

$$c_{ik} = \frac{1}{(m_i - k)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{m_i - k}}{ds^{m_i - k}} \left[\frac{L(s)}{M(s)} (s-s_i)^{m_i} \right] \quad (2.48)$$

lub w oparciu o metodę współczynników nieoznaczonych.

Odpowiedź $y(t)$ określa się na podstawie odwrotnego przekształcenia transformaty $Y(s)$

$$y(t) = c_{11} e^{s_1 t} + \frac{c_{12} t}{(2-1)!} e^{s_1 t} + \dots + \frac{c_{1m_1} t^{m_1-1}}{(m_1-1)!} e^{s_1 t} + c_{21} e^{s_2 t} + \frac{c_{22} t}{(2-1)!} e^{s_2 t} + \dots + \frac{c_{2m_2} t^{m_2-1}}{(m_2-1)!} e^{s_2 t} + \dots + c_{r1} e^{s_r t} + \frac{c_{r2} t}{(2-1)!} e^{s_r t} + \dots + \frac{c_{rm_r} t^{m_r-1}}{(m_r-1)!} e^{s_r t} \quad (2.49)$$

lub w postaci ogólnej

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{s_i t} \quad (2.50)$$

Wzory (2.47) do (2.50) są słuszne zarówno dla wielokrotnych pierwiastków rzeczywistych, jak i dla wielokrotnych pierwiastków zespolonych i sprzężonych, jednak wygodniej jest stosować je tylko dla pierwiastków rzeczywistych. Wynika to z tego, że współczynniki rozkładu na ułamki proste, odpowiadające pierwiastkom zespolonym, są także zespolone. Należy tu podkreślić, że przypadek wielokrotnych pierwiastków zespolonych spotyka się rzadko przy wyznaczaniu odpowiedzi układów dynamicznych.

Przykład 2.3

Wyznaczyć przekształcenie odwrotne transformaty $Y(s)$ danej równaniem

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+2)^3}$$

Rozwiązanie

Mianownik $(s+2)^3$ posiada trzykrotny pierwiastek $s_1 = -2$. Wobec tego transformatę $Y(s)$ zapisano zgodnie ze wzorem (2.47)

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+2)^3} = \frac{c_{11}}{s+2} + \frac{c_{12}}{(s+2)^2} + \frac{c_{13}}{(s+2)^3} \quad (2.51)$$

Stosując metodę współczynników nieoznaczonych, co ogranicza się do sprawdzenia wyrażenia po prawej stronie do wspólnego mianownika i porównania współczynników w liczniku przy odpowiednich potęgach s , otrzymano układ równań:

$$c_{11} = 0, \quad 4c_{11} + c_{12} = 1, \quad 4c_{11} + 2c_{12} + c_{13} = 3 \quad (2.52)$$

a stąd: $c_{11} = 0$, $c_{12} = 1$ i $c_{13} = 1$.

Współczynniki rozkładu na ułamki proste można również wyznaczyć w oparciu o równanie (2.48). Wówczas:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{s+3}{(s+2)^3} (s+2)^3 \right] = 0 \\ c_{12} &= \frac{1}{(3-2)!} \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[\frac{s+3}{(s+2)^3} (s+2)^3 \right] = 1 \\ c_{13} &= \frac{1}{(3-3)!} \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{s+3}{(s+2)^3} (s+2)^3 \right] = 1 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ostatecznie, transformata $Y(s)$ rozłożona na ułamki proste przyjmie postać

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3} \quad (2.54)$$

Korzystając z tabeli transformat (tabela 2.1) znajduje się transformatę odwrotną

$$y(t) = te^{-2t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t} \quad (2.55)$$

B. Metoda residuów

Metoda residuów jest ogólniejsza od metody rozkładu na ułamki proste, gdyż ma zastosowanie także do transformat nie będących funkcjami wymiernymi. Podstawowym wzorem tej metody jest

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_i \operatorname{res}_{s=s_i} [Y(s)e^{st}] \quad (2.56)$$

gdzie s_i – bieguny funkcji $Y(s)$. Jeżeli $Y(s)$ jest funkcją wymierną, to

$$\operatorname{res}_{s=s_i} [Y(s)e^{st}] = \frac{1}{(m_i-1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{m_i-1}}{ds^{m_i-1}} [Y(s)(s-s_i)^{m_i} e^{st}] \quad (2.57)$$

gdzie m_i jest krotnością bieguna s_i .

Przykład 2.4

Wyznaczyć odpowiedź $y(t)$ dla danej transformaty $Y(s) = \frac{3s+1}{s^3(s+4)}$.

Rozwiązanie

Transformata $Y(s)$ ma dwa bieguny, tj. biegun trzykrotny $s_1 = 0$ i jednokrotny $s_2 = -4$. Residua w poszczególnych biegunach wynoszą:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=s_1} [Y(s)e^{st}] &= \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{3s+1}{s^3(s+4)} s^3 e^{st} \right] = \frac{1}{64} (8t^2 + 44t - 3) \\ \operatorname{res}_{s=s_2} [Y(s)e^{st}] &= \lim_{s \rightarrow -4} \left[\frac{3s+1}{s^3(s+4)} (s+4) e^{st} \right] = \frac{11}{64} e^{-4t} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Zatem

$$y(t) = \sum_{i=1}^2 \operatorname{res} [Y(s)e^{st}] = \frac{1}{64} (8t^2 + 44t - 3 + 11e^{-4t}) \quad (2.59)$$

Wyznaczanie odpowiedzi obiektu poprzez rozłożenie sygnału wejściowego na składniki

Odpowiedź $y(t)$ obiektu liniowego można wyznaczyć rozkładając – zgodnie z zasadą superpozycji – sygnał wejściowy $u(t)$ na składniki i sumując poszczególne odpowiedzi na te składniki. Jeżeli

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_k(t) \quad (2.60)$$

to

$$y(t) = \sum_{i=1}^k y_i(t) \quad (2.61)$$

przy czym $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$ są odpowiedziami na składowe wymuszenia $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$.

Przedstawiony sposób wyznaczania $y(t)$ dogodnie jest stosować wówczas, gdy sygnał wejściowy $u(t)$ jest odcinkami ciągły i ma skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, tzn. takich, w których ma określoną granicę lewostronną i prawostronną. Sygnał $u(t)$ odcinkami ciągły rozkłada się na składniki przesunięte w czasie i działające na obiekt przy $t \geq t_i, i = 1, 2, \dots, k$ ($t_i - i$ -ty punkt nieciągłości pierwszego rodzaju) i równe tożsamościowo zeru dla $t < t_i$, czyli

$$u_i(t) = u_i(t - t_i) \cdot 1(t - t_i) \quad (2.62)$$

Pomnożenie we wzorze (2.62) i -tego składnika przez funkcję $1(t - t_i)$ powoduje, że $u_i(t) = 0$ dla $t < t_i$. Suma wszystkich składników powinna wynosić

$$\sum_{i=1}^k u_i(t - t_i) \cdot 1(t - t_i) = u(t) \quad (2.63)$$

Transformując równanie (2.63) otrzymano

$$\mathcal{L} [u_i(t - t_i) \cdot 1(t - t_i)] = U_i(s)e^{-st_i} \quad (2.64)$$

a stąd transformaty składowe odpowiedzi

$$Y_i(s) = G(s)U_i(s)e^{-st_i} \quad (2.65)$$

Transformata odpowiedzi wypadkowej jest zatem następująca

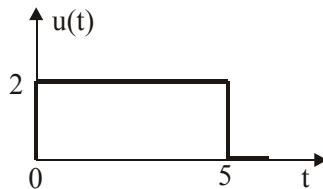
$$Y(s) = G(s) \sum_{i=1}^k U_i(s) e^{-st_i} \quad (2.66)$$

a stąd szukana odpowiedź

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[G(s) \sum_{i=1}^k U_i(s) e^{-st_i} \right] \quad (2.67)$$

Przykład 2.5

Wyznaczyć odpowiedź układu o danej transmitancji $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{s+1}$ na sygnał wejściowy w postaci impulsu prostokątnego (rys. 2.1), przyłożonego do wejścia w chwili $t = 0^+$.



Rys. 2.1. Sygnał wejściowy $u(t)$

Rozwiązanie

Sygnał wejściowy $u(t)$ rozłożono na dwa składniki

$$u(t) = 2 \cdot 1(t) - 2 \cdot 1(t-5) \quad (2.68)$$

Transformata sygnału wejściowego jest wyrażona następująco

$$U(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s} e^{-5s} = \frac{2}{s} (1 - e^{-5s}) \quad (2.69)$$

natomiast transformata sygnału wyjściowego

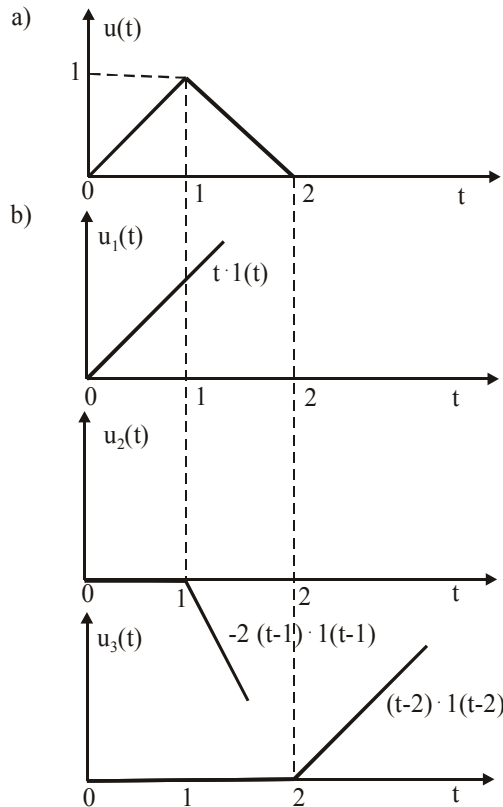
$$Y(s) = G(s) U(s) = \frac{s}{s+1} \frac{2}{s} (1 - e^{-5s}) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+1} e^{-5s} \quad (2.70)$$

Odpowiedź układu wynosi

$$y(t) = 2e^{-t} \cdot 1(t) - 2e^{-(t-5)} \cdot 1(t-5) \quad (2.71)$$

Przykład 2.6

Wyznaczyć transformatę sygnału wejściowego $u(t)$ podanego na rysunku 2.2a.



Rys. 2.2. Rozkład sygnału $u(t)$ na składowe: a) sygnał zadany, b) składowe sygnału zadanego

Rozwiązanie

Sygnał wejściowy $u(t)$ rozłożono na trzy składowe (rys. 2.2b)

$$u(t) = 1(t) - 2(t-1) \cdot 1(t-1) + (t-2) \cdot 1(t-2) \quad (2.72)$$

Transformata tego sygnału wynosi

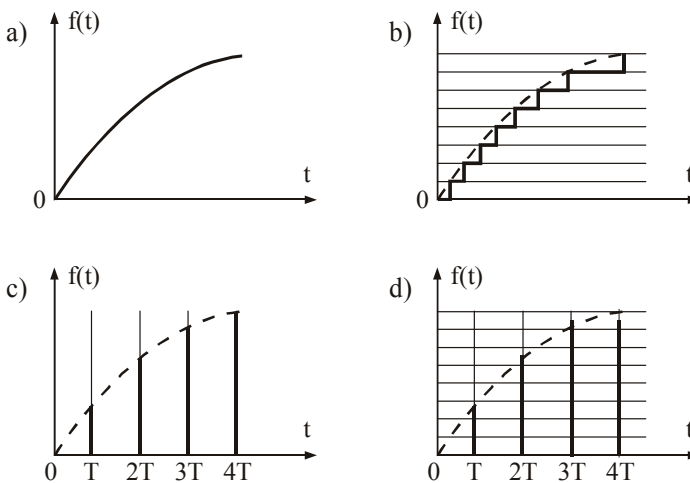
$$U(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2} e^{-2s} = \frac{1}{s^2} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) \quad (2.73)$$

2.2. Podstawy teoretyczne dyskretnych układów dynamicznych

2.2.1. Wprowadzenie

Układami dyskretnymi regulacji automatycznej nazywane są układy, w których informacja jest przekazywana za pomocą sygnałów dyskretnych (nieciągłych). Rozróżniane są sygnały dyskretne w poziomie i sygnały dyskretne w czasie. Sygnałem **dyskretnym w poziomie** jest nazywany sygnał, który może przyjmować dwie lub więcej wartości dyskretnych. Natomiast sygnałem **dyskretnym w czasie** jest nazywany sygnał będący ciągiem impulsów.

Przekształcenie sygnału ciągłego w dyskretny jest nazywane **dyskretyzacją sygnału**. Rozróżnia się dyskretyzację w poziomie (**kwantowanie**) i dyskretyzację sygnału w czasie, zwane **próbkowaniem**. Kwantowanie sygnału występuje np. w układach przekładnikowych. Przykłady dyskretyzacji sygnału przedstawiono na rysunku 2.3.

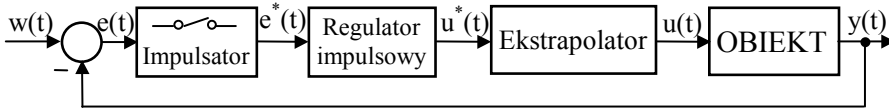


Rys. 2.3. Przykład sygnału: a) ciągłego, b) kwantowanego, c) próbkowanego, d) kwantowanego i próbkowanego

Układy z próbkowaniem sygnału są nazywane **układami dyskretnymi**. Układy dyskretne są więc układami regulacji automatycznej, w których informacja jest przekazywana tylko w dyskretnych chwilach, zwanych chwilami impulsowania (próbkowania). Układy dyskretne mogą być układami liniowymi lub nieliniowymi.

W układach dyskretnych oprócz próbkowania występuje także kwantowanie i binarne kodowanie. Układy takie są również nazywane **układami cyfrowymi**.

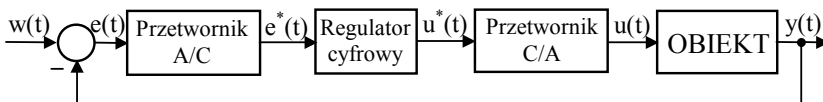
Przedstawienie sygnału ciągłego w postaci ciągu impulsów jest nazywane **modulacją impulsową** i w rozważaniach teoretycznych jest realizowane za pomocą urządzenia zwanego **impulsatorem**. Układ dyskretny ze względu na proces kwantyzacji jest układem nieliniowym. Przykład struktur układu dyskretnego, prezentowanych w celu rozważań teoretycznych oraz zastosowań praktycznych, ilustrują odpowiednio rysunki 2.4 i 2.5.



Rys. 2.4. Schemat blokowy dyskretnego układu regulacji

Podstawowymi elementami układu regulacji są:

- impulsator – element przetwarzający sygnał ciągły $e(t)$ na impulsy $e^*(t)$,
- regulator impulsowy – urządzenie przetwarzające ciąg impulsów $e^*(t)$ w ciąg impulsów $u^*(t)$ (regulator impulsowy spełnia zadanie podobne do zadania regulatora ciągłego),
- ekstrapolator – element, który ciąg impulsów $u^*(t)$ aproksymuje np. funkcją schodkową $u(t)$,
- obiekt regulacji o charakterze ciągłym.



Rys. 2.5. Schemat aplikacyjny dyskretnego układu regulacji

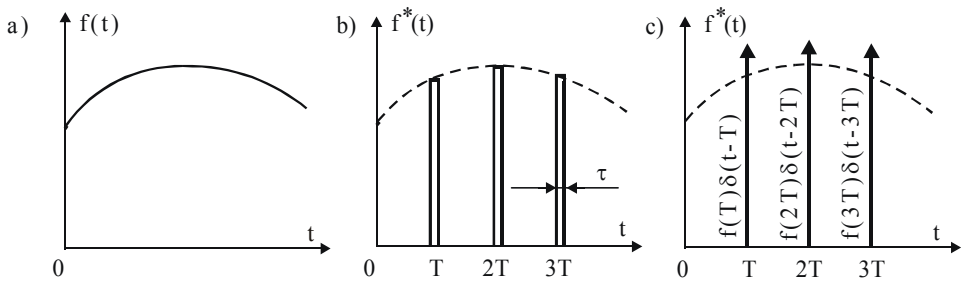
Elementami układu dyskretnego o charakterze aplikacyjnym są:

- przetwornik A/C – przetwornik analogowo-cyfrowy, który próbując cyklicznie sygnał uchybu $e(t)$ przetwarza go na sygnał cyfrowy (binarny) $e^*(t)$,
- regulator cyfrowy – urządzenie mikroprocesorowe, które w wyniku cyklicznego przetworzenia sygnału $e^*(t)$ wyznacza potrzebną wartość sygnału sterującego $u^*(t)$,

- c) przetwornik C/A – przetwornik cyfrowo-analogowy, który przekształca wprowadzaną cyklicznie z regulatora cyfrowego wartość sygnału sterującego $u^*(t)$ na schodkowy sygnał sterujący $u(t)$,
- d) proces – obiekt regulacji o charakterze ciągłym.

Struktura układu dyskretnego przedstawiona na rysunku 2.4 ma znaczenie czysto teoretyczne, tzn. służy do modelowania matematycznego. Opracowano i są stosowane modele matematyczne impulsatora i ekstrapolatora. Trudno jest natomiast zbudować użyteczny w praktyce model matematyczny przetworników analogowo-cyfrowych i cyfrowo-analogowych.

Z teoretycznego punktu widzenia próbkowanie sygnału oznacza proces, w którym następuje wytworzenie ciągu impulsów o pewnej skończonej szerokości τ i o wysokościach równych wartości funkcji ciągłej w chwilach czasowych odpowiadających chwilom próbkowania (rys. 2.6b).



Rys. 2.6. Proces próbkowania: a) sygnał ciągły, b) sygnał próbkowany – rzeczywisty, c) sygnał próbkowany – idealny

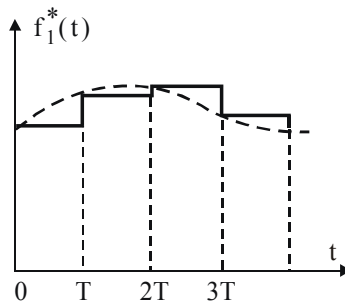
Opis matematyczny takiego impulsatora jest problemem trudnym, dlatego też w celu ułatwienia analizy matematycznej procesu próbkowania przyjmuje się pewien idealny jego model, nazywany **impulsatorem idealnym**. W modelu tym każdy z impulsów rzeczywistych jest zastąpiony przez impuls o nieskończenie małej szerokości, nieskończenie dużej wysokości i o powierzchni jednostkowej pomnożonej przez wartość funkcji w chwili próbkowania (rys. 2.6c).

W każdym dyskretnym układzie sterowania występuje zawsze przynajmniej jeden **ekstrapolator**. W układzie praktycznym funkcję tę spełnia przetwornik cyfrowo-analogowy. Jego zadaniem jest aproksymacja sygnału między kolejnymi próbkami, zwykle funkcją stałą. Ze względu na realizowalność fizyczną w procesie ekstrapolacji można uwzględnić jedynie przeszłe i bieżące wartości dyskretne sygnału.

Najczęściej jest stosowany ekstrapolator *zerowego rzędu* o transmitancji

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (2.74)$$

Ekstrapolatory rzędu wyższego zazwyczaj nie są stosowane ze względu na skomplikowaną realizację praktyczną. Ekstrapolator rzędu zerowego wykorzystuje jedynie ostatnią wartość dyskretną sygnału i aproksymuje ten sygnał między próbkami funkcją stałą (rys. 2.7).



Rys. 2.7. Sygnał wyjściowy ekstrapolatora zerowego rzędu

2.2.2. Analiza procesu próbkowania

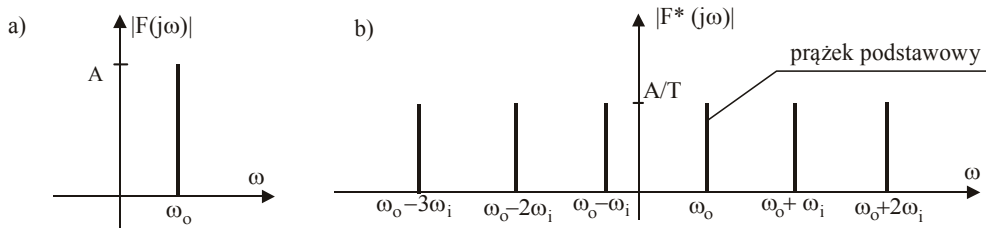
Obecnie zostanie dokonana analiza wpływu częstotliwości próbkowania na możliwość odtworzenia sygnału ciągłego na podstawie odpowiadającego mu sygnału dyskretnego. Niech na wejście impulsatora idealnego zostanie wprowadzona funkcja ciągła o postaci

$$f(t) = A \sin \omega_0 t \quad (2.75)$$

Widmem sygnału ciągłego $f(t)$ jest $|F(j\omega)|$, a sygnału impulsowego $f^*(t) - |F^*(j\omega)|$, przy czym

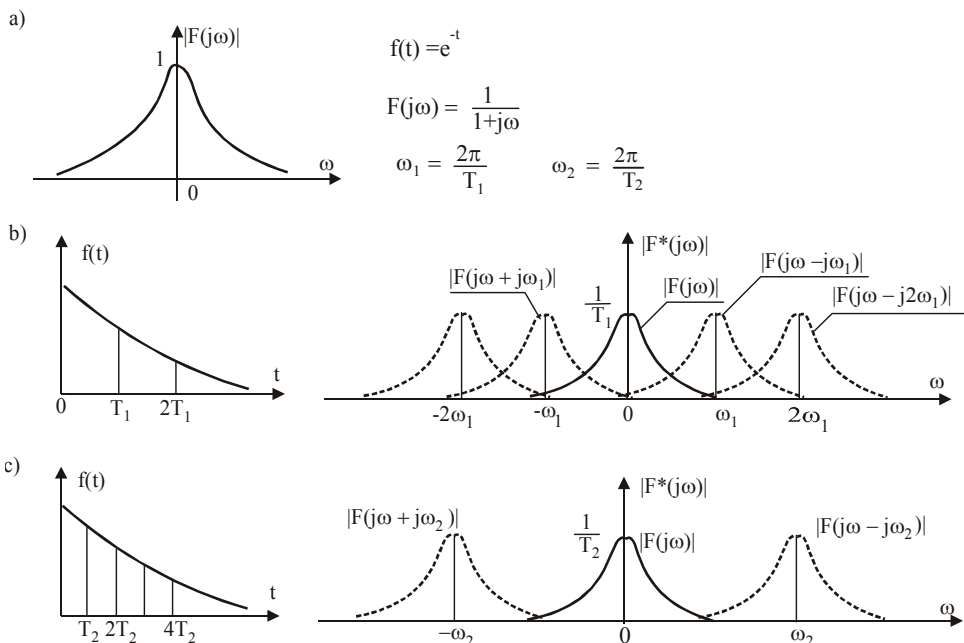
$$|F^*(j\omega)| = \left| \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[j(\omega_0 + k\omega_i)] \right| \quad (2.76)$$

Widmo sygnału impulsowego jest więc sumą wielokrotnie powtórnego widma sygnału ciągłego (rys. 2.8a), przesuniętego o wielokrotność $\omega_i = 2\pi/T$ (rys. 2.8b). Amplitudy wszystkich harmonicznnych są równe amplitudzie sygnału $f(t)$ pomnożonej przez czynnik $1/T$.



Rys. 2.8. Widma częstotliwościowe: a) sygnału ciągłego, b) sygnału próbkowanego

Niech z kolei na wejście impulsatora idealnego wprowadzony zostanie sygnał $f(t) = e^{-t}$. Widmo częstotliwościowe $|F^*(j\omega)|$ takiego sygnału pokazano na rysunku 2.9a. Sygnał wyjściowy $f^*(t)$ ma widmo częstotliwościowe, które pokazano na rysunku 2.9b (dla dużej wartości okresu próbkowania T) i 2.9c (dla małej wartości T). Jeżeli wartość okresu próbkowania T jest duża, to poszczególne składowe (w szczególności składowa podstawowa i następne) nie zachodzą na siebie. Wówczas poprzez filtrowanie z sygnału $f^*(t)$ można wyodrębnić składową podstawową, eliminując składowe o wyższych częstotliwościach.



Rys. 2.9. Widma częstotliwościowe: a) sygnału ciągłego, b) sygnału próbkowanego z dużą wartością okresu próbkowania, c) sygnału próbkowanego z małą wartością okresu próbkowania

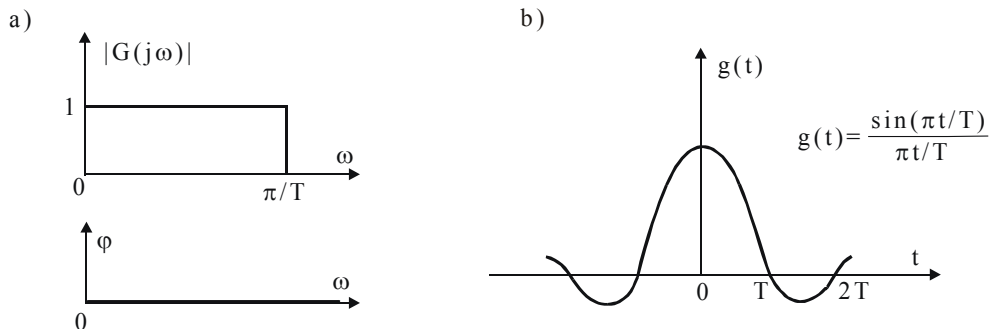
W przypadku układów dyskretnych istotna jest odpowiedź na pytanie: kiedy i jak można zrekonstruować sygnał ciągły $f(t)$ na podstawie sygnału dyskretnego $f^*(t)$. Intuicyjna odpowiedź na to pytanie jest następująca:

sygnał pierwotny $f(t)$ można odzyskać, jeżeli nie zachodzi nakładanie się składowej podstawowej i składowych o wyższych częstotliwościach widma sygnału próbkowanego. Wówczas można odfiltrować składową podstawową widma sygnału próbkowanego, bez jakiegokolwiek zniekształcenia fazy i wzmacnienia.

Powyższe stwierdzenie jest zgodne z treścią twierdzenia **Shannona-Kotelnikowa** (nazywanym także twierdzeniem **Someya-Shannona**), według którego

sygnał ciągły, próbkowany z częstotliwością co najmniej dwukrotnie większą od granicznej częstotliwości swego widma, może być ponownie odtworzony z sygnału impulsowego.

Charakterystyki filtra do odfiltrowania składowej podstawowej przedstawiono na rysunku 2.10.



Rys. 2.10. Charakterystyki filtra: a) częstotliwościowe, b) odpowiedź impulsowa

Filtr o charakterystykach przedstawionych na rysunku 2.10 nie da się zrealizować fizycznie. Stąd pełna rekonstrukcja sygnału ciągłego $f(t)$ na podstawie jego sygnału impulsowego $f^*(t)$ jest w praktyce niemożliwa. Przybliżona rekonstrukcja sygnału może być przeprowadzona przez ekstrapolator.

Jeśli znane są stałe czasowe ciągłych członów układu regulacji, to przyjmuje się, że

okres próbkowania powinien być co najmniej dwa rzędy mniejszy od najmniejszej stałej czasowej układu regulacji.

2.3. Przekształcenie \mathcal{Z}

2.3.1. Definicja

Do opisu i analizy układów dyskretnych jest wykorzystywana technika przekształceń dyskretnych, które stanowią odpowiednik przekształcenia Laplace'a znajdującego zastosowanie w analizie układów ciągłych. Rozwój metod analizy opartych na przekształceniach dyskretnych wiąże się z szerokim zastosowaniem komputerów. Spośród wielu przekształceń dyskretnych, najszersze zastosowanie znalazło przekształcenie \mathcal{Z}

Przekształceniem (transformatą) \mathcal{Z} dyskretnej funkcji czasu $f^*(t)$ jest nazywane przekształcenie operatorowe

$$\mathcal{Z} [f^*(t)] = \mathcal{Z} [f(kT)] = F(z) \quad (2.77)$$

określone wzorem

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \quad (2.78)$$

gdzie: $f(kT)$ – oryginał dyskretny, $F(z)$ – transformata funkcji $f(kT)$.

Równanie (2.78) jest dyskretnym przybliżeniem ciągłego przekształcenia Laplace'a. Należy zwrócić uwagę na zastąpienie całki przez sumę, funkcji $f(t)$ przez $f(kT)$ oraz e^{-st} przez z^{-k} .

Warunkiem istnienia transformaty $F(z)$ jest zbieżność szeregu (2.78). Zbieżność ta jest zapewniona, jeżeli

$$|f(kT)| < \infty \quad \text{dla} \quad k < \infty \quad (2.79)$$

oraz

$$|f(kT)| \leq a^k \quad \text{dla} \quad k > N \quad (2.80)$$

gdzie: a – odpowiednio dobrana liczba dodatnia ($a < \infty$), N – dostatecznie duża liczba naturalna.

Ogólnie można stwierdzić, że transformaty \mathcal{Z} istnieją dla funkcji dyskretnych, które rosną nie szybciej od funkcji wykładniczych. Na przykład dla funkcji dyskretnych $f(k) = k!$ oraz $f(k) = \exp(ak^2)$ ($a \neq 0$) nie istnieją transformaty \mathcal{Z} , ponieważ funkcje te rosną szybciej od funkcji wykładniczych.

2.3.2. Transformaty podstawowych funkcji

Transformata jednostkowej funkcji skokowej. Niech $1(k)$ będzie funkcją skokową, dyskretną, określoną zależnością

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k \geq 0 \\ 0 & \text{dla } k < 0 \end{cases} \quad (2.81)$$

Korzystając z definicji przekształcenia \mathcal{Z} (równanie (2.78)) oraz ze wzoru na sumę postępu geometrycznego, otrzymano

$$F(z) = \mathcal{Z}[1(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{dla } |z| > 1 \quad (2.82)$$

Transformata funkcji liniowej. Niech dyskretna funkcja liniowa ma postać

$$f(kT) = bkT \quad (2.83)$$

Transformata tej funkcji jest określona następująco

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = bT(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots)z^{-1} = \frac{bTz}{(z-1)^2} \quad \text{dla } |z| > 1 \quad (2.84)$$

Transformata funkcji wykładniczej. Funkcja wykładnicza ma postać

$$e^{ak} = \begin{cases} e^{ak} & \text{dla } k \geq 0 \\ 0 & \text{dla } k < 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

Korzystając z definicji przekształcenia \mathcal{Z} oraz ze wzoru na sumę postępu geometrycznego, otrzymano

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ak} z^{-k} = \frac{1}{1 - \frac{e^a}{z}} = \frac{z}{z - e^a} \quad \text{dla } |z| > |e^a| \quad (2.86)$$

Transformaty \mathcal{Z} najczęściej spotykanych funkcji zamieszczono w tabeli 2.2 (obszerny wykaz transformat znajduje się w pracy [10]).

Tabela 2.2. Tabela transformat \mathcal{Z}

Lp.	$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
1.	$\delta(t)$	1	1
2.	1(t)	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
4.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
5.	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
6.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

2.3.3. Właściwości przekształcenia \mathcal{Z}

Podobnie jak w przypadku ciągłego przekształcenia Laplace'a istnieje wiele twierdzeń dotyczących dyskretnego przekształcenia \mathcal{Z} . Najistotniejsze z nich przytoczone zostaną poniżej.

Twierdzenie o liniowości

$$\mathcal{Z} [af_1(kT) + bf_2(kT)] = aF_1(z) + bF_2(z) \quad (2.87)$$

Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie czasu

$$\mathcal{Z} [f(kT + mT) \cdot 1(kT)] = z^m \left[F(z) - \sum_{n=0}^{m-1} f(nT)z^{-n} \right] \quad (2.88)$$

gdzie: m – dowolna dodatnia liczba całkowita, a $\mathcal{Z}[f(kT)] = F(z)$. W szczególności dla funkcji przesuniętej, np. w lewo

$$\mathcal{Z} [f(kT - mT) \cdot 1(kT - mT)] = z^{-m} F(z) \quad (2.89)$$

Twierdzenie o transformacie różnicy

$$\mathcal{Z}[\Delta f(k)] = (z-1)F(z) - zf(0) \quad (2.90)$$

przy czym $\Delta f(k) = f[(k+1)T] - f(kT)$ – różnica pierwszego rzędu.

Twierdzenie o wartości końcowej

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \quad (2.91)$$

2.3.4. Odwrotne przekształcenie \mathcal{Z}

Proces wyznaczania wartości dyskretnych funkcji $f(kT)$ na podstawie znajomości transformaty $F(z)$ nosi nazwę odwrotnego przekształcenia \mathcal{Z}

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = f(kT), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.92)$$

Odwrotne przekształcenie \mathcal{Z} można zrealizować następującymi metodami:

- rozkładu na ułamki proste,
- szeregu potęgowego,
- residuów.

A. Metoda rozkładu na ułamki proste

Niech transformata dyskretna $F(z)$ ma postać wielomianowej funkcji wymiernej

$$F(z) = \frac{L(z)}{M(z)} \quad (2.93)$$

Zakłada się, że równanie charakterystyczne

$$M(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i = 0 \quad (2.94)$$

ma wyłącznie pierwiastki z_1, z_2, \dots, z_n jednokrotne i różne od jedności. Funkcję wymierną (2.93) można rozłożyć na ułamki proste, zgodnie z zależnością

$$F(z) = \frac{L(z)}{M(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - z_i} \quad (2.95)$$

gdzie współczynniki c_i (podobnie jak w układach ciągłych) są wyznaczane w oparciu o metodę współczynników nieoznaczonych lub z równania

$$c_i = \frac{L(z_i)}{M'(z_i)} \quad (2.96)$$

gdzie:

$$M'(z_i) = \left. \frac{dM(z)}{dz} \right|_{z=z_i} = (z_i - z_1) \dots (z_i - z_{i-1})(z_i - z_{i+1}) \dots (z_i - z_n) \neq 0 \quad (2.97)$$

Oryginał transformaty (2.95) jest sumą oryginałów poszczególnych ułamków prostych. Oryginały te można znaleźć w tablicach transformat dyskretnych.

Oryginał transformaty (2.95), po uwzględnieniu równań (2.96) i (2.97), wyraża się zależnością

$$f(kT) = \sum_{i=1}^n \frac{L(z_i)}{M'(z_i)} z_i^{k-1} \quad (2.98)$$

W przypadku, gdy na układ działa wymuszenie w postaci funkcji skokowej, jeden z pierwiastków równania charakterystycznego (2.94) jest równy jedności. Można wówczas napisać

$$M(z) = (z-1)M_1(z) \quad (2.99)$$

przy czym równanie $M_1(z) = 0$ ma pierwiastki z_1, z_2, \dots, z_{n-1} jednokrotne i różne od jedności.

Z wyrażenia

$$M'(z) = M_1(z) + (z-1)M_1'(z) \quad (2.100)$$

wynika, że

$$M'(z_i) = \begin{cases} M_1(1) & \text{dla } z_i = 1 \\ (z_i - 1)M_1'(z_i) & \text{dla } z_i - \text{pierwiastka równania } M_1(z) = 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

Uwzględniając (2.101) w równaniu (2.98) otrzymano

$$f(kT) = \frac{L(1)}{M_1(1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{L(z_i)}{(z_i - 1)M_1'(z_i)} z_i^{k-1} \quad (2.102)$$

przy czym

$$M_1'(z_i) = \left. \frac{dM_1(z)}{dz} \right|_{z=z_i} = (z_i - z_1) \dots (z_i - z_{i-1})(z_i - z_{i+1}) \dots (z_i - z_{n-1}) \quad (2.103)$$

Jeżeli równanie charakterystyczne (2.94) posiada r różnych pierwiastków z_1, z_2, \dots, z_r odpowiednio o krotnościach $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$, to – analogicznie jak w układach ciągłych – oryginał transformaty (2.100) jest określony wzorem [12]

$$f(kT) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{m_i-1} c_{il} \frac{(k-l)!}{(k-l-1)!l!} z_i^{k-l-i} \quad (2.104)$$

przy czym

$$c_{il} = \frac{1}{(m_i - l - 1)!} \frac{d^{m_i - l - 1}}{dz^{m_i - l - 1}} \left[\frac{L(z)}{M(z)} (z - z_i)^{m_i} \right]_{z=z_i} \quad (2.105)$$

Przykład 2.7

Wyznaczyć oryginał transformaty

$$F(z) = \frac{z}{(z + 0,5)(z - 0,3)} \quad (2.106)$$

metodą rozkładu na ułamki proste.

Rozwiązanie

Oryginał transformaty $F(z)$ wyznaczono korzystając z zależności (2.98)

$$\begin{aligned} f(kT) &= \frac{L(z_1)}{z_1 - z_2} \Big|_{z_1 = -0,5} z_1^{k-1} + \frac{L(z_2)}{z_2 - z_1} \Big|_{z_2 = 0,3} z_2^{k-1} = \\ &= \frac{-0,5}{-0,8} (-0,5)^{k-1} + \frac{0,3}{0,8} 0,3^{k-1} = 0,625(-0,5)^{k-1} + 0,375(0,3)^{k-1} \end{aligned} \quad (2.107)$$

B. Metoda szeregu potęgowego

Stosując metodę szeregu potęgowego można znaleźć tylko pewną liczbę początkowych wyrazów funkcji $f(kT)$, np. przy obliczaniu odpowiedzi skokowej. Wówczas nie ma potrzeby wyznaczania wyrażenia ogólnego dla dowolnego k , lecz można otrzymać poszukiwane wartości przez rozwinięcie $F(z)$ w szereg potęgowy względem z^{-1} . Z definicji transformaty $F(z)$ wynika, że

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots \quad (2.108)$$

Jeżeli transformata $F(z)$ zostanie przedstawiona w postaci nieskończonego szeregu potęgowego względem z^{-1} , to współczynniki liczbowe jego kolejnych wyrazów będą szukanymi wartościami $f(kT)$. Funkcję $F(z)$ można łatwo rozwinąć

w szereg nieskończony, wykonując dzielenie wielomianu w liczniku przez wielomian w mianowniku transformaty $F(z)$.

Zaletą tej metody, istotną zwłaszcza przy rozważaniu układów regulacji wyższych rzędów, jest to, że nie trzeba określać biegunów transformaty $F(z)$. Natomiast wadą jest silna kumulacja błędów zaokrążeń. Jeśli więc trzeba obliczać większą liczbę punktów, należy zadbać o bardzo dokładne wyznaczenie pierwszej wartości rozwinięcia w szereg.

Przykład 2.8

Wyznaczyć oryginał transformaty

$$F(z) = \frac{0,181z}{z^2 - 1,638z + 0,638} \quad (2.109)$$

Rozwiązanie

Dzieląc wielomian w liczniku przez wielomian w mianowniku transformaty $F(z)$ otrzymano

$$\begin{array}{r} 0,181z \\ \hline 0,181z - 0,297 + 0,115z^{-1} \\ \hline 0,297 - 0,115z^{-1} \\ \hline 0,297 - 0,487z^{-1} + 0,19z^{-2} \\ \hline 0,372z^{-1} - 0,19z^{-2} \end{array} : \frac{0,181z^{-1} + 0,297z^{-2} + 0,372z^{-3} + \dots}{z^2 - 1,638z + 0,638}$$

Zatem

$$F(z) = 0,181z^{-1} + 0,297z^{-2} + 0,372z^{-3} + \dots \quad (2.110)$$

Porównując $F(z)$ ze wzorem (2.114) otrzymano:

$$f(0) = 0, \quad f(T) = 0,181, \quad f(2T) = 0,297, \quad f(3T) = 0,372, \dots \quad (2.111)$$

C. Metoda residuów

Jeżeli transformata $F(z)$ jest funkcją wymierną, to na podstawie twierdzenia Cauchy'ego o residuach jest słuszna zależność

$$f(kT) = \sum_i \operatorname{res} [F(z)z^{k-1}]_{z=z_i} \quad (2.112)$$

przy czym z_i są biegunami funkcji $F(z)z^{k-1}$.

Jeżeli biegun z_i jest biegunem jednokrotnym funkcji $F(z)$, to residuum funkcji $F(z)z^{k-1}$ w tym punkcie oblicza się ze wzoru

$$\operatorname{res} [F(z)z^{k-1}]_{z=z_i} = \lim_{z \rightarrow z_i} [(z - z_i)F(z)z^{k-1}] \quad (2.113)$$

Natomiast jeżeli biegun z_i jest biegunem m_i -krotnym funkcji $F(z)$, to residuum funkcji $F(z)z^{k-1}$ w tym punkcie jest określone zależnością

$$\operatorname{res} [F(z)z^{k-1}]_{z=z_i} = \frac{1}{(m_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{m_i - 1}}{dz^{m_i - 1}} [(z - z_i)^{m_i} F(z)z^{k-1}] \quad (2.114)$$

Należy tu podkreślić, że przekształcenie odwrotne \mathcal{Z} określa na podstawie transformaty $F(z)$ jej oryginał dyskretny $f(kT)$, któremu mogą odpowiadać różne funkcje ciągłe $f(t)$. Wynika stąd, że przekształcenie \mathcal{Z} jest wzajemnie jednoznaczne tylko względem oryginału dyskretnego.

Przykład 2.9

Dana jest transformata dyskretna

$$F(z) = \frac{-0,4z^2 + 1,08z}{(z + 0,5)(z - 0,3)^2} \quad (2.115)$$

Wyznaczyć oryginał dyskretny $f(kT)$.

Rozwiązanie

$$f(kT) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \operatorname{res} [F(z)z^{k-1}]_{z=-0,5} + \operatorname{res} [F(z)z^{k-1}]_{z=0,3} \quad (2.116)$$

$$\operatorname{res} [F(z)z^{k-1}]_{z=-0,5} = \frac{-0,4 \cdot 0,25 - 1,08 \cdot 0,5}{(-0,5 - 0,3)^2} (-0,5)^{k-1} = 2(-0,5)^k \quad (2.117)$$

$$\operatorname{res} [F(z)z^{k-1}]_{z=0,3} = \lim_{z \rightarrow 0,3} \frac{d}{dz} \left[\frac{-0,4z^2 + 1,08z}{z + 0,5} z^{k-1} \right] = (4k - 2)0,3^k \quad (2.118)$$

Ostatecznie

$$f(kT) = 2(-0,5)^k + (4k - 2)0,3^k \quad (2.119)$$

3. METODY OPISU UKŁADÓW LINIOWYCH

Własności statyczne i dynamiczne układu, zwane często odpowiednio charakterystykami statycznymi i dynamicznymi, wyrażane są za pomocą różnych form zapisu. Najczęściej są to: równania różniczkowe, transmitancje, równania stanu, charakterystyki czasowe lub częstotliwościowe. Postać zapisu narzuca określoną metodę analizy lub syntezy układu i uzależniona jest głównie od celu, któremu ma służyć.

3.1. Równania różniczkowe i różnicowe

3.1.1. Równania różniczkowe

Równanie różniczkowe zwyczajne, opisujące ciągły, jednowymiarowy obiekt sterowania o stałych skupionych ma ogólną postać

$$F = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}, z, \dot{z}, \dots, z^{(k)}, t) = 0 \quad (3.1)$$

przy czym: y – sygnał wyjściowy; u – sygnał wejściowy; z – zakłócenia działające na obiekt. Równanie to w przypadku ogólnym opisuje jednowymiarowy obiekt nieliniowy i niestacjonarny. Gdy obiekt jest stacjonarny, w równaniu nie występuje bezpośrednio zależność od czasu, co oznacza, że parametry układu (współczynniki równania (3.1)) są stałe. Gdy natomiast obiekt jest liniowy, równanie (3.1) jest liniową kombinacją sygnałów i ich pochodnych. W przypadku ciągłego i stacjonarnego układu liniowego równanie (3.1) można zapisać w postaci

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) + c_k \frac{d^k z(t)}{dt^k} + \dots + c_1 \frac{dz(t)}{dt} + c_0 z(t) \quad (3.2)$$

Zależnie od warunków pracy rozróżnia się cztery przypadki:

1. Na obiekt działa zarówno sygnał sterujący $u(t)$, jak i sygnał (lub sygnały) zakłócający $z(t)$. Dynamikę obiektu opisuje równanie (3.2).
2. Na obiekt działa tylko sygnał sterujący, a zakłócenie i jego pochodne są równe zeru.
3. Na obiekt nie działa sygnał sterujący (sygnał ten i jego pochodne są równe zeru), natomiast działa zakłócenie $z(t)$.
4. Na obiekt nie działają żadne sygnały zewnętrzne.

Jeżeli na obiekt nie działają żadne sygnały zewnętrzne, wówczas równanie opisujące jego właściwości upraszcza się do postaci

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad (3.3)$$

Jest to równanie obiektu w stanie swobodnym. Przez analogię do zjawisk w układach mechanicznych jest także nazywane **równaniem ruchu swobodnego** lub **równaniem drgań własnych**. Charakteryzuje ono zachowanie się obiektu po odjęciu wszelkich sygnałów zewnętrznych i ma duże znaczenie przy badaniu własności dynamicznych obiektów.

W przypadku obiektu liniowego, opis za pomocą równania różniczkowego jest poprawny w całym zakresie dopuszczalnych (ze względów konstrukcyjnych i technologicznych) zmian wartości sygnału wejściowego $u(t)$ i wyjściowego $y(t)$. Gdy natomiast obiekt jest nieliniowy, opis za pomocą liniowego równania różniczkowego jest zasadny tylko w otoczeniu pewnego punktu, wybranego na charakterystyce statycznej, wokół którego model matematyczny był linearyzowany. Równanie liniowe opisuje więc pewien wyidealizowany obiekt, którego rzeczywiste procesy są nieliniowe. Przyjęcie takiego uproszczenia opisu jest uzasadnione w przypadku, gdy właściwości dynamiczne i statyczne obiektu różnią się stosunkowo nieznacznie od rzeczywistych. Zastosowanie linearyzacji umożliwia dokonywanie analizy obiektu z wykorzystaniem metod stosowanych w układach liniowych.

Istotną właściwością obiektu w stanie ustalonym jest zależność sygnału wyjściowego od wejściowego, którą nazywa się **charakterystyką statyczną**. Wyznacza się ją z równania różniczkowego poprzez przyrównanie wszystkich pochodnych do zera.

Eksperymentalnie punkt leżący na charakterystyce statycznej wyznacza się wprowadzając na wejście obiektu stały sygnał i mierząc w stanie ustalonym jego wyjście. Dokonując pomiaru dla różnych, ale stałych wartości sygnału wejściowego, otrzyma się zbiór punktów, który po odpowiedniej aproksymacji stanowi charakterystykę statyczną.

3.1.2. Równania różnicowe

Odpowiednikiem równania różniczkowego w układach dyskretnych jest **równanie różnicowe**, w którym czas ma wartość dyskretną. Równanie różnicowe

można otrzymać z równania różniczkowego, zastępując pochodną różnicą pierwszego rzędu. Rozróżnia się różnice: **wyprzedzone**, **wsteczne** i **centralne**.

Pochodna sygnału $f(t)$ w chwili $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) może być wyznaczana z zależności (różnica wyprzedzona)

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{f(k+1) - f(k)}{T} \quad (3.4)$$

gdzie: $f(k) = f(kT)$, $f(k+1) = f[(k+1)T]$.

W realizacji praktycznej układu dyskretnego okres próbkowania $T > 0$ i wówczas

$$\dot{f}(k) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=k} \approx \frac{1}{T} [f(k+1) - f(k)] = \frac{1}{T} \Delta f(k) \quad (3.5)$$

przy czym $\Delta f(k)$ – różnica pierwszego rzędu.

Analogicznie można wyznaczyć drugą pochodną

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) \Big|_{t=k} &= \frac{\dot{f}(k+1) - \dot{f}(k)}{T} = \frac{[f(k+2) - f(k+1)] - [f(k+1) - f(k)]}{T^2} = \\ &= \frac{f(k+2) - 2f(k+1) + f(k)}{T^2} = \frac{1}{T^2} \Delta^2 f(k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdzie $\Delta^2 f(k)$ – różnica drugiego rzędu.

Należy zauważyć, że obliczając pochodną jako różnicę wsteczną

$$\dot{f}(t) \Big|_{t=k} = \frac{f(k) - f(k-1)}{T} \quad (3.7)$$

wówczas

$$\ddot{f}(t) \Big|_{t=k} = \frac{f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)}{T^2} \quad (3.8)$$

Każde równanie różniczkowe układu dynamicznego można przekształcić w równanie różnicowe dokonując próbkowania sygnałów w czasie i przybliżając pochodne różnicami. Niech układ dynamiczny opisany będzie równaniem różniczkowym

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{l=0}^m b_l \frac{d^l}{dt^l} u(t), \quad n \geq m \quad (3.9)$$

Jeśli sygnały $y(t)$ i $u(t)$ zostaną poddane próbkowaniu z okresem T , wówczas równanie różniczkowe (3.9) przechodzi w równanie różnicowe o postaci

$$\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{T^i} \Delta^i y(k) = \sum_{l=0}^m \frac{b_l}{T^l} \Delta^l u(k) \quad (3.10)$$

Ogólnie i -ta wsteczna różnica funkcji dyskretnej $f(k)$ jest określona zależnością

$$\Delta^i f(k) = \sum_{n=0}^i r_n f(k-n) \quad (3.11)$$

gdzie

$$r_n = (-1)^{2i+n} \frac{i!}{(i-n)!n!}$$

W tabeli 3.1 przedstawiono wartość współczynników r_n dla siedmiu pierwszych różnic.

Tabela 3.1. Wartości współczynników r_n

Rząd różnicy i	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7
1	1	-1						
2	1	-2	1					
3	1	-3	3	-1				
4	1	-4	6	-4	1			
5	1	-5	10	-10	5	-1		
6	1	-6	15	-20	15	-6	1	
7	1	-7	21	-35	35	-21	7	-1

Rozwiązanie $y(k)$ równania (3.10) jest przybliżeniem rozwiązania równania różniczkowego (3.9) w chwilach próbkowania. Dokładność tego przybliżenia rośnie, gdy okres próbkowania $T \rightarrow 0$. Równanie (3.10) jest równaniem rekurencyjnym; jego rozwiązanie polega na wyznaczeniu punkt po punkcie wartości odpowiedzi $y(k)$, dla danej funkcji wymuszającej $u(k)$ i danych warunków początkowych.

Dokonując przekształcenia \mathcal{Z} równania różnicowego (3.10) można otrzymać transmitancję dyskretną $G(z)$. Zastosowanie różnicy wstecznej do aproksymacji pochodnej pozwala bezpośrednio zastosować twierdzenie o przesunięciu funkcji.

Przykład 3.1

Dane jest równanie różniczkowe

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad (3.12)$$

Wyznaczyć równanie różnicowe.

Rozwiązanie

Równanie różniczkowe zastąpiono równaniem różnicowym, przyjmując różnicę wsteczną

$$\frac{T_1}{T} [y(k) - y(k-1)] + y(k) = Ku(k) \quad (3.13)$$

3.2. Transmitancje operatorowe

3.2.1. Transmitancja operatorowa układu ciągłego

Transmitancją operatorową $G(s)$ jednowymiarowego układu liniowego i stacjonarnego nazywa się wielkość określoną jako stosunek transformaty Laplace'a $Y(s)$ sygnału wyjściowego obiektu do transformaty $U(s)$ sygnału wejściowego, przy zerowych warunkach początkowych

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (3.14)$$

przy czym transformaty $Y(s)$ i $U(s)$ określone są następująco:

$$Y(s) = \int_0^{+\infty} y(t)e^{-st} dt, \quad U(s) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st} dt \quad (3.15)$$

Dla układów opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach transmitancja operatorowa jest funkcją wymierną zmiennej zespolonej s , tj. jest ilorazem dwóch wielomianów o postaci

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m \leq n \quad (3.16)$$

Pierwiastki licznika, tzn. równania $L(s) = 0$, nazywa się **zerami**, natomiast pierwiastki mianownika – **biegunami transmitancji**.

Charakterystykę statyczną z transmitancji (3.16) wyznacza się przyjmując $s = 0$, co w przypadku równania różniczkowego jest równoznaczne zerowaniu się pochodnych. Charakterystyka ta określona jest zależnością

$$y = \frac{b_0}{a_0} u \quad (3.17)$$

a jej współczynnik jest nazywany **współczynnikiem wzmocnienia**.

W przypadku wielowymiarowego układu o r wejściach i m wyjściach definiuje się **macierz transmitancji**, zwaną także **transmitancją macierzową**

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

gdzie:

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (3.19)$$

Transmitancje $G_{ij}(s)$ są równe stosunkowi transformaty i -tego sygnału wyjściowego do transformaty j -tego sygnału wejściowego, przy założeniu, że wszystkie pozostałe sygnały wejściowe i warunki początkowe obiektu są równe zeru.

Opis wielowymiarowego układu liniowego za pomocą macierzy transmitancji można potraktować jako wynik prób zastosowania analogicznego podejścia jak w przypadku układów jednowymiarowych. Takie rozszerzenie znanego z teorii układów jednowymiarowych podejścia do zagadnień dynamiki układów wielowymiarowych może być często dogodnie. Poza tym zaletą opisu za pomocą macierzy transmitancji jest to, że transmitancje stanowiące elementy tej macierzy reprezentują właściwości dynamiczne poszczególnych części układu. Umożliwia to doświadczone wyznaczanie tych elementów oraz całej macierzy transmitancji.

Opis ten ma istotne wady. Jedną z nich jest ujęcie wszystkich własności dynamicznych obiektu tylko w określonych przypadkach, np. gdy poszczególne wejścia oddziałują na wszystkie wyjścia obiektu. Powyższe własności opisu układów wielowymiarowych przy użyciu macierzy transmitancji spowodowały, że wprowadzono i powszechnie stosuje się ich opis w **przestrzeni stanów** (za pomocą równań wektorowo-macierzowych), który pozwala na pełniejsze przedstawienie zjawisk dynamicznych w układzie, a także stwarza dogodne warunki prowadzenia obliczeń za pomocą komputerów.

3.2.2. Transmitancja operatorowa układu dyskretnego

Dogodną postacią opisu liniowych układów ciągłych jest wykorzystanie pojęcia transmitancji, tzn. stosunku transformat Laplace'a sygnału wyjściowego i wejściowego. Analogicznie, do opisu układów dyskretnych jest stosowane pojęcie, tzw. transmitancji dyskretniej.

Transmitancją dyskretną $G(z)$ jednowymiarowego układu dyskretnego jest nazywana wielkość określona jako stosunek dyskretniej transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego $Y(z)$ do transformaty sygnału wejściowego $U(z)$ przy założeniu że warunki początkowe są zerowe

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (3.20)$$

Dla dyskretnych układów liniowych, opisanych liniowymi równaniami, transmitancja dyskretna jest wielomianową funkcją wymierną zmiennej z (tj. ilorazem dwóch wielomianów) o postaci

$$G(z) = \frac{L(z)}{M(z)} \quad (3.21)$$

Pierwiastki równania $L(z) = 0$ są nazywane **zerami**, a pierwiastki równania $M(z) = 0$ – **biegunami** transmitancji dyskretniej (3.21).

Niech dany będzie dyskretny układ wielowymiarowy, liniowy o p wejściach i q wyjściach. Symbolem $U_j(z)$ określono transformatę \mathcal{Z} j -tego wejścia u_j ($j = 1, 2, \dots, p$), natomiast symbolem $Y_i(z)$ – transformatę \mathcal{Z} i -tego wyjścia y_i ($i = 1, 2, \dots, q$) tego układu.

Właściwości dynamiczne wielowymiarowego układu dyskretnego o p wejściach i q wyjściach określa **dyskretna transmitancja macierzowa** (lub macierz transmitancji dyskretnych) o postaci

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) & \cdots & G_{1p}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) & \cdots & G_{2p}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{q1}(z) & G_{q2}(z) & \cdots & G_{qp}(z) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

gdzie

$$G_{ij}(z) = \frac{Y_i(z)}{U_j(z)} \quad (3.23)$$

jest transmitancją dyskretną między i -tym wyjściem, a j -tym wejściem wielowymiarowego układu dyskretnego, przy założeniu, że wszystkie wejścia z wyjątkiem j -tego są równe zeru oraz warunki początkowe są także zerowe.

Wprowadzając oznaczenia:

$$\mathbf{U}(z) = \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \\ \dots \\ U_p(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}(z) = \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \\ \dots \\ Y_q(z) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

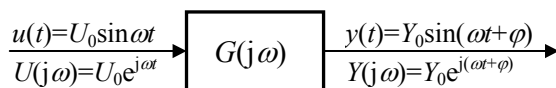
transformatę sygnału wyjściowego można zapisać

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{U}(z) \quad (3.25)$$

3.3. Transmitancja widmowa

3.3.1. Transmitancja widmowa układu ciągłego

Jeżeli na wejście elementu liniowego wprowadzone zostanie wymuszenie harmoniczne o stałej pulsacji ω , to na wyjściu po zaniknięciu przebiegu przejściowego ustali się odpowiedź harmoniczna o tej samej pulsacji ω , ale w ogólnym przypadku o innej amplitudzie i fazie niż wymuszenie (rys. 3.1). Teoretyczną podstawę analizy w dziedzinie częstotliwościowej stanowi transmitancja widmowa.



Rys. 3.1. Schemat blokowy układu liniowego z wymuszeniem harmonicznym

Transmitancją widmową $G(j\omega)$ liniowego układu stacjonarnego nazywa się iloraz wartości zespolonej odpowiedzi $Y(j\omega)$ wywołanej wymuszeniem harmonicznym do wartości zespolonej $U(j\omega)$ tego wymuszenia

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (3.26)$$

Transmitancję widmową $G(j\omega)$ wyznacza się z transmitancji operatorowej na podstawie zależności

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} \quad (3.27)$$

Wynika to z faktu, że przekształcenie Fouriera dla $s = j\omega$ jest szczególnym przypadkiem przekształcenia Laplace'a. Wobec tego transmitancja widmowa, odpowiadająca transmitancji operatorowej (3.16), ma postać

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1j\omega + a_0}, \quad m \leq n \quad (3.28)$$

Wyrażenie to można przedstawić także w innych postaciach:

a) jako iloraz dwóch wielkości zespolonych

$$G(j\omega) = \frac{a(\omega) + jb(\omega)}{c(\omega) + jd(\omega)} \quad (3.29)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} a(\omega) &= b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - b_6\omega^6 + \dots \\ b(\omega) &= b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - b_7\omega^7 + \dots \\ c(\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \dots \\ d(\omega) &= a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - a_7\omega^7 + \dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

b) jako suma składnika rzeczywistego i urojonego (postać algebraiczna)

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (3.31)$$

przy czym po uwzględnieniu (3.29)

$$P(\omega) = \frac{a(\omega)c(\omega) + b(\omega)d(\omega)}{c^2(\omega) + d^2(\omega)} \quad (3.32)$$

$$Q(\omega) = \frac{b(\omega)c(\omega) - a(\omega)d(\omega)}{c^2(\omega) + d^2(\omega)} \quad (3.33)$$

c) w postaci wykładniczej

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.34)$$

gdzie moduł

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad (3.35)$$

lub po podstawieniu równań (3.32) i (3.33)

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{a^2(\omega) + b^2(\omega)}{c^2(\omega) + d^2(\omega)}} \quad (3.36)$$

a faza (argument)

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (3.37)$$

lub

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{b(\omega)c(\omega) - a(\omega)d(\omega)}{a(\omega)c(\omega) + b(\omega)d(\omega)} \quad (3.38)$$

d) w postaci trygonometrycznej

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| [\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)] \quad (3.39)$$

Moduł transmitancji określa się także w inny sposób niż to wynika z zależności (3.35) lub (3.36), a mianowicie (patrz rys. 3.1)

$$|G(j\omega)| = \frac{Y_0}{U_0} \quad (3.40)$$

Zatem z zależności (3.36) i (3.42) wynika, że wyrażenie $G(j\omega)$ jednoznacznie określa stosunek amplitudy harmonicznego sygnału wyjściowego do amplitudy harmonicznego sygnału wejściowego, a także przesunięcie fazowe tych sygnałów w stanie ustalonym. Stosunek amplitud, wyrażony zależnością (3.40), jest nazywany **wzmocnieniem częstotliwościowym** układu. Zarówno wzmocnienie, jak i przesunięcie fazowe, są funkcjami pulsacji ω sygnału wejściowego. Dlatego wyrażenie $G(j\omega)$ jest nazywane transmitancją widmową, gdyż charakteryzuje sposób, w jaki dany obiekt reaguje na harmoniczny sygnał wejściowy, dla całej szerokości widma jego pulsacji ω .

Układy wielowymiarowe opisuje się za pomocą macierzy transmitancji widmowych, analogicznie jak w przypadku transmitancji operatorowych.

3.3.2. Transmitancja widmowa układu dyskretnego

Niech będzie dany dyskretny układ liniowy o wymuszeniu harmonicznym $u(t) = U_0 \sin \omega t$, złożony z idealnego impulsatora, ekstrapolatora i członu dynamicznego reprezentującego obiekt sterowania. Dyskretne wymuszenie w postaci zespolonej można zapisać następująco

$$u(k) = U_0 e^{j\omega k T} = U_0 e^{jk\omega_p} \quad (3.41)$$

przy czym $\omega_p = \omega T$ jest **pulsacją bezwymiarową**.

Niech $U(j\omega_p)$ oznacza wartość zespoloną wymuszenia, natomiast $Y(j\omega_p)$ – wartość zespoloną odpowiedzi układu na to wymuszenie. Dyskretną transmitancją widmową nazywa się zależność

$$G(j\omega_p) = \frac{Y(j\omega_p)}{U(j\omega_p)} \quad (3.42)$$

Transmitancja ta jest wielkością zespoloną, a więc

$$G(j\omega_p) = P(\omega_p) + jQ(\omega_p) \quad (3.43)$$

przy czym:

$$P(\omega_p) = \operatorname{Re}[G(j\omega_p)], \quad Q(\omega_p) = \operatorname{Im}[G(j\omega_p)]$$

Między dyskretną transmitancją widmową $G(j\omega_p)$ a dyskretną transmitancją $G(z)$ zachodzi zależność

$$G(j\omega_p) = G(z) \Big|_{z=e^{j\omega_p}} \quad (3.44)$$

gdyż $z = e^{sT} = e^{j\omega T} = e^{j\omega_p}$.

W odróżnieniu od transmitancji widmowej układu ciągłego, dyskretna transmitancja widmowa jest funkcją okresową pulsacji ω_p , gdyż

$$G(j\omega_p + 2n\pi) = G(j\omega_p), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.45)$$

przy czym okres tej funkcji jest równy 2π .

Macierz dyskretnych transmitancji widmowych układu wielowymiarowego jest definiowana identycznie jak macierz transmitancji widmowych wielowymiarowego układu ciągłego.

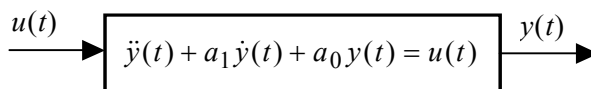
3.4. Równania stanu

3.4.1. Równania stanu układów ciągłych

Układy zarówno jedno- jak i wielowymiarowe opisuje się relacjami typu wejście-wyjście lub zakłócenie-wyjście. W związku z tym w układach tych analizuje się sygnały wejściowe i wyjściowe oraz zakłócenia, nie poświęcając więcej uwagi innym sygnałom. Takie podejście doprowadziło do określenia odpowiednich metod analizy i syntezy, które mają istotne znaczenie w teorii liniowych układów sterowania i są w wielu przypadkach z powodzeniem stosowane. Jednak teoria, która powstała na podstawie rozważań w relacji wejścia-wyjścia ma tę wadę, że nie daje bezpośredniego obrazu dynamiki danego układu jako całości. Obraz ten można otrzymać dopiero po przeprowadzeniu dodatkowych rozważań, mających na celu wyznaczenie przebiegów sygnałów występujących wewnątrz danego układu.

Można bezpośrednio zastosować opis matematyczny układu, który ujmuje nie tylko relacje typu wejście-wyjście, ale także określa tzw. *stan wewnętrzny układu*. Metody oparte na takim opisie matematycznym w teorii sterowania są **metodami zmiennych stanu**. Istotną zaletą tych metod, w porównaniu z metodami opisu dynamiki układu typu wejście-wyjście, jest to, że umożliwiają one sterowanie nie tylko wyjściem, ale także wielkościami fizycznymi, które określają stan wewnętrzny układu.

Pojęcie stanu układu zostanie zobrazowane na prostym przykładzie. Niech dynamika układu dynamicznego będzie opisana równaniem różniczkowym drugiego rzędu. Relacje między wyjściem a wejściem układu przedstawia rysunek 3.2.



Rys. 3.2. Schemat blokowy układu dynamicznego opisanego równaniem różniczkowym

Dynamikę tego układu można zapisać w postaci równań stanu. W ujęciu matematycznym polega to na zastąpieniu równania różniczkowego drugiego rzędu układem równań różniczkowych pierwszego rzędu. W tym celu zostaną przyjęte dwie pomocnicze zmienne x_1 i x_2 , zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\x_2(t) &= \dot{y}(t)\end{aligned}\tag{3.46}$$

Po różniczkowaniu stronami tych równań otrzymano:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = -a_0 y(t) - a_1 \dot{y}(t) + u(t)\end{aligned}\quad (3.47)$$

Ostatecznie, uwzględniając równania (3.46):

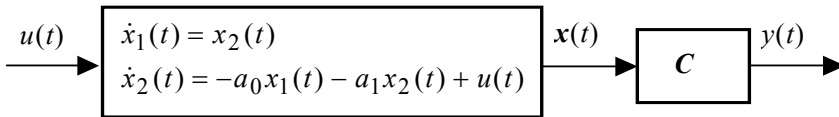
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + u(t)\end{aligned}\quad (3.48)$$

Równania (3.48) zapisano w postaci wektorowo-macierzowej:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\quad (3.49)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\quad (3.50)$$

Równanie (3.49) jest nazywane **równaniem stanu**, natomiast równanie (3.50) – **równaniem wyjścia**. Schemat blokowy układu dynamicznego, opisanego ww. równaniami jest następujący



Rys. 3.3. Schemat blokowy układu dynamicznego opisanego równaniem stanu

Porównując rysunki 3.2 i 3.3 można zauważyć, że w układzie opisanym równaniami stanu dodatkową wielkością wyjściową jest wektor $\mathbf{x}(t)$, nazywany **wektorem stanu**. Jego współrzędne noszą nazwę **zmiennych stanu**. Zbiór zmiennych stanu określa tzw. **stan układu**. Stan układu jest więc najmniej licznym zbiorem wielkości, zawierającym wystarczającą ilość informacji do jednoznacznego określenia układu. Zmienne stanu niekoniecznie muszą mieć sens fizyczny; mogą to być odpowiednio dobrane wielkości abstrakcyjne.

Niech ogólnie dla rozważanego układu modelem matematycznym będzie układ n równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Można wybrać w tym układzie n liniowo niezależnych wielkości fizycznych lub abstrakcyjnych, które oznaczono przez $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Przestrzeń o współrzędnych x_1 , x_2 , ..., x_n

jest nazywana **przestrzenią stanu**. Koniec wektora $\mathbf{x}(t)$ kreśli w przestrzeni stanu **trajektorię stanu**.

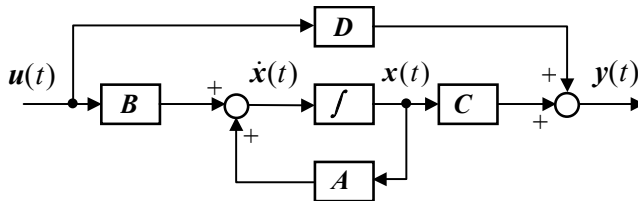
Równania stanu układu są układem n równań różniczkowych pierwszego rzędu, w ogólnym przypadku nieliniowych i niestacjonarnych. Równania stanu uzupełniają równania wyjścia, które są równaniami algebraicznymi, pokazującymi, w jaki sposób wektor zmiennych stanu $\mathbf{x}(t)$ i sterowanie $\mathbf{u}(t)$ oddziałują na wyjście $\mathbf{y}(t)$ układu. Równania te zwykle zapisuje się w postaci wektorowo-macierzowej:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad (3.51)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t); \quad (3.52)$$

gdzie: \mathbf{x} – n -wymiarowy wektor stanu, $\mathbf{u}(t)$ – r -wymiarowy wektor sterowania, $\mathbf{y}(t)$ – m -wymiarowy wektor wyjścia, \mathbf{A} – $n \times n$ -wymiarowa macierz stanu, \mathbf{B} – $n \times r$ -wymiarowa macierz sterowań (wejść), \mathbf{C} – $m \times n$ -wymiarowa macierz wyjść, \mathbf{D} – $m \times r$ -wymiarowa macierz transmisyjna (bezpośredniego oddziaływania wejścia na wyjście).

Schemat blokowy układu odpowiadającego równaniom (3.51) i (3.52) przedstawiono na rysunku 3.4. Blok ze znakiem całki reprezentuje operację całkowania pochodnej wektora stanu.



Rys. 3.4. Schemat blokowy układu opisanego równaniami stanu

W przypadku układu jednowymiarowego $r = 1$ i $m = 1$. W równaniach (3.51) i (3.52) wektory $\mathbf{u}(t)$ i $\mathbf{y}(t)$ należy zastąpić wielkościami skalarnymi $u(t)$ i $y(t)$, natomiast macierz \mathbf{B} ma wymiar $n \times 1$, a macierz \mathbf{C} – wymiar $1 \times n$.

Mając równania stanu można łatwo wyznaczyć transmitancję operatorową, a w przypadku układu wielowymiarowego – macierz transmitancji operatorowych. Niech układ dynamiczny opisany będzie równaniami (3.51) i (3.52). Równania te w postaci operatorowej, dla zerowych warunków początkowych $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, przyjmują postać:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.53)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (3.54)$$

przy czym $\mathbf{X}(s)$, $\mathbf{U}(s)$, $\mathbf{Y}(s)$ są transformatami Laplace'a odpowiednio wektorów $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ i $\mathbf{y}(t)$. Z równania (3.53) otrzymano

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.55)$$

oraz

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.56)$$

Z równania (3.56) wyznaczono $\mathbf{X}(s)$, przy założeniu, że macierz $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ jest **nieosobliwa** (czyli, że istnieje jej macierz odwrotna; jest to spełnione, jeżeli wyznacznik tej macierzy jest różny od zera)

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.57)$$

Podstawiając zależność (3.57) do (3.54) otrzymano

$$\mathbf{Y}(s) = (\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{U}(s) \quad (3.58)$$

a stąd macierz transmitancji

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.59)$$

Natomiast dla układu jednowymiarowego

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D} \quad (3.60)$$

Przy wyznaczaniu macierzy $\mathbf{G}(s)$ najbardziej pracochłonne jest obliczanie macierzy odwrotnej $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$, szczególnie wówczas, gdy korzysta się z metod analitycznych.

3.4.2. Równania stanu układów dyskretnych

Niech dane będą równania stanu układu ciągłego o postaci:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t) \quad (3.61)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c\mathbf{u}(t) \quad (3.62)$$

Rozwiązanie równania (3.61) w chwili $t = (k+1)T$, dla warunku początkowego $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(kT)$ ma postać

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{\mathbf{A}_c T}\mathbf{x}(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}_c [(k+1)T-t]} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) dt \quad (3.63)$$

Zakładając, że dyskretyzacja układu ciągłego jest dokonywana poprzez wprowadzenie do układu impulsatora i ekstrapolatora zerowego rzędu, w wyniku czego sygnał $\mathbf{u}(t)$ jest wielowymiarową funkcją schodkową, to równania (3.62) i (3.63) są określone następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (3.64)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \exp(\mathbf{A}_c T) \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}_c T + \frac{\mathbf{A}_c^2 T^2}{2} + \dots \quad (3.65)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_c^{-1} [\exp(\mathbf{A}_c T) - \mathbf{I}] \mathbf{B}_c \quad (3.66)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_c, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_c \quad (3.67)$$

Jeżeli okres próbkowania T ma małą wartość, wówczas pomija się nieliniowe człony rozwinięcia w szereg potęgowy macierzy $\exp(\mathbf{A}_c T)$, co prowadzi do zależności przybliżonych:

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}_c T \quad (3.68)$$

$$\mathbf{B} \approx \mathbf{B}_c T \quad (3.69)$$

Identyczne zależności, tj. (3.68) i (3.69), można otrzymać zastępując w równaniu (3.61) pochodną przez różnicę wyprzedzoną

$$\dot{\mathbf{x}}(t)|_{t=k} = \frac{1}{T} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)] \quad (3.70)$$

co po podstawieniu do równania (3.61) daje w wyniku

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{I} + \mathbf{A}_c T] \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_c T \mathbf{u}(k) \quad (3.71)$$

Analogicznie jak w układach ciągłych, można wyznaczyć związek między równaniami stanu (3.64) a transmitancją dyskretną. W tym celu należy do równań (3.64) zastosować dyskretne przekształcenie \mathcal{Z} , przy zerowych warunkach początkowych:

$$z \mathbf{X}(z) = \mathbf{A} \mathbf{X}(z) + \mathbf{B} \mathbf{U}(z) \quad (3.72)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C} \mathbf{X}(z) + \mathbf{D} \mathbf{U}(z) \quad (3.73)$$

przy czym $\mathbf{X}(z)$, $\mathbf{Y}(z)$ i $\mathbf{U}(z)$ są transformatami \mathcal{Z} odpowiednio $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{y}(k)$ i $\mathbf{u}(k)$.

Z równania (3.72) otrzymano

$$z \mathbf{X}(z) - \mathbf{A} \mathbf{X}(z) = \mathbf{B} \mathbf{U}(z) \quad (3.74)$$

oraz

$$[z \mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{X}(z) = \mathbf{B} \mathbf{U}(z) \quad (3.75)$$

a stąd

$$\mathbf{X}(z) = [z \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(z) \quad (3.76)$$

Podstawiając zależność (3.76) do (3.73) otrzymano

$$\mathbf{Y}(z) = (\mathbf{C} [z \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \mathbf{U}(z) \quad (3.77)$$

a stąd macierz transmitancji dyskretnych

$$\mathbf{G}(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{U}(z)} = \mathbf{C} [z \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.78)$$

lub transmitancja dyskretna

$$\boxed{\mathbf{G}(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{U}(z)} = \mathbf{C} [z \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}} \quad (3.79)$$

3.5. Charakterystyki czasowe

Właściwości statyczne i dynamiczne układu przedstawia się często za pomocą charakterystyk czasowych i częstotliwościowych. Charakterystyki te przedstawiają właściwości dynamiczne i statyczne układu w sposób graficzny lub w postaci równań matematycznych. Wyznacza się je eksperymentalnie lub na podstawie modelu matematycznego. Istnieje także możliwość rozwiązania zadania odwrotnego, tzn. znalezienia modelu matematycznego w oparciu o daną charakterystykę układu dynamicznego.

3.5.1. Charakterystyki czasowe układów ciągłych

Najbardziej rozpowszechnionymi charakterystykami czasowymi są charakterystyki (odpowiedzi) skokowe $h(t)$ i impulsowe $g(t)$.

Charakterystyką jednostkową (skokową) jednowymiarowego układu liniowego nazywa się odpowiedź tego układu na sygnał jednostkowy $1(t)$, przy zerowych warunkach początkowych. Charakterystyka skokowa dobrze charakteryzuje zarówno właściwości statyczne, jak i dynamiczne układu. Wyznaczając ją dla róż-

nych wartości amplitud sygnału wejściowego łatwo można dokonać weryfikacji liniowości układu, gdyż w przypadku układów liniowych **charakter procesu przejściowego odpowiedzi skokowej jest niezależny od amplitudy sygnału wejściowego**. Sygnały skokowe często występują w układach elektrycznych, mechanicznych, hydraulicznych itd. Wnioski sformułowane na podstawie analizy odpowiedzi skokowych mają charakter ogólny.

Charakterystyką (odpowiedzią) impulsową nazywa się odpowiedź układu na sygnał wejściowy w postaci impulsu Diraca, przy zerowych warunkach początkowych. Impuls Diraca $\delta(t)$ jest sygnałem, który spełnia warunki:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{przy } t \neq 0 \\ +\infty & \text{przy } t = 0 \end{cases} \quad (3.80)$$

oraz

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (3.81)$$

dla każdego $\varepsilon > 0$.

Transformata Laplace'a odpowiedzi impulsowej układu dynamicznego jest równa jego transmitancji operatorowej

$$\mathcal{L}[g(t)] = G(s) \quad (3.82)$$

co oznacza, że odpowiedź impulsową $g(t)$ znajduje się po dokonaniu transformacji odwrotnej transmitancji $G(s)$.

Fizyczne znaczenie odpowiedzi impulsowej jest duże, mimo że przedstawia ona reakcję obiektu na impuls Diraca, którego w rzeczywistości nie można wytworzyć, to jednak z dość dobrym przybliżeniem charakteryzuje zachowanie się tego obiektu po przyłożeniu do jego wejścia krótkotrwałego i o dużej amplitudzie sygnału rzeczywistego. Na przykład przebiegi zbliżone do odpowiedzi impulsowej występują w obwodzie elektrycznym przy przepięciach albo w układach mechanicznych, po gwałtownej chwilowej zmianie siły zewnętrznej lub zewnętrznego momentu obrotowego.

Transformata odpowiedzi skokowej $H(s)$ określona jest związkiem

$$H(s) = G(s) \frac{1}{s} \quad (3.83)$$

Na podstawie tej zależności można sformułować związek

$$G(s) = sH(s) \quad (3.84)$$

Odpowiedź impulsowa jest więc pochodną względem czasu odpowiedzi jednostkowej

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (3.85)$$

a z kolei odpowiedź jednostkowa jest całką odpowiedzi impulsowej

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (3.86)$$

Wzory (3.85) i (3.86) umożliwiają wyznaczenie jednej z tych odpowiedzi, gdy znana jest druga.

Mając daną charakterystykę impulsową $g(t)$, można wyznaczyć odpowiedź układu liniowego na dowolne wymuszenie $u(t)$ korzystając ze wzoru (tzw. zależności splotowej)

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau) d\tau \quad (3.87)$$

lub

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau) d\tau \quad (3.88)$$

Analogicznie odpowiedź układu $y(t)$ na dowolne wymuszenie $u(t)$ można określić w oparciu o charakterystykę skokową (jednostkową) $h(t)$

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau \quad (3.89)$$

lub

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t h(\tau)u(t-\tau) d\tau \quad (3.90)$$

Powyższe zależności wynikają z twierdzenia o transformacie splotu dwóch funkcji.

3.5.2. Charakterystyki czasowe układów dyskretnych

Dyskretnymi charakterystykami (odpowiedziami) czasowymi są nazywane odpowiedzi w stanie nieustalonym dyskretnych układów liniowych na odpowiednie wymuszenia, przy zerowych warunkach początkowych. Podstawowymi dyskretnymi charakterystykami czasowymi są: dyskretna charakterystyka impulsowa i dyskretna charakterystyka skokowa.

Dyskretną charakterystyką (odpowiedzią) impulsową $g(k)$ (przypomina się, że $g(k) = g(kT)$) dyskretnego układu liniowego nazywa się dyskretną odpowiedź tego układu na wymuszenie w postaci funkcji Diraca $\delta(k)$ przy zerowych warunkach początkowych. Między charakterystyką impulsową $g(k)$, a ciągłą charakterystyką impulsową $g(t)$ zachodzi zależność

$$g(k) = g(t)|_{t=kT} \quad (3.91)$$

Na przykład dla członu inercyjnego pierwszego rzędu o transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{K}{sT_1 + 1} \quad (3.92)$$

i charakterystyce impulsowej

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{K}{T_1} e^{-t/T_1} \quad (3.93)$$

dyskretna charakterystyka impulsowa ma postać

$$g(k) = g(t)|_{t=kT} = \frac{K}{T_1} e^{-kT/T_1} \quad (3.94)$$

Dyskretna charakterystyka impulsowa jest oryginałem transmitancji dyskretnego układu

$$\boxed{g(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]} \quad (3.95)$$

Związek między charakterystyką impulsową $g(k)$, wejściem $u(k)$, a wyjściem układu $y(k)$ jest określony zależnością splotową

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} g(k-i)u(i) \quad (3.96)$$

Dyskretną charakterystyką (odpowiedzią) skokową $h(k)$ dyskretnego układu liniowego nazywa się dyskretną odpowiedź tego układu na wymuszenie w postaci jednostkowej funkcji skokowej przy zerowych warunkach początkowych. Również i w tym przypadku jest słuszna zależność

$$h(k) = h(t)|_{t=kT} \quad (3.97)$$

Na przykład dla analizowanego już członu inercyjnego pierwszego rzędu

$$h(t) = K(1 - e^{-t/T_1}) \quad (3.98)$$

natomiast

$$h(k) = h(t)|_{t=kT} = K(1 - e^{-kT/T_1}) \quad (3.99)$$

3.6. Charakterystyki częstotliwościowe

3.6.1. Charakterystyki częstotliwościowe układów ciągłych

Pełną informację o właściwościach układu w dziedzinie częstotliwości zawierają charakterystyki częstotliwościowe. Charakterystyki częstotliwościowe zajmowały do lat osiemdziesiątych XX wieku ważne miejsce w teorii sterowania. Obecnie w związku z powszechnym zastosowaniem techniki komputerowej i metod numerycznych, dominujące znaczenie mają metody analizy i projektowania w dziedzinie czasu. Charakterystyki częstotliwościowe stosuje się w zasadzie tylko dla układów liniowych, choć mogą być również z powodzeniem stosowane dla pewnych klas układów nieliniowych.

Jeżeli na wejście dowolnego układu liniowego wprowadzone zostanie wymuszenie harmoniczne $u(t)$ o pulsacji ω (pulsacja ma sens częstotliwości kątowej i jest mierzona w radianach na sekundę; $\omega = 2\pi f$, częstotliwość $f = 1/T$, T – okres oscylacji) i amplitudzie U_0 opisane zależnością

$$u(t) = U_0 \sin \omega t = U_0 \sin 2\pi f t \quad (3.100)$$

to wymuszenie harmoniczne w postaci drgań sinusoidalnych przeniesionych przez liniowy układ dynamiczny nie zmieni swojej pulsacji ω , natomiast ulegnie zmianie amplituda i faza, wobec czego na wyjściu układu w stanie ustalonym pojawi się sygnał $y(t)$ opisany następującą zależnością

$$y(t) = AU_0 \sin(\omega t + \varphi) = Y_0 \sin(\omega t + \varphi) = Y_0 \sin(2\pi f t + \varphi) \quad (3.101)$$

gdzie: A – wzmacnienie obiektu dynamicznego, Y_0 – amplituda sygnału wyjściowego $y(t)$, φ – przesunięcie fazowe.

Wzmacnienie A jest funkcją pulsacji ω i jest określone następująco

$$A(\omega) = \frac{Y_0(\omega)}{U_0(\omega)} \quad (3.102)$$

Jeśli przyjąć $U_0(\omega) = \text{const}$, wówczas przy zmianie pulsacji ω będzie następowała zmiana współczynnika $A(\omega)$, zgodnie ze wzorem

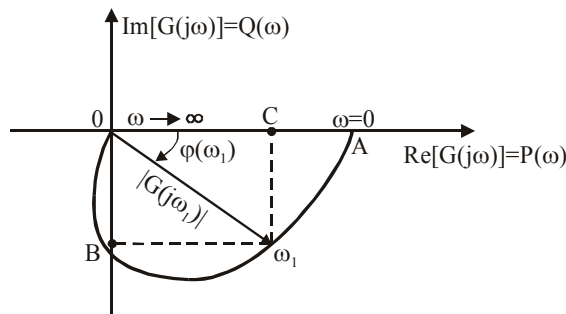
$$A(\omega) = \frac{Y_0(\omega)}{U_0} = |G(j\omega)| \quad (3.103)$$

Ogólnie można powiedzieć, że $A(\omega)$ określa zależność stosunku amplitudy sygnału wyjściowego $y(t)$ do amplitudy sygnału wejściowego $u(t)$ w funkcji pulsacji ω .

Wzmacnienie $A(\omega)$ oraz przesunięcie fazowe $\varphi(\omega)$ można wyznaczyć z transmittancji widmowej $G(j\omega)$ układu (patrz p. 3.3) i przedstawić w różnych układach współrzędnych, otrzymując w ten sposób charakterystyki częstotliwościowe. Różnią się następujące rodzaje charakterystyk:

- amplitudowo-fazową,
- amplitudową i fazową,
- logarytmiczną amplitudową i fazową,
- logarytmiczną amplitudowo-fazową.

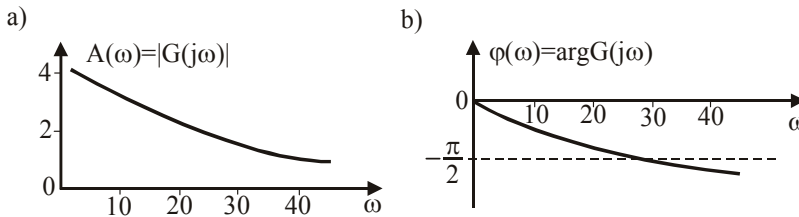
Charakterystyka amplitudowo-fazowa przedstawia wykres krzywej, którą przy zmianie pulsacji ω kreśli na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wektor $G(j\omega)$ poprowadzony z początku układu współrzędnych.



Rys. 3.5. Charakterystyka amplitudowo-fazowa

Na pokazanej przykładowo na rysunku 3.5 charakterystyce amplitudowo-fazowej koniec tego wektora przesuwają się od punktu A na osi rzeczywistej (przy $\omega = 0$) do punktu 0 (przy $\omega = +\infty$). Długość wektora $G(j\omega)$, odwzorowana w skali przyjętego układu współrzędnych, jest wartością współczynnika wzmocnienia $A(\omega)$ układu dla danej pulsacji ω_1 . Wektor ten jest nachylony względem dodatniego kierunku osi rzeczywistej $P(\omega)$ pod kątem $\varphi(\omega_1)$. Jako dodatni kierunek kąta $\varphi(\omega)$ przyjmuje się kierunek przeciwny względem kierunku ruchu wskazówek zegara.

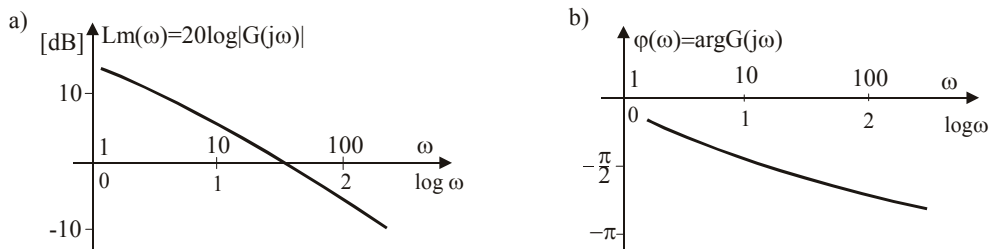
Charakterystyka amplitudowa przedstawia zależności modułu transmitancji $A(\omega)$ od pulsacji ω (rys. 3.6a).



Rys. 3.6. Charakterystyki: a) amplitudowa, b) fazowa

Charakterystyka fazowa (rys. 3.6b) przedstawia wykres zależności argumentu $\varphi(\omega)$ transmitancji $G(j\omega)$ od pulsacji ω .

Charakterystyka logarytmiczna amplitudowa $L_m(\omega)$ przedstawia wykres zależności między logarytmem dziesiętnym modułu transmitancji $A(\omega)$ i logarytmem dziesiętnym pulsacji ω (rys. 3.7a).



Rys. 3.7. Charakterystyki logarytmiczne: a) amplitudowa, b) fazowa

Charakterystyka logarytmiczna fazowa przedstawia wykres (rys. 3.7b) zależności argumentu $\varphi(\omega)$, wyrażonego w skali liniowej w stopniach lub radianach,

od logarytmu dziesiętnej pulsacji ω . Charakterystykę fazową zwykle rysuje się pod logarytmiczną charakterystyką amplitudową, przy zachowaniu tej samej skali logarytmicznej pulsacji ω .

Logarytm modułu $A(\omega)$ podaje się w skali liniowej w **decybelach** (dB), a przedziały pulsacji w **dekadach**. Wartość $Lm(\omega)$ w decybelach określa się z zależności

$$Lm(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| \quad [\text{dB}] \quad (3.104)$$

Mnożnik 20 jest umowny; został wprowadzony, aby operować najczęściej wartościami $Lm(\omega)$ rzędu od kilku do kilkudziesięciu dB, wygodnymi do obliczeń pamięciowych. Jeżeli $Lm(\omega)$ jest równe jednemu dB, to $20 \lg A(\omega) = 1$, co odpowiada stosunkowi amplitud sygnałów na wyjściu i wejściu

$$\frac{Y_0}{U_0} = \sqrt[20]{10} \approx 1,122 \quad (3.105)$$

Pulsacja zmienia się o dekadę, jeżeli $\omega_2 = 10\omega_1$. Należy zwrócić uwagę na to, że pulsacji równej zero odpowiada na osi odciętych w skali logarytmicznej punkt nieskończenie odległy w kierunku wartości malejących. Dlatego nie można umieścić na tej osi pulsacji $\omega = 0$ i w związku z tym oś rzędnych prowadzić przez punkt odpowiadający wybranej małej wartości ω .

W przypadku złożonej postaci transmitancji, powstałej w wyniku szeregowego połączenia członów dynamicznych

$$G(j\omega) = \frac{A_1(j\omega)A_2(j\omega)}{B_1(j\omega)B_2(j\omega)} \quad (3.106)$$

wzmocnienie w decybelach i przesunięcie fazowe oblicza się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} Lm G(j\omega) &= Lm A_1(j\omega) + Lm A_2(j\omega) - Lm B_1(j\omega) - Lm B_2(j\omega) = \\ &= 20 \log |A_1(j\omega)| + 20 \log |A_2(j\omega)| - 20 \log |B_1(j\omega)| - 20 \log |B_2(j\omega)| \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg G(j\omega) = \arg A_1(j\omega) + \arg A_2(j\omega) - \arg B_1(j\omega) - \arg B_2(j\omega) = \\ &= \arctg \frac{\text{Im } A_1(j\omega)}{\text{Re } A_1(j\omega)} + \arctg \frac{\text{Im } A_2(j\omega)}{\text{Re } A_2(j\omega)} - \arctg \frac{\text{Im } B_1(j\omega)}{\text{Re } B_1(j\omega)} - \arctg \frac{\text{Im } B_2(j\omega)}{\text{Re } B_2(j\omega)} \end{aligned} \quad (3.108)$$

W przypadku mniej złożonych transmitancji wartość $\text{Lm}G(j\omega)$ i $\varphi(\omega)$ można wyznaczyć z zależności

$$\text{Lm}G(j\omega) = 20 \log \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad (3.109)$$

oraz

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (3.110)$$

przy czym

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (3.111)$$

3.6.2. Charakterystyki częstotliwościowe układów dyskretnych

Dyskretnymi charakterystykami częstotliwościowymi są nazywane różne postacie wykresów (zależności) dyskretnej transmitancji widmowej $G(j\omega_p)$ jako funkcje pulsacji bezwymiarowej ω_p . Do najczęściej spotykanych charakterystyk częstotliwościowych należą:

- dyskretna charakterystyka amplitudowo-fazowa,
- dyskretna charakterystyka amplitudowa i dyskretna charakterystyka fazowa,
- dyskretna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa i dyskretna logarytmiczna charakterystyka fazowa.

Niech będzie dana transmitancja dyskretna układu otwartego $G_o(z)$. Stosując podstawienie

$$z = e^{sT} = e^{j\omega T} = e^{j\omega_p} \quad (3.112)$$

otrzymano

$$G_o(z) \Big|_{z=e^{j\omega_p}} = G_o(e^{j\omega_p}) \quad (3.113)$$

Uwzględniając, że

$$e^{j\omega_p} = \cos \omega_p + j \sin \omega_p \quad (3.114)$$

zależność (3.113) przyjmuje postać

$$G_o(e^{j\omega_p}) = G_o(\cos \omega_p, j \sin \omega_p) = P(\omega_p) + jQ(\omega_p) \quad (3.115)$$

skąd:

$$A(\omega_p) = \left| G_o(e^{j\omega_p}) \right| = \sqrt{P^2(\omega_p) + Q^2(\omega_p)} \quad (3.116)$$

$$\varphi(\omega_p) = \arg G_o(e^{j\omega_p}) = \arctg \frac{Q(\omega_p)}{P(\omega_p)} \quad (3.117)$$

Wykres zależności $A(\omega_p)$ stanowi dyskretną charakterystykę amplitudową, natomiast wykres zależności $\varphi(\omega_p)$ – dyskretną charakterystykę fazową układu dynamicznego. Z wyrażeń (3.116) i (3.117) wynika, że charakterystyki układu dyskretnego są funkcjami okresowymi, o okresie 2π . Ze względu na okresowość, charakterystyki te są wykreślane tylko dla ω_p zmieniającego się od 0 do π .

Przykład 3.2

Wykreślić dyskretną charakterystykę amplitudowo-fazową układu złożonego z idealnego impulsatora, ekstrapolatora i członu całkującego.

Rozwiązanie

Transmitancja operatorowa układu ma postać

$$G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{K}{s} = K \left(1 - e^{-sT} \right) \frac{1}{s^2} \quad (3.118)$$

Korzystając z tablic transformat otrzymano

$$G(z) = K \left(1 - z^{-1} \right) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2} \right] = K \left(1 - z^{-1} \right) \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{KT}{z-1} \quad (3.119)$$

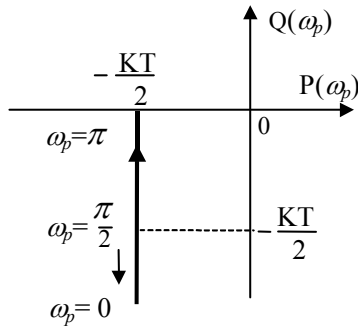
Dyskretna transmitancja widmowa wyraża się zatem następująco

$$\begin{aligned} G(j\omega_p) &= G(z) \Big|_{z=e^{j\omega_p}} = \frac{KT}{e^{j\omega_p} - 1} = KT \frac{\cos \omega_p - 1 - j \sin \omega_p}{2(1 - \cos \omega_p)} = \\ &= P(\omega_p) + jQ(\omega_p) \end{aligned} \quad (3.120)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} P(\omega_p) &= -\frac{KT}{2} \\ Q(\omega_p) &= -\frac{KT}{2} \frac{\sin \omega_p}{1 - \cos \omega_p} \end{aligned}$$

Dyskretna charakterystyka amplitudowo-fazowa członu całkującego ma postać półprostej równoległej do osi $Q(\omega_p)$, położonej w trzeciej ćwiartce (rys. 3.8). W przypadku, gdy $T \rightarrow 0$ (układ dyskretny przechodzi w układ ciągły), dyskretna charakterystyka amplitudowo-fazowa przyjmuje postać zbliżoną do charakterystyki amplitudowo-fazowej ciągłego członu całkującego.



Rys. 3.8. Dyskretna charakterystyka amplitudowo-fazowa członu całkującego

Konstruowanie dyskretnej charakterystyki amplitudowo-fazowej dla układów wysokiego rzędu bez wspomaganie komputerowego jest uciążliwe. Można wówczas wyznaczyć charakterystyki logarymiczne, których konstrukcja polega na zasadzie składania odpowiednich charakterystyk asymptotycznych. Takie postępowanie jest stosowane do pobieżnego oszacowania kształtu charakterystyk częstotliwościowych. W przypadku konieczności dokładnego ich wyznaczania należy skorzystać z metod komputerowych.

Do wyznaczania charakterystyk logarymicznych jest wykorzystywane przekształcenie **biliniowe** o postaci [12]

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{lub} \quad w = \frac{z+1}{z-1}, \quad \text{gdzie } w = ju \quad (3.121)$$

Z pierwszej zależności równania (3.121) otrzymano związek

$$z = \frac{1+ju}{1-ju} \quad (3.122)$$

który podstawiając do dyskretnej transmitancji układu $G(z)$ uzyskano funkcję wymierną zmiennej ju

$$G_1(ju) = G(z) \Big|_{z=\frac{1+ju}{1-ju}} \quad (3.123)$$

Z zależności (3.122) wynika, że

$$ju = \frac{z-1}{z+1} \quad (3.124)$$

a po podstawieniu $z = e^{j\omega T}$

$$ju = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \quad (3.125)$$

Zmienną

$$u = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \quad (3.126)$$

można zatem interpretować jako zmodyfikowaną pulsację. Z zależności (3.126) wynika, że zmianom pulsacji ω w przedziale $(0, \pi/T)$ odpowiadają zmiany zmodyfikowanej pulsacji u w przedziale $(0, \infty)$.

Charakterystyki częstotliwościowe układu dyskretnego mogą być zatem wykreślane w zależności od u w taki sam sposób, jak dla układów ciągłych. Są one jednak bardziej złożone niż odpowiednie charakterystyki układów ciągłych.

Przykład 3.3

Korzystając z przekształcenia (3.122), wykreślić charakterystyki częstotliwościowe układu dyskretnego z przykładu 3.2.

Rozwiązanie

Transmitancja dyskretna układu złożonego z idealnego impulsatora, ekstrapolatora i członu całkującego ma postać

$$G(z) = \frac{KT}{z-1} \quad (3.127)$$

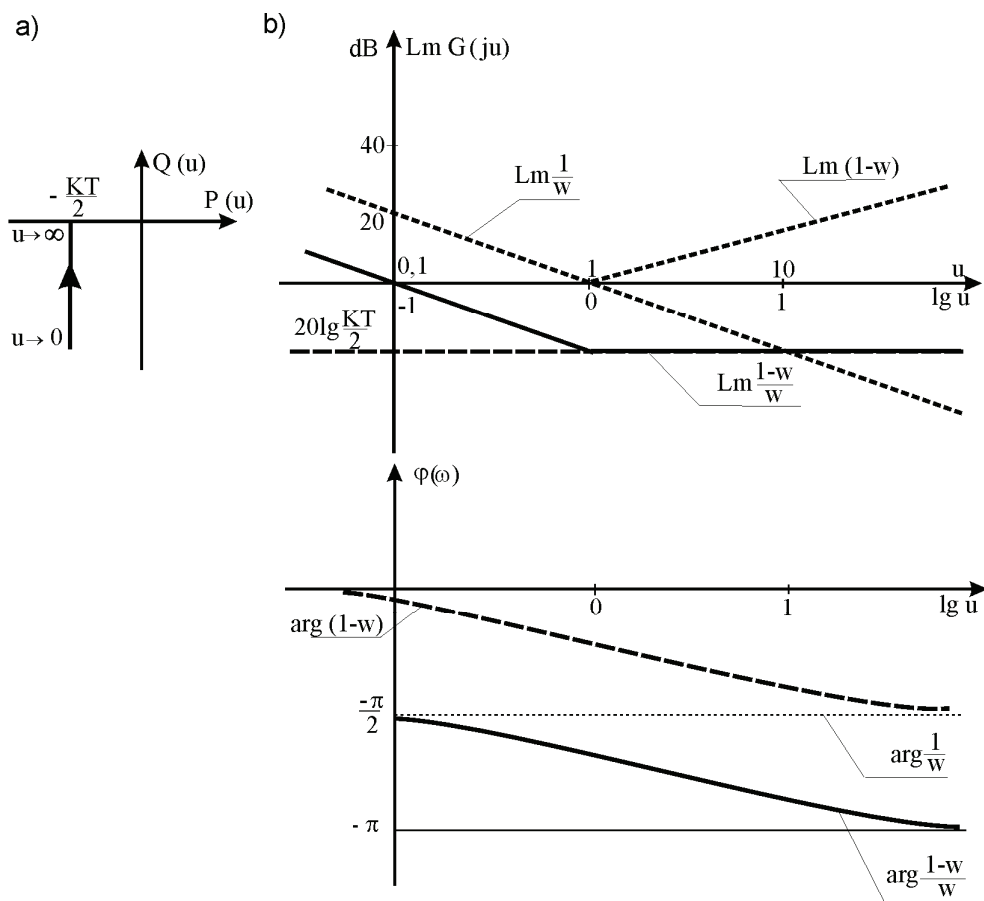
Uwzględniając przekształcenie (3.122), otrzymano

$$G_1(ju) = G(z) \Big|_{z=\frac{1+ju}{1-ju}} = -\frac{KT}{2} - j\frac{KT}{2u} = P(u) + jQ(u) \quad (3.128)$$

gdzie:

$$P(u) = -\frac{KT}{2}, \quad Q(u) = -j\frac{KT}{2u} \quad (3.129)$$

Charakterystykę amplitudowo-fazową zamieszczono na rysunku 3.9a.



Rys. 3.9. Charakterystyki częstotliwościowe układu dyskretnego: a) amplitudowo-fazowa, b) logarytmiczna, asymptotyczna amplitudowa i fazowa

Dyskretną, logarytmiczną charakterystykę amplitudową i fazową otrzymano podstawiając

$$G_1(w) = G(z) \Big|_{z = \frac{1+w}{1-w}} = \frac{KT}{2} \frac{1-w}{w} \quad (3.130)$$

a następnie wykreślając, dla transmitancji $G_1(w)$, logarytmiczne charakterystyki asymptotyczne (rys. 3.9b). Charakterystyki te wykreśla się w ten sam sposób, jak charakterystyki transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{KT}{2} \frac{1-s}{s} \quad (3.131)$$

3.6.3. Eksperymentalne wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych

Wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych polega na zarejestrowaniu w stanie ustalonym przebiegu wyjściowego obiektu, gdy na wejście jest doprowadzony harmoniczny sygnał pobudzający o stałej amplitudzie i częstotliwości. Dokonanie tego rodzaju pomiarów dla różnych częstotliwości sygnału wejściowego pozwala znaleźć kolejne punkty charakterystyki częstotliwościowej, a otrzymana charakterystyka w pełni charakteryzuje własności obiektu.

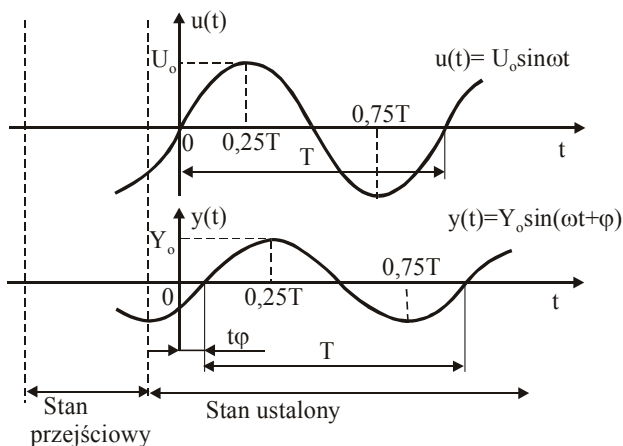
Do dokonania pomiarów, w celu wyznaczenia charakterystyk częstotliwościowych, jest niezbędne zastosowanie generatora przebiegów sinusoidalnych. Potrzebny w praktyce zakres pomiarowy waha się w granicach od około 0,01 do kilkudziesięciu herców. Na wejście badanego układu jest podawane wymuszenie harmoniczne o postaci

$$u(t) = U_0 \sin \omega t \quad (3.132)$$

Jeżeli badany obiekt jest liniowy i nie działają na niego żadne dodatkowe sygnały sterujące i zakłócenia, wówczas na wyjście układu w stanie ustalonym pojawia się sygnał wyjściowy $y(t)$, opisany zależnością

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.133)$$

Zarejestrowane przebiegi czasowe harmonicznej funkcji wymuszającej $u(t)$ i wyjściowej $y(t)$ dla obiektu liniowego, przy ustalonej pulsacji ω , są pokazane na rysunku 3.10.



Rys. 3.10. Odpowiedź obiektu na wymuszenie harmoniczne

Z zarejestrowanych przebiegów czasowych można określić następujące parametry:

$$f = \frac{1}{T} \text{ [Hz]}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \text{ [rad/s]}, \quad |G(j\omega)|_{\omega=\text{const}} = \frac{Y_0}{U_0} \quad (3.134)$$

$$\text{Lm}G(j\omega) = 20 \log |G(j\omega)| \text{ [dB]}, \quad \varphi = t_\varphi \frac{2\pi}{T} = t_\varphi \omega \text{ [rad]}, \quad \varphi = t_\varphi \frac{360}{T} \text{ [}^\circ\text{]} \quad (3.135)$$

3.6.4. Związek między charakterystykami czasowymi a częstotliwościowymi

Charakterystyki czasowe wyznacza się w oparciu o znajomość modelu matematycznego w formie równania różniczkowego lub transmitancji albo ewentualnie w oparciu o badania eksperymentalne. Niekiedy drogą badań eksperymentalnych wyznacza się tylko charakterystyki częstotliwościowe i wówczas powstaje pytanie, czy dysponując charakterystyką częstotliwościową można – na jej podstawie – wyznaczyć charakterystyki czasowe.

Jeżeli transmitancja widmowa $G(j\omega)$ układu liniowego ma postać (3.111) – przy czym jej bieguny mają ujemne części rzeczywiste, a żaden z pierwiastków wielomianu w jej liczniku nie jest równy zeru – to można wykazać [11], że odpowiedź skokowa tego układu dla $t > 0$ wyraża się następująco:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega \quad (3.136)$$

lub

$$h(t) = P(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega \quad (3.137)$$

Podobnie można wyznaczyć charakterystykę impulsową dla $t > 0$

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty P(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty Q(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (3.138)$$

Istnieje również możliwość wyznaczenia charakterystyk częstotliwościowych na podstawie charakterystyk czasowych. Jeżeli dana jest odpowiedź impulsowa $g(t)$, to część rzeczywistą $P(\omega)$ i część urojoną $Q(\omega)$ wyznacza się ze wzorów:

$$P(\omega) = \int_0^{\infty} g(t) \cos \omega t dt \quad (3.139)$$

$$Q(\omega) = - \int_0^{\infty} g(t) \sin \omega t dt \quad (3.140)$$

Charakterystyka skokowa może również posłużyć do wyznaczenia charakterystyk częstotliwościowych, np. charakterystyki amplitudowo-fazowej (dla $h(0) = 0$):

$$P(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{dh(t)}{dt} \cos \omega t dt \quad (3.141)$$

$$Q(\omega) = - \int_0^{\infty} \frac{dh(t)}{dt} \sin \omega t dt \quad (3.142)$$

Dowód zależności (3.139) – (3.142) znajduje się w pracy [12].

Przedstawione sposoby otrzymywania charakterystyk częstotliwościowych na podstawie charakterystyk czasowych są na ogół mało przydatne dla celów praktycznych. Wynika to z małej dokładności otrzymywania charakterystyk czasowych, np. wskutek działania zakłóceń.

4. METODY ANALIZY UKŁADÓW LINIOWYCH

Każde urządzenie techniczne zastosowane w procesie technologicznym musi spełniać pewne wymagania z punktu widzenia właściwości statycznych i dynamicznych, które z kolei zapewniają poprawną jakość produkowanych wyrobów. Na przykład układ napędowy posuwu noża tokarskiego obrabiarki-kopiarki musi cechować się: dużą prędkością działania, dużym tłumieniem oscylacji oraz możliwie minimalnym błędem, co gwarantuje dobre śledzenie noża za wzornikiem. Aby osiągnąć wymienione parametry układu napędowego, należy zbudować odpowiedni układ regulacji. W tym celu niezbędna jest pełna znajomość dynamiki układu napędowego, którą można otrzymać drogą analizy eksperymentalnej lub analizy określonego uprzednio modelu matematycznego.

Analiza eksperymentalna jest na ogół kłopotliwa, kosztowna i nie zawsze możliwa do przeprowadzenia. Badanie praktyczne skutków działania sygnałów sterujących i zakłóceń na układ łatwiej jest przeprowadzić analizując jego model matematyczny, przy czym należy liczyć się z błędami, wynikającymi z niedokładności modelowania matematycznego. Obecnie szybko rozwijająca się technika komputerowa umożliwia stosowanie różnorodnych metod analizy oraz złożonych modeli matematycznych układów dynamicznych.

Oprócz analizy obiektu dokonuje się także analizy dynamiki całego układu sterowania. Wynika to z ogólnej metodyki projektowania układu sterowania, którą można sprowadzić do następujących etapów:

- synteza (budowa) modelu matematycznego obiektu,
- analiza modelu matematycznego obiektu,
- synteza układu sterowania,
- analiza układu sterowania.

Analiza układu sterowania jest niezbędna w celu wstępnego potwierdzenia poprawności jego zaprojektowania; ostateczne potwierdzenie następuje podczas eksploatacji.

Analiza układu dynamicznego (lub modelu matematycznego) polega na pobudzeniu go sygnałem zdeterminowanym lub losowym i badaniu zmian wartości wielkości wyjściowych. Aby można było porównać ze sobą zachowanie różnych układów, a także wprowadzić i stosować ujednoczone kryteria oceny właściwości dynamicznych i statycznych, są stosowane standardowe sygnały wejściowe. Anali-

za zjawisk zachodzących w procesie przejściowym i w stanie ustalonym jest przeprowadzona na podstawie odpowiedzi układu na te typowe wymuszenia. Najczęściej stosuje się następujące sygnały wejściowe:

1. Skok jednostkowy $1(t)$. Przy stosowaniu tego typu sygnału założono, że czas jego narastania jest równy zeru, co jest tylko przybliżeniem sygnału rzeczywistego, jednak w wielu przypadkach jest to założenie dopuszczalne. Niekiedy stosuje się sygnał skokowy o amplitudzie U_0 , który zapisuje się w postaci $u(t) = U_0 \cdot 1(t)$. Funkcja skokowa przedstawia nagle przyłożenie siły, napięcia, ciśnienia itd. Zamiast skoku jednostkowego stosuje się także skok przesunięty w czasie lub impuls prostokątny.

2. Impuls (funkcja) Diraca $\delta(t)$. Impuls Diraca jest definiowany jako impuls o nieskończenie wielkiej amplitudzie i nieskończenie małym czasie trwania oraz o polu równym jedności. Analitycznie można to zapisać następująco

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (4.1)$$

Funkcja impulsowa przedstawia: impuls elektryczny, uderzenie mechaniczne lub hydrauliczne itp. Tego rodzaju sygnał, jakkolwiek zdefiniowany w sposób zupełnie abstrakcyjny, znajduje zastosowanie w badaniu dynamiki układów.

3. Funkcje potęgowe. Funkcje te ogólnie można przedstawić w postaci

$$u(t) = U_0 t^n \cdot 1(t) \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Jeśli $n = 1$, to $u(t)$ jest funkcją liniowo-narastającą, jeśli $n = 2$ – funkcją paraboliczną itd. Wymienione funkcje wykorzystuje się głównie do analizy układów śledzących.

4. Funkcja harmoniczna. Najczęściej stosuje się sygnał sinusoidalny o postaci

$$u(t) = U_0 \sin \omega t \quad (4.3)$$

Na tego typu sygnałach bazują głównie częstotliwościowe metody analizy.

W dalszej części rozdziału zostaną przedstawione metody analizy modelu matematycznego układu dynamicznego, w kolejności według stosowanego modelu matematycznego. Będą to więc metody: **klasyczne**, **operatorowe**, **częstotliwościowe** i **przestrzeni stanów**. Stosując inne kryterium podziału, metody analizy mogą być w dziedzinie: czasu (klasyczne i przestrzeni stanów), zmiennej zespolonej (operatorowe) i częstotliwości (częstotliwościowe).

4.1. Metody klasyczne

Klasyczne metody analizy bazują na teorii rozwiązywania równań różniczkowych i są zaliczane do metod **analizy układów w dziedzinie czasowej**. Metody omawiane poniżej mogą być stosowane wyłącznie w przypadku liniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Mają one jednak tę zaletę, że w wyniku ich zastosowania uzyskuje się rozwiązanie w ogólnej analitycznej postaci, słuszne dla wszystkich dopuszczalnych wartości parametrów i warunków początkowych.

Rozwiązanie różniczkowego, niejednorodnego równania liniowego, składa się z dwóch części:

- **rozwiązania szczególnego** równania niejednorodnego, które opisuje zachowanie się układu w stanie ustalonym; rozwiązanie to często jest nazywane składową wymuszoną i charakteryzuje właściwości modelu matematycznego w odniesieniu do danego wymuszenia,
- **rozwiązania ogólnego** równania jednorodnego, opisującego stan nieustalony układu; rozwiązanie to jest nazywane także **składową swobodną**.

Rozwiązanie równania różniczkowego jest sumą rozwiązania szczególnego i ogólnego. Jest to jedna z podstawowych własności liniowych równań różniczkowych zwyczajnych.

4.1.1. Rozwiązanie szczególne równania różniczkowego

Rozwiązaniem szczególnym jest funkcja spełniająca wyjściowe równania różniczkowe z zadaną funkcją wymuszającą i otrzymuje się go z rozwiązania niejednorodnego równania różniczkowego. Jeżeli rozwiązanie to jest dane w postaci funkcji uwikłanej, to nazywa się je **całką szczególną** tego równania. W przypadku analizy stacjonarnych układów liniowych zachodzi konieczność rozwiązania równań różniczkowych o stałych współczynnikach, przy czym prawe strony tych równań są określone przez funkcje standardowe typu: impuls Diraca, funkcje potęgowe lub harmoniczne. Wówczas możliwe jest dla równania niejednorodnego znalezienie rozwiązania szczególnego za pomocą **metody uzmienniania stałych** lub **metody współczynników nieoznaczonych**, wychodząc ze znanej z góry postaci jego rozwiązania.

Niejednorodne równanie różniczkowe rzędu n , o stałych współczynnikach, ma postać

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = u(t) \quad (4.4)$$

Rozwiązanie szczególne, w zależności od postaci funkcji wymuszającej $u(t)$, przewiduje się w następujący sposób:

1. Jeżeli $u(t) = P(t)$, gdzie $P(t)$ jest wielomianem względem czasu t , który w szczególności może być liczbą stałą, różną od zera (zero nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego), to rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (4.4) można znaleźć w postaci wielomianu

$$y_u = Q(t) \quad (4.5)$$

przy czym stopień wielomianu $Q(t)$ jest taki sam jak wielomianu $P(t)$, lecz z nieoznaczonymi współczynnikami. Gdy natomiast zero jest pierwiastkiem równania charakterystycznego o krotności k , to

$$y_u = t^k Q(t) \quad (4.6)$$

2. Gdy $u(t) = P(t)e^{at}$, przy czym a nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, to

$$y_u = Q(t)e^{at} \quad (4.7)$$

Jeżeli a jest pierwiastkiem równania charakterystycznego o krotności k , to

$$y_u = t^k Q(t)e^{at} \quad (4.8)$$

3. Jeżeli $u(t) = e^{at} [P_1(t) \cos \omega t + P_2(t) \sin \omega t]$, gdzie $P_1(t)$ i $P_2(t)$ są wielomianami względem t . Wielomiany te mogą być w szczególności liczbami stałymi, a jeden z nich może być tożsamościowo równy zeru. Niech m będzie najwyższą potęgą wielomianów $P_1(t)$ i $P_2(t)$, to

$$y_u = e^{at} [Q_1(t) \cos \omega t + Q_2(t) \sin \omega t] \quad (4.9)$$

gdzie $Q_1(t)$ i $Q_2(t)$ są wielomianami stopnia m o nieoznaczonych współczynnikach.

4. Niech $u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_i(t)$, gdzie $u_1(t), u_2(t), \dots, u_i(t)$ są funkcjami składowymi wymuszenia, a y_1, y_2, \dots, y_i są rozwiązaniami szczególnymi odpowiadającymi funkcjom $u_1(t), u_2(t), \dots, u_i(t)$. Wówczas

$$y_u = y_1 + y_2 + \dots + y_i \quad (4.10)$$

jest rozwiązaniem szczególnym równania (4.4).

4.1.2. Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego

Rozwiązaniem ogólnym nazywa się funkcje spełniające wyjściowe równanie różniczkowe (4.4) przy założeniu, że funkcja wymuszająca $u(t) \equiv 0$. Równanie takie nazywa się jednorodnym równaniem różniczkowym zwyczajnym, któremu odpowiada równanie charakterystyczne

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (4.11)$$

Postać równania ogólnego jest zależna od rodzaju pierwiastków równania charakterystycznego (4.11). Rozróżnia się tu trzy przypadki:

1. Wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego są równe i rzeczywiste. Rozwiązanie ogólne przyjmuje wówczas postać

$$y_n = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \quad (4.12)$$

gdzie: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – pierwiastki równania charakterystycznego, C_1, C_2, \dots, C_n – stałe wyznaczone z warunków początkowych.

2. Wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego są różne, ale wśród nich są pierwiastki zespolone. Niech $\lambda_1 = \delta + j\omega$ będzie pierwiastkiem zespolonym równania charakterystycznego, a $\lambda_2 = \delta - j\omega$ – pierwiastkiem zespolonym sprzężonym z nim. Tym dwóm pierwiastkom odpowiadają dwa liniowo niezależne rozwiązania szczególne

$$y_1 = e^{\delta t} \cos \omega t, \quad y_2 = e^{\delta t} \sin \omega t \quad (4.13)$$

Jeżeli pierwiastki λ_1 i λ_2 są czysto urojone, tzn. $\lambda_1 = j\omega$ oraz $\lambda_2 = -j\omega$, to każdej parze takich pierwiastków zespolonych odpowiadają dwa rzeczywiste liniowo niezależne rozwiązania szczególne

$$y_1 = \cos \omega t, \quad y_2 = \sin \omega t \quad (4.14)$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest kombinacją liniową wszystkich rozwiązań szczególnych z dowolnymi stałymi współczynnikami C_1, C_2, \dots, C_n . Pierwiastkowi rzeczywistemu λ_k w rozwiązaniu ogólnym odpowiada wyrażenie $C_k e^{\lambda_k t}$, natomiast pierwiastkom zespolonym $\lambda_{1,2} = \delta \pm j\omega$ odpowiada wyrażenie

$$e^{\delta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \quad (4.15)$$

a czysto urojonym pierwiastkom sprzężonym $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ – suma dwóch składników

$$C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (4.16)$$

3. Równanie charakterystyczne posiada pierwiastki wielokrotne. Niech λ_1 będzie k -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego (rzeczywistym lub zespolonym). Wówczas odpowiada mu k liniowo niezależnych rozwiązań, tworzących rozwiązanie ogólne o postaci

$$e^{\lambda_1 t} (C_1 + C_2 t + \dots + C_k t^{k-1}) \quad (4.17)$$

Jeżeli $\lambda_1 = \delta + j\omega$ jest pierwiastkiem zespolonym równania charakterystycznego o krotności k , to wymienionemu oraz także sprzężonemu z nim pierwiastkowi $\lambda_2 = \delta - j\omega$, o tej samej krotności, odpowiada rozwiązanie ogólne

$$e^{\delta t} \left[(C_1 + C_2 t + \dots + C_k t^{k-1}) \cos \omega t + (C_{k+1} + C_{k+2} t \dots + C_{2k} t^{k-1}) \sin \omega t \right] \quad (4.18)$$

Z kolei dla pary pierwiastków urojonych $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ o krotności k rozwiązanie ogólne ma postać

$$(C_1 + C_2 t + \dots + C_k t^{k-1}) \cos \omega t + (C_{k+1} t + \dots + C_{2k} t^{k-1}) \sin \omega t \quad (4.19)$$

Gdy równanie charakterystyczne posiada pojedyncze i wielokrotne pierwiastki rzeczywiste, a także pojedyncze i wielokrotne pary pierwiastków zespolonych, to suma odpowiadających im rozwiązań ogólnych daje rozwiązanie ogólne jednorodnego równania różniczkowego.

Przykład 4.1

Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 6y = t \quad \text{dla} \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

Rozwiązanie

Ponieważ funkcję wymuszającą należy traktować jako składnik pewnego wielomianu pierwszego stopnia względem czasu t , więc rozwiązania szczególnego należy szukać również w postaci wielomianu pierwszego stopnia

$$y_u = b_0 + b_1 t \quad (4.20)$$

gdzie: b_0, b_1 – stałe, które należy wyznaczyć z warunków początkowych.

Różniczkując dwukrotnie równanie (4.20), a następnie podstawiając do danego równania różniczkowego i porównując współczynniki w wyrażeniach podobnych po obu stronach równania, otrzymano układ równań:

$$\begin{aligned} 6b_1 &= 1 \\ 6b_0 + 5b_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

a stąd:

$$b_0 = -\frac{5}{36}, \quad b_1 = \frac{1}{6} \quad (4.22)$$

Rozwiązanie szczególne ma zatem postać

$$y_u = -\frac{5}{36} + \frac{1}{6} t \quad (4.23)$$

Pierwiastki równania charakterystycznego $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ wynoszą $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = -3$, więc rozwiązanie ogólne wyraża się zależnością

$$y_n = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \quad (4.24)$$

Rozwiązanie całkowite jest sumą rozwiązań (4.23) i (4.24)

$$y = -\frac{5}{36} + \frac{1}{6} t + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \quad (4.25)$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 wyznacza się z układu równań:

$$y(0) = 0 = \frac{5}{36} + C_1 + C_2 \quad (4.26)$$

$$\dot{y}(0) = 0 = \frac{1}{6} - 2C_1 - 3C_2 \quad (4.27)$$

stąd

$$C_1 = \frac{1}{4} \quad \text{i} \quad C_2 = -\frac{1}{9} \quad (4.28)$$

Ostatecznie rozwiązanie równania różniczkowego stanowi funkcja

$$y(t) = -\frac{5}{36} + \frac{1}{6} t + \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{9} e^{-3t} \quad (4.29)$$

4.1.3. Rozwiązanie równań różnicowych

Równania różnicowe, ze względu na rekurencyjną postać, rozwiązuje się numerycznie. W tym celu wystarczy znać warunki początkowe, a następnie obliczać wartości zmiennych zależnych w kolejnych chwilach czasowych. Aby obliczyć dyskretną wartość sygnału wyjściowego układu np. w chwili czasowej $k = 1000$, należy posługując się metodą iteracyjną rozwiązać równanie dla każdej wartości dyskretnego operatora czasu k z przedziału $k \in [1, 1000]$. Uwzględniając obecną moc obliczeniową komputerów, rozwiązanie tak postawionego zadania nie stanowi większego problemu.

Niekiedy jednak niezbędne są zależności, które podobnie jak w układach ciągłych, uogólniają rozwiązanie równań różnicowych. Równania różnicowe rozwiązuje się w oparciu o odwrotne przekształcenie \mathcal{Z} .

4.2. Metody operatorowe

Klasyczna metoda rozwiązywania równań różniczkowych staje się bardzo pracochłonna w przypadku sygnału wejściowego w postaci funkcji nieciągłej lub rzędu równania większego niż drugi. Wyznaczenie stałych całkowania wymaga żmudnego rozwiązywania równań algebraicznych, których liczba odpowiada rzędowi równania różniczkowego. W wymienionych przypadkach są stosowane metody numeryczne lub ewentualnie (sporadycznie) metody operatorowe. Spośród metod numerycznych do rozwiązywania równań różniczkowych zwykle stosuje się metodę Runge-Kutty czwartego rzędu. Błąd rozwiązania tej metody jest funkcją kwadratu okresu całkowania, a więc bardzo mały w przypadku małej wartości tego okresu. Można też stosować aproksymację pochodnych za pomocą różnic, choć w tym przypadku błąd rozwiązania dla danej wartości okresu próbkowania jest większy.

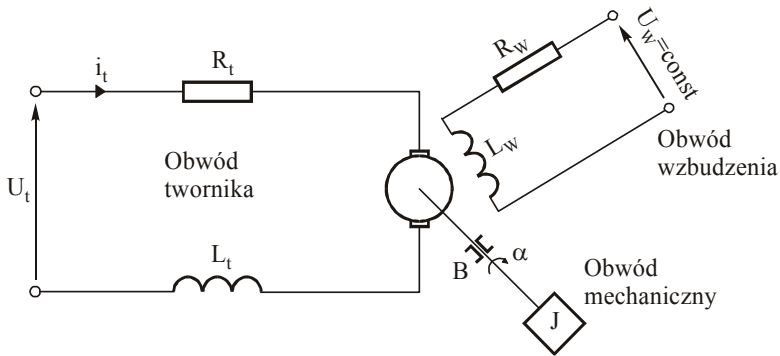
4.2.1. Schematy blokowe

Schematy blokowe stosuje się do graficznego przedstawiania zależności występujących w układach automatyki. Schematy te, nazywane często schematami strukturalnymi, przedstawiają wzajemne powiązania pomiędzy poszczególnymi zespołami analizowanego elementu lub układu, tzn. podają kierunki przepływu sygnałów oraz związki między sygnałami wejściowymi i wyjściowymi wszystkich zespołów. Znajomość schematu blokowego niekiedy ułatwia wyznaczenie opisu matematycznego układu i analizę jego właściwości.

Schematy blokowe elementów lub układów automatyki sporządza się na podstawie ich schematów konstrukcyjnych lub wyznaczonych uprzednio modeli matematycznych. Sporządzanie schematów blokowych na podstawie schematów konstrukcyjnych sprawia zwykle wiele trudności. Przyczyną tego jest konieczność dokładnego zrozumienia działania analizowanego urządzenia, rozróżnienia wejść i wyjść, określenia wzajemnych powiązań między elementami z uwzględnieniem natury fizycznej występujących sygnałów. Budowa schematu blokowego na podstawie modelu matematycznego jest zagadnieniem stosunkowo prostym i przedstawiona zostanie na przykładzie.

Przykład 4.2

Zbudować schemat blokowy obcowzbudnego silnika prądu stałego, którego schemat ideowy zamieszczono na rysunku 4.1.



Rys. 4.1. Schemat ideowy silnika prądu stałego

Rozwiązanie

Równania silnika wyznaczone w oparciu o drugie prawo Kirchoffa i zasadę d'Alemberta mają postać:

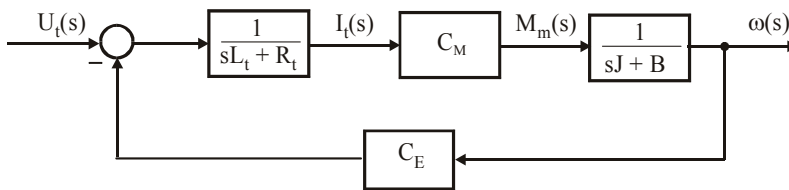
$$\begin{aligned}
 M_e &= C_M i_t \\
 U_t &= L_t \frac{di_t}{dt} + R_t i_t + C_E \frac{d\alpha}{dt} \\
 M_e &= M_m = J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + B \frac{d\alpha}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

gdzie: M_e – obrotowy moment elektryczny; C_M i C_E – parametry stałe; M_m – mechaniczny moment oporu; J – moment bezwładności; α – kąt obrotu wału; B – współczynnik tarcia wiskotycznego; T_t i L_t – rezystancja i indukcyjność twornika; U_w , R_w i L_w – napięcie zasilania, rezystancja i indukcyjność obwodu wzbudzenia.

Stosując przekształcenie Laplace’a do równań (4.30) otrzymano:

$$\begin{aligned} M_e(s) &= C_M I_t(s) \\ U_t(s) - C_E \omega(s) &= (sL_t + R_t) I_t(s) \\ M_e(s) = M_m(s) &= (Js + B) \omega(s) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Schemat blokowy, odpowiadający układowi równań (4.31), przedstawia rysunek 4.2.



Rys. 4.2. Schemat blokowy silnika prądu stałego

Każdy schemat blokowy składa się z trzech rodzajów elementów podstawowych:

- elementu dynamicznego lub statycznego, który ma jedno wejście i jedno wyjście, przy czym sygnał wyjściowy $Y(s)$ jest iloczynem sygnału wejściowego $U(s)$ i transmitancji $G(s)$ tego elementu,
- węzła sumacyjnego, który ma tylko jedno wyjście (skalarne lub wektorowe) i co najmniej dwa wejścia (skalarne lub wektorowe), przy czym sygnał wyjściowy jest sumą sygnałów wejściowych z uwzględnieniem ich znaków,
- węzła zaczepowego, który ma jedno wejście i co najmniej dwa wyjścia, przy czym sygnały wejściowe i wyjściowe są sobie równe.

Ogólne zasady postępowania przy budowie schematu blokowego można sprowadzić do następującej procedury:

- dokonać transformacji Laplace’a układu równań różniczkowych,
- ustalić sygnał wejściowy i wyjściowy układu,
- na podstawie układu równań operatorowych narysować schemat blokowy.

Wiele interesujących przykładów z zakresu budowy schematów blokowych zamieszczono w pracach [2] i [9].

Podczas analizy właściwości oraz warunków pracy liniowych układów automatyki zachodzi często konieczność przekształcania schematów blokowych w celu doprowadzenia ich do postaci dogodnej do dalszych rozważań. Jest to możliwe z uwagi na jednorodność i addytywność układów liniowych. Przy wszystkich zmianach schematu obowiązuje zasada:

każda wydzielona część układu, w której są dokonywane zmiany, powinna po zmianie zachować swe właściwości statyczne i dynamiczne. Również dowolna część układu nie podlegająca przekształceniu, w wyniku zastosowanego przekształcenia nie może ulec zmianie, tzn. zastąpienie części układu układem równoważnym nie może spowodować jakiegokolwiek zmiany w części układu nie podlegającej przekształceniu.

Przekształcenie schematu blokowego jest równoważne przekształceniu układu równań opisujących ten układ i prowadzi do zmiany układu połączeń elementów schematu lub jego uproszczenia.

Znane są następujące sposoby przekształcania (upraszczania) schematów blokowych [21]:

- metoda przekształcania układu równań opisujących układ,
- metoda krok po kroku poprzez kolejne dokonywanie prostych przekształceń schematu.

Metoda przekształceń układu równań opisujących stosuje się najczęściej na etapie budowy schematu blokowego i nie będzie szerzej analizowana.

Metoda krok po kroku pozwala zarówno przekształcać, jak i upraszczać schemat blokowy. Stosuje się ją do przekształcania dowolnie skomplikowanych schematów. Metoda ta ma istotne zalety, gdyż:

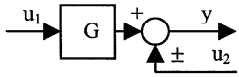
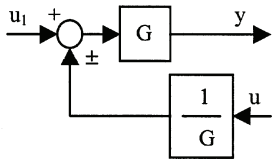
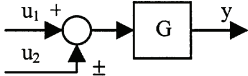
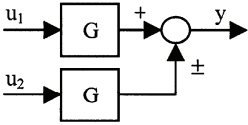
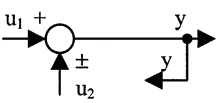
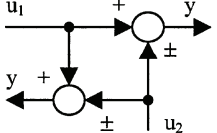
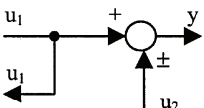
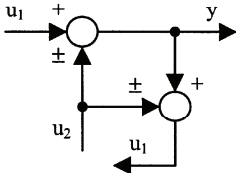
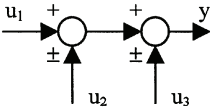
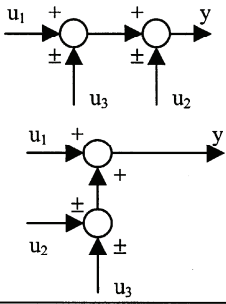
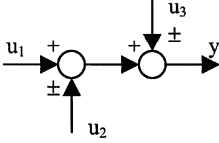
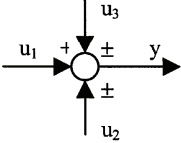
- nie wymaga określenia klasy schematu, a więc ma zastosowanie do wszystkich schematów układów liniowych,
- umożliwia dokonywanie kontroli poprawności każdego kroku, a więc zapewnia poprawny wynik przekształceń.

Zasady wykonywania podstawowych operacji przekształcania schematów blokowych liniowych układów jednowymiarowych, metodą krok po kroku, zamieszczono w tabeli 4.1.

Tabela 4.1. Zasady redukcji schematów blokowych

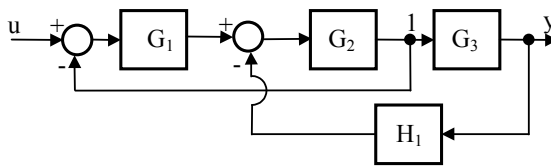
Lp.	Przekształcenie	Schemat pierwotny	Schemat równoważny	Równanie
1	2	3	4	5
1.	Połączenie szeregowo			$y = G_1 G_2 u$
2.	Połączenie równoległe			$y = (\pm G_1 \pm G_2)u$
3.	Eliminacja pętli sprzężenia zwrotnego			$y = \frac{G}{1 \pm GH} u$
4.	Wyłączenie członu sprzężenia zwrotnego			$y = \frac{G}{1 \pm GH} u$
5.	Wyłączenie członu przed pętlę równoległą			$y = (\pm G_1 \pm G_2)u$
6.	Zmiana kolejności członów			$y = G_1 G_2 u$
7.	Przesuwanie zacisku przed blok			$y = Gu$
8.	Przesuwanie zacisku za blok			$y = Gu$
9.	Rozdzielenie węzła zaczebowego			—

Tabela 4.1 - cd.

Lp.	Przeszczalcenie	Schemat pierwotny	Schemat równoważny	Równanie
10.	Przesuwanie węzła sumacyjnego przed blok			$y = Gu_1 \pm u_2$
11.	Przesuwanie węzła sumacyjnego za blok			$y = G(u_1 \pm u_2)$
12.	Przesuwanie zaczepu przed węzeł sumacyjny			$y = u_1 \pm u_2$
13.	Przesuwanie zaczepu za węzeł sumacyjny			$y = u_1 \pm u_2$
14.	Zmiana położenia węzłów sumacyjnych			$y = u_1 \pm u_2 \pm u_3$
15.	Łączenie węzłów sumacyjnych			$y = u_1 \pm u_2 \pm u_3$

Przykład 4.3

Określić transmitancję układu przedstawionego na rysunku 4.3.



Rys. 4.3. Schemat blokowy układu

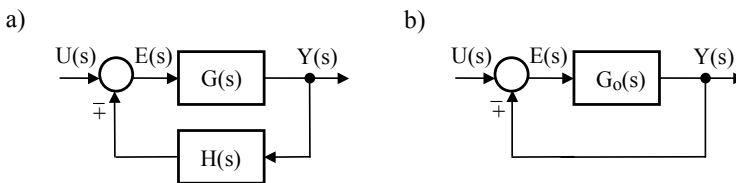
Rozwiązanie

Aby otrzymać transmitancję zastępczą układu, należy przesunąć zaczepek 1 za blok G_3 (reguła 7 w tabeli 4.1) oraz dwukrotnie zastosować regułę 3. W wyniku tych operacji uzyska się transmitancję zastępczą układu w postaci

$$G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 + H_1 G_2 G_3} \quad (4.32)$$

4.2.2. Postać kanoniczna układu ze sprzężeniem zwrotnym

Przez postać kanoniczną rozumie się taką strukturę układu, która zawiera minimalną liczbę członów. W przypadku układów o złożonej strukturze otrzymuje się ją drogą redukcji schematu blokowego. Postać kanoniczną układu ze sprzężeniem zwrotnym przedstawiono na rysunku 4.4a, a w przypadku gdy $H(s) \equiv 1$ – na rysunku 4.4b.



Rys. 4.4. Układy ze sprzężeniem zwrotnym

Dla układu ze sprzężeniem zwrotnym rozróżnia się następujące rodzaje transmitancji:

1) transmitancja układu otwartego

$$\boxed{G_o(s) \stackrel{def}{=} G(s)H(s) = \frac{L_o(s)}{M_o(s)}} \quad (4.33)$$

2) transmitancja układu zamkniętego

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)} = \frac{L_z(s)}{M_z(s)} \quad (4.34)$$

3) transmitancja uchybowa

$$G_u(s) = \frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 \pm G(s)H(s)} \quad (4.35)$$

Transmitancję układu zamkniętego $G_z(s)$ oraz transmitancję uchybową $G_u(s)$ określa się z równań opisujących układ ze sprzężeniem zwrotnym, które mają postać:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)E(s) \\ E(s) &= U(s) \pm H(s)Y(s) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Równanie

$$M_o(s) = 0 \quad (4.37)$$

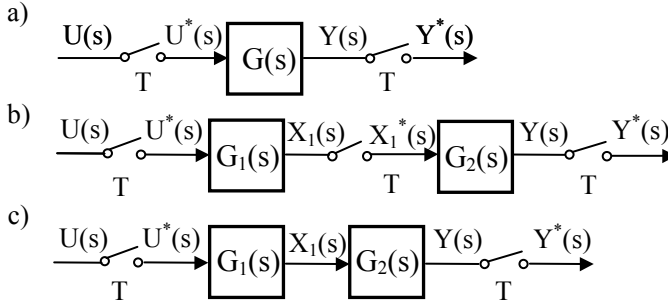
nazywa się **równaniem charakterystycznym układu otwartego**, natomiast

$$1 \pm G(s)H(s) = 0 \quad \text{lub} \quad M_z(s) = 0 \quad (4.38)$$

równaniem charakterystycznym układu zamkniętego. W dalszych rozważaniach istotne znaczenie będzie miał problem wyznaczania pierwiastków równania (4.37) lub (4.38). W przypadku wysokiego stopnia tych równań jedynie efektywne są metody numeryczne.

4.2.3. Dyskretna aproksymacja układów ciągłych

Z przedstawionych wyżej rozważań wynika, że wyznaczenie transmitancji dyskretnej układu regulacji z obiektem mającym charakter ciągły wymaga przekształcenia jego transmitancji $G(s)$ do postaci dyskretnej $G(z)$. Przekształcenie to nazywa się **dyskretną aproksymacją** (lub **dyskretyzacją**) układów ciągłych. Istnieje wiele metod dyskretyzacji układów ciągłych. Przed przystąpieniem do ich szczegółowego omówienia zostanie przedstawiony problem wpływu umiejscowienia impulsatora (lub impulsatorów) w układzie ciągłym na sposób dyskretyzacji tego układu. Na rysunku 4.5 zamieszczono trzy różne struktury układów otwartych.



Rys. 4.5. Schematy impulsowych układów otwartych

Dowodzi się [21], że dla układu z rysunku 4.5a

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}[G(s)] \quad (4.39)$$

Układ przedstawiony na rysunku 4.5b składa się z dwóch członów ciągłych przedzielonych impulsorem, a więc transmitancja zastępcza układu ma postać

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = G_1(z) G_2(z) = \mathcal{Z}[G_1(s)] \mathcal{Z}[G_2(s)] \quad (4.40)$$

Wreszcie, dla układu pokazanego na rysunku 4.5c, słuszna jest zależność

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}[G_1(s) G_2(s)] \quad (4.41)$$

Transmitancja zastępcza układu z rysunku 4.5b różni się od transmitancji zastępczej układu z rysunku 4.5c, gdyż

$$\mathcal{Z}[G_1(s)] \mathcal{Z}[G_2(s)] \neq \mathcal{Z}[G_1(s) G_2(s)] \quad (4.42)$$

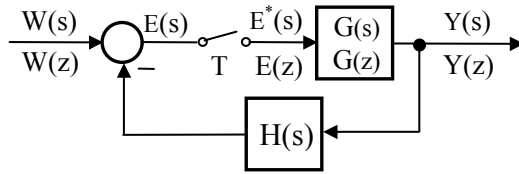
Często w układach impulsowych ekstrapolator jest połączony szeregowo z członem ciągłym o transmitancji np. $G_1(s)$. Wówczas transmitancja zastępcza układu wynosi

$$G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} G_1(s) \quad (4.43)$$

Transmitancję dyskretną takiego układu wyznacza się w następujący sposób

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(s)] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{G_1(s)}{s}\right] \quad (4.44)$$

W układach dyskretnych również definiuje się transmitancje układu otwartego, zamkniętego i uchybową. Typową strukturę układu dyskretnego przedstawia rysunek 4.6.



Rys. 4.6. Schemat dyskretnego układu regulacji

Dyskretna transmitancja układu otwartego $G_o(z)$ jest odpowiednikiem transmitancji operatorowej układu ciągłego i wyraża się zależnością

$$\boxed{G_o(z) = \mathcal{Z}[G_o(z)] = \mathcal{Z}[G(s)H(s)]} \quad (4.45)$$

Dyskretna transmitancja układu zamkniętego jest określona następująco

$$\boxed{G_z(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{\mathcal{Z}[G(s)]}{1 + \mathcal{Z}[G(s)H(s)]} = \frac{G(z)}{1 + G_o(z)}} \quad (4.46)$$

Dyskretną transmitancją uchybową $G_u(z)$ nazywa się stosunek transformaty $E(z)$ do transformaty $W(z)$ przy założeniu, że warunki początkowe są zerowe

$$\boxed{G_u(z) = \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + \mathcal{Z}[G(s)H(s)]} = \frac{1}{1 + G_o(z)}} \quad (4.47)$$

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że dyskretyzacja układów ciągłych polega na zastąpieniu transmitancji operatorowej $G(s)$ układu lub podukładu transmitancją dyskretną $G(z)$. Dokonać tego można różnymi metodami.

Metoda 1 (w oparciu o tablice transformat)

W tabelach transformat \mathcal{Z} często jest podane zestawienie transmitancji $G(s)$ i odpowiadających im dyskretnych transmitancji $G(z)$. Jeżeli natomiast w tabelach są podane tylko transformaty dyskretnie $F(z)$ dla funkcji ciągłych $f(t)$ lub funkcji dyskretnych $f(kT)$, to chcąc wyznaczyć dla danej transmitancji $G(s)$ transmitancję $G(z)$ należy postępować następująco:

- wyznaczyć charakterystykę impulsową $g(t)$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad (4.48)$$

- wyznaczyć dyskretną charakterystykę impulsową

$$g(kT) = g(t) \Big|_{t=kT} \quad (4.49)$$

- dla wyznaczonej charakterystyki $g(t)$ lub $g(kT)$ odczytać transmitancję $G(z)$.

Metoda 2 (bazująca na wyznaczeniu charakterystyki impulsowej)

Dyskretną charakterystykę impulsową $g(kT)$, dla danej transmitancji $G(s)$, wyznacza się zgodnie z zależnością (4.49). Poszukiwana transmitancja dyskretna $G(z)$ określona jest zależnością

$$G(z) = \mathcal{Z} [g(kT)] \quad (4.50)$$

Zgodnie z zależnością (4.48) charakterystyka impulsowa $g(t)$ wynosi

$$g(t) = \mathcal{Z}^{-1} [G(s)] = \sum_{i=1}^n \frac{L(s_i)}{M'(s_i)} e^{s_i t} \quad (4.51)$$

gdzie

$$M'(s_i) = \left. \frac{dM(s)}{ds} \right|_{s=s_i} \quad (4.52)$$

Dyskretna charakterystyka impulsowa ma zatem postać

$$g(kT) = g(t) \Big|_{t=kT} = \sum_{i=1}^n \frac{L(s_i)}{M'(s_i)} e^{ks_i T} \quad (4.53)$$

a poszukiwana transmitancja $G(z)$ jest określona następująco

$$G(z) = \mathcal{Z} [g(kT)] = \sum_{i=1}^n \frac{L(s_i)}{M'(s_i)} \mathcal{Z} [e^{ks_i T}] = \sum_{i=1}^n \frac{L(s_i)}{M'(s_i)} \frac{z}{z - e^{s_i T}} \quad (4.54)$$

Jeżeli w skład części ciągłej wchodzi ekstrapolator zerowego rzędu, to transmitancję $G(s)$ można zapisać w postaci

$$G(s) = \frac{1 - e^{sT}}{s} \frac{L_1(s)}{M_1(s)} \quad (4.55)$$

przy czym założono, że pierwiastki s_2, s_3, \dots, s_n równania $M_1(s) = 0$ są różne i niezerowe. W tym przypadku poszukiwana transmitancja dyskretna $G(z)$ wynosi [12]

$$G(z) = \frac{L_1(0)}{M_1(0)} + \sum_{i=2}^n \frac{L_1(s_i)}{s_i M_1'(s_i)} \frac{z - 1}{z - e^{s_i T}} \quad (4.56)$$

Przykład 4.4

Wyznaczyć transmitancję dyskretną układu złożonego z idealnego impulsatora, ekstrapolatora zerowego rzędu oraz członu inercyjnego pierwszego rzędu.

Rozwiązanie

Transmitancja operatorowa części ciągłej ma postać

$$G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{K}{sT_1 + 1} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{L_1(s)}{M_1(s)} \quad (4.57)$$

przy czym

$$L_1(s) = K \quad \text{oraz} \quad M_1(s) = sT_1 + 1 \quad (4.58)$$

Równanie $M_1(s) = sT_1 + 1 = 0$ ma pierwiastek $s_2 = -1/T_1$.

Transmitancja dyskretna jest określona zależnością

$$G(z) = \frac{L_1(0)}{M_1(0)} + \frac{L_1(s_2)}{s_2 M_1'(s_2)} \frac{z-1}{z - e^{s_2 T}} = \frac{K}{1} + \frac{K}{-1} \frac{z-1}{z - e^{-T/T_1}} = K \frac{1 - e^{-T/T_1}}{z - e^{-T/T_1}} \quad (4.59)$$

Metoda 3 (dyskretna aproksymacja pochodnych)

Metoda ta została już omówiona w rozdziale 3.1.2. Bazuje na aproksymacji pochodnej za pomocą różnicy pierwszego rzędu

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{f(k+1) - f(k)}{T} \quad (4.60)$$

Metoda 4 (metoda operatorów całkowych)

Inne ujęcie, równoważne opisanemu powyżej, wprowadzają metody wykorzystujące operatory całkowania numerycznego. Istnieje wiele metod tego typu, a wszystkie sprowadzają się do zastępowania operatorów całkowania s^{-1} , występujących w transmitancji $G(s)$ opisującej układ, odpowiednimi funkcjami zmiennej z , reprezentującymi operatory całkowania numerycznego. W wyniku jest otrzymywana pewna funkcja zmiennej z , która stanowi transmitancję dyskretną $G(z)$ analizowanego układu.

Najczęściej jest stosowana metoda **operatorów całkowych Tustina**. Metoda Tustina ogranicza się do wykorzystania, wprowadzonej przez Tustina, definicji operatorów całkowania. Operator całkowania ma postać

$$s^{-n} = \left[\begin{array}{c} T \\ 2 \end{array} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right]^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.61)$$

Przykład 4.5

Stosując metodę operatorów całkowych Tustina wyznaczyć transmitancję dyskretną układu o transmitancji

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1}$$

Rozwiązanie

Transmitancję operatorową $G(s)$ można przedstawić w postaci

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} = \frac{K s^{-1}}{T_1 + s^{-1}} \quad (4.62)$$

Podstawiając

$$s^{-1} = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

otrzymano

$$G(z) = \frac{KT}{2} \frac{z + 1}{(1 + T_1)z + 1 - T_1} \quad (4.63)$$

4.2.4. Podstawowe parametry członów dynamicznych i układów regulacji

Niech układ dynamiczny (otwarty lub zamknięty) opisany będzie transmitancją o postaci

$$G(s) = \frac{K_k (b_m s^m + \dots + b_1 s + 1)}{s^k (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1)} \quad (4.64)$$

Układ ten charakteryzują następujące parametry:

1. Współczynnik wzmocnienia statycznego K , który określa wzmocnienie układu w stanie ustalonym przy stałym sygnale wejściowym. W ogólnym przypadku określa się go wyznaczając granicę

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (4.65)$$

jeśli oczywiście $k = 0$. Jeżeli transmitancja układu posiada bieguny równe zeru ($k > 0$), to nie można określić K , gdyż $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \rightarrow \infty$. Wówczas dla $k = 1$ określa się tzw. *statyczny współczynnik wzmocnienia prędkościowego*, jako

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (4.66)$$

co odpowiada stosunkowi amplitudy prędkości zmian sygnału wyjściowego do amplitudy sygnału wejściowego. W analogiczny sposób dla $k = 2$ można określić **współczynnik wzmocnienia przyspieszeniowego**.

2. Wzmocnienie amplitudowe układu jest określone jako moduł z $G(j\omega)$, co odpowiada stosunkowi amplitud sygnału wyjściowego i wejściowego w stanie ustalonym, przy wymuszeniu harmonicznym. Dla układów dynamicznych wzmocnienie to jest funkcją pulsacji ω sygnału wymuszającego. Między wzmocnieniem statycznym K a wzmocnieniem amplitudowym zachodzi relacja

$$K = |G(j\omega)|_{\omega=0} \quad (4.67)$$

3. Stała czasowa T , dla układu pierwszego rzędu jest definiowana jako czas, w którym układ osiąga 63,7% wartości ustalonej lub czas, w którym układ osiąga stan ustalony, jeśli poruszałby się z prędkością równą prędkości w chwili $t = 0^+$. Układ wyższego rzędu posiada wiele stałych czasowych, których wartości są odwrotnością wartości biegunów transmitancji $G(s)$.

Istotne znaczenie praktyczne ma układ drugiego rzędu o transmitancji

$$G(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1/a_0}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1} \quad (4.68)$$

Pierwiastki równania charakterystycznego tego układu, dla wyróżnika $\Delta < 0$, wynoszą

$$s_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm j \sqrt{\frac{4a_2 a_0 - a_1^2}{4a_2^2}} = \sigma \pm j\omega_t \quad (4.69)$$

lub

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \sigma \pm j\omega_t \quad (4.70)$$

Układ drugiego rzędu charakteryzują następujące parametry:

1. Współczynnik tłumienia ξ . Tłumienie w układzie charakteryzuje współczynnik a_1 . Jeżeli a_1 osiągnie tzw. wartość krytyczną, równą $a_{1kr} = 2\sqrt{a_2 a_0}$, to transmitancja (4.68) posiada biegun podwójny ($\Delta = 0$). Współczynnik tłumienia ξ

zdefiniowany jest jako stosunek rzeczywistego współczynnika tłumienia a_1 do krytycznego współczynnika tłumienia a_{1kr} , czyli

$$\xi = \frac{a_1}{a_{1kr}} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}} \quad (4.71)$$

Rozróżnia się tłumienie:

- a) podkrytyczne ($\xi < 1$) – bieguny układu zespolone ($\Delta < 0$),
- b) krytyczne ($\xi = 1$) – biegun rzeczywisty, podwójny ($\Delta = 0$),
- c) nadkrytyczne ($\xi > 1$) – bieguny rzeczywiste, różne ($\Delta > 0$).

2. Pulsacja drgań własnych nietłumionych ω_n . Jest to pulsacja drgań odpowiedzi układu w przypadku braku tłumienia, tj. dla $\xi = 0$ ($a_1 = 0$). Wówczas na wyjściu układu powstają oscylacje, których amplituda nie maleje z upływem czasu. Pulsację ω_n wyznacza się z zależności

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \quad (4.72)$$

3. Pulsacja drgań własnych tłumionych ω_t . Jest to pulsacja drgań układu dla $\xi > 0$, czyli jest to pulsacja, z jaką oscyluje odpowiedź układu tłumionego. Dla $0 < \xi < 1$

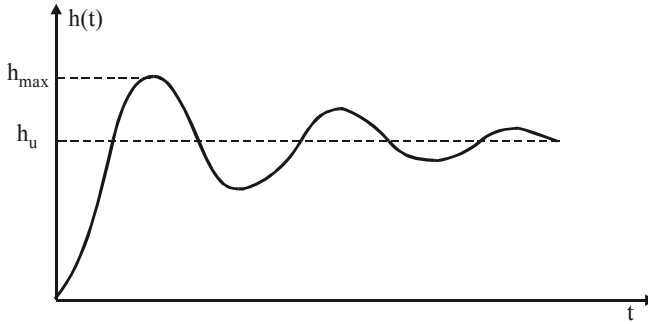
$$\omega_t = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.73)$$

4. Okres drgań T_0 . Uwzględniając równanie (4.73) i zależność $\omega = 2\pi f$, okres drgań T_0 wynosi

$$T_0 = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.74)$$

5. Przeregulowanie κ . Parametr ten określa maksymalne odchylenie odpowiedzi skokowej układu odniesione do wartości ustalonej tej odpowiedzi i jest wyrażony najczęściej w procentach. Na podstawie rysunku 4.7 można napisać

$$\kappa = \frac{h_{\max} - h_u}{h_u} \cdot 100 = \exp\left[-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right] \cdot 100 \quad [\%] \quad (4.75)$$



Rys. 4.7. Odpowiedź skokowa układu drugiego rzędu

6. Stała czasowa T . Stała czasowa układu oscylacyjnego jest określona równaniem

$$T = \frac{1}{\xi \omega_n} \quad (4.76)$$

gdyż odpowiedź swobodna tego układu ma postać

$$y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \quad (4.77)$$

a zgodnie z definicją stałej czasowej wykładnik liczby e będzie równy -1 , gdy jest spełniona zależność (4.76).

Przykład 4.6

Dana jest transmitancja układu drugiego rzędu

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 3s + 2} \quad (4.78)$$

Obliczyć podstawowe parametry charakteryzujące ten układ.

Rozwiązanie

Poszukiwane parametry można obliczyć z ww. zależności lub z porównania odpowiednich współczynników zależności (4.68). Porównując odpowiednie współczynniki transmitancji

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3}{\frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}s + 1} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1} \quad (4.79)$$

otrzymano: $K = 3$, $\omega_n = \sqrt{2}$ oraz $\xi = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

4.2.5. Regulacja statyczna i astatyczna

A. Astatyzm układów ciągłych

Dowolnie złożony układ regulacji, drogą redukcji schematu blokowego, można przekształcić do postaci przedstawionej na rysunku 4.4b. Ogólną postać transmitancji układu otwartego przedstawia wyrażenie

$$G_o(s) = \frac{K_k (b_m s^m + \dots + b_1 s + 1)}{s^k (a_n s^n + \dots + a_1 s + 1)} \quad (4.80)$$

gdzie K_k – współczynnik wzmocnienia statycznego położenia (gdy $k = 0$), prędkości (gdy $k = 1$), przyspieszenia (gdy $k = 2$) itd. Czynniki s^k w mianowniku transmitancji reprezentuje k -krotny biegun $s = 0$. W zależności od wartości k rozróżnia się następujące układy zamknięte:

- statyczne lub inaczej astatyczne zerowego rzędu ($k = 0$),
- astatyczne pierwszego rzędu ($k = 1$),
-
- astatyczne p -tego rzędu ($k = p$).

Należy zauważyć, że czynnik s^k występuje w mianowniku transmitancji układu otwartego, w przypadku transmitancji uchybowej $G_u(s)$ wystąpi w jej liczniku.

Uchyb w stanie ustalonym wynosi:

$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{U(s)}{1 + G_o(s)} \quad (4.81)$$

Jego wartość jest uzależniona od rzędu astatyzmu układu oraz od typu wymuszenia. Poniżej przeanalizowane zostaną następujące wymuszenia:

1. Wymuszenie w postaci sygnału skokowego – $u(t) = U_0 \cdot 1(t)$. Uchyb ustalony dla tego typu wymuszenia nazywa się uchybem położenia i wynosi:

$$- \text{gdy } k = 0 \quad e_u = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U_0}{1 + G_o(s)} = \frac{U_0}{1 + K_0} \quad (4.82)$$

$$- \text{gdy } k > 0 \quad e_u = 0$$

Stąd wniosek, że sygnał $u(t) = U_0 \cdot 1(t)$ będzie odtwarzany w stanie ustalonym bez uchybu, jeżeli $k > 0$.

2. Wymuszenie w postaci sygnału liniowego – $u(t) = U_1 t \cdot 1(t)$. Uchyb ustalony dla wymuszenia liniowo-narastającego nosi nazwę uchybu prędkościowego i przyjmuje wartości:

$$- \text{dla } k = 0 \quad e_u \rightarrow \infty,$$

$$- \text{dla } k = 1 \quad e_u = \frac{U_1}{K_1}, \quad (4.83)$$

$$- \text{dla } k > 1 \quad e_u = 0.$$

Można zauważyć ogólną prawidłowość, że chcąc zachować np. stałą wartość uchybu ustalonego, należy wraz z podniesieniem stopnia wielomianu sygnału sterującego $u(t)$ zwiększyć także rząd astatyzmu układu.

3. Wymuszenie w postaci sygnału parabolicznego – $u(t) = U_2 t^2 \cdot 1(t)$. Uchyb ustalony przy wymuszeniu parabolicznym nazywa się uchybem przyspieszeniowym:

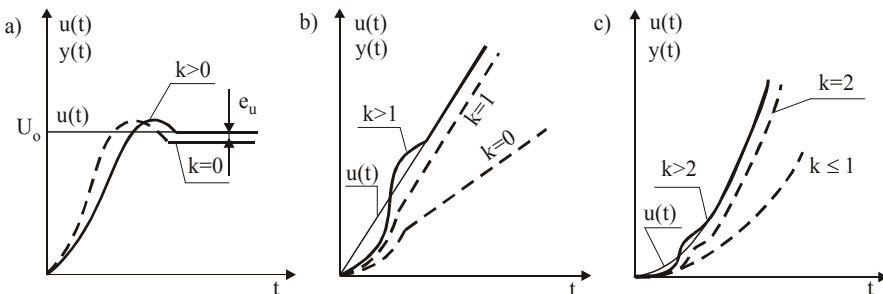
$$- \text{gdy } k \leq 1 \quad e_u \rightarrow \infty,$$

$$- \text{gdy } k = 2 \quad e_u = \frac{U_2}{K_2}, \quad (4.84)$$

$$- \text{gdy } k > 2 \quad e_u = 0.$$

Układ astatyczny drugiego rzędu nadaża więc za sygnałem parabolicznym ze stałą wartością uchybu ustalonego.

Na rysunku 4.8 naszkicowano przebiegi odpowiadające rozważanym wyżej przypadkom. Przebieg uchybu jest oczywiście zawsze różnicą pomiędzy przebiegiem $u(t)$ i $y(t)$.

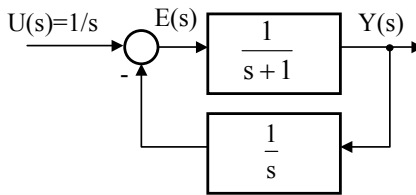


Rys. 4.8. Odpowiedzi czasowe układów statycznych i astatycznych

Sens astatyzmu można dość prosto zinterpretować. Jeżeli układ regulacji w torze głównym w ogóle nie zawiera członów całkujących, to stałą i niezerową wartość ustaloną wyjścia y_u spowoduje tylko stała i niezerowa wartość uchybu e_u , gdyż $y_u = K_0 e_u$. Natomiast gdy w układzie jest całkowanie, to ustalenie się wartości y_u na stałym poziomie powoduje wartość $e_u = 0$, czyli jest wówczas spełnione $y_u = U_0$ wobec $H(s) = 1$. Jeżeli natomiast całkowanie wystąpi tylko w sprzężeniu zwrotnym, to wprowadzie dla $u(t) = U_0 \cdot 1(t)$ uchyb $e_u = 0$, ale $y_u \neq U_0$. Przypadek ten zostanie omówiony na poniższym przykładzie.

Przykład 4.7

Dany jest układ regulacji (rys. 4.9). Określić uchyb ustalony e_u oraz wartość ustaloną odpowiedzi y_u .



Rys. 4.9. Schemat blokowy układu regulacji

Rozwiązanie

Transmitancja uchybowa wynosi

$$G_u(s) = \frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s+1} \frac{1}{s}} = \frac{s(s+1)}{s^2 + s + 1} \quad (4.85)$$

a stąd uchyb ustalony

$$e_u = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+1)}{s^2 + s + 1} \frac{1}{s} = 0 \quad (4.86)$$

Natomiast transmitancja układu zamkniętego

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{s^2 + s + 1} \quad (4.87)$$

oraz wartość ustalona odpowiedzi układu

$$y_u = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s}{s^2 + s + 1} \frac{1}{s} = 0 \quad (4.88)$$

Układ ten ze względu na brak całkowania w torze głównym i z występowaniem całkowania w sprzężeniu zwrotnym nie jest w stanie wytworzyć różnej od zera wartości odpowiedzi ustalonej na skokowy sygnał wymuszający. Powyższe rozważania przeprowadzono nie uwzględniając zakłóceń działających na układ regulacji. Jeżeli zakłócenie sumuje się w układzie regulacji z sygnałem wyjściowym, to właściwości astatyczne względem sygnału zakłócającego są identyczne jak względem sygnału zadanego.

B. Astatyzm układów dyskretnych

Układem dyskretnym statycznym (astatycznym zerowego rzędu) jest nazywany układ nie zawierający członów sumujących (odpowiednik członów całkujących w układach ciągłych), tzn. którego transmitancja dyskretna toru głównego $G(z)$ nie posiada biegunów równych jedności. Natomiast układem dyskretnym astatycznym jest nazywany układ zawierający człony sumujące, a więc którego transmitancja dyskretna toru głównego $G(z)$ ma przynajmniej jeden biegun równy jedności.

Rząd astatyzmu układu dyskretnego określa krotność bieguna równego jedności transmitancji toru głównego $G(z)$. Przykładem układu astatycznego r -tego rzędu jest układ dyskretny o transmitancji toru głównego $G(z)$

$$G(z) = \frac{z + 2}{(z - 1)^r (z + 0,5)(z - 0,2)} \quad (4.89)$$

Łatwo wykazać, że dyskretna transmitancja uchybowa układu astatycznego r -tego rzędu posiada w liczniku czynnik $(z - 1)^r$.

Uchyb ustalony układu dyskretnego jest wyznaczany z twierdzenia o wartości końcowej

$$e_u = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) \quad (4.90)$$

4.3. Metody częstotliwościowe

Trzecim, równorzędnym sposobem analizy dynamiki układów, oprócz metod klasycznych i operatorowych, jest analiza układów w dziedzinie częstotliwościowej. Metoda ta wykorzystuje informacje o charakterystykach częstotliwościowych układów, a w związku z tym stosuje się ją głównie w przypadku uwzględnienia zakłóceń występujących w układzie regulacji.

4.3.1. Człony podstawowe

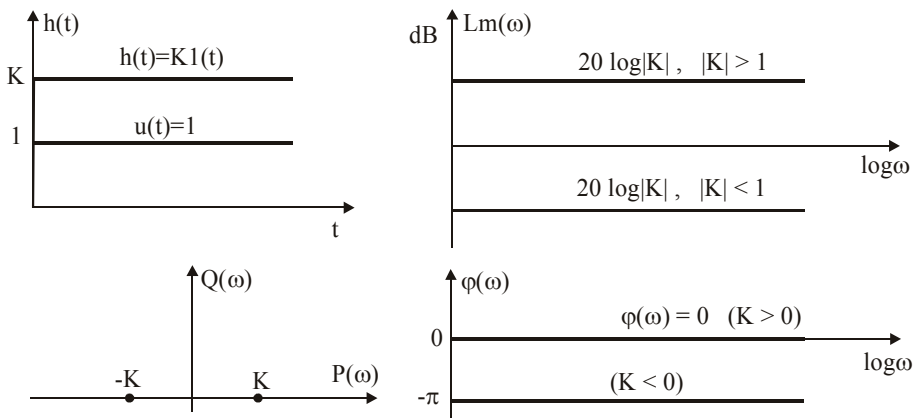
Członami podstawowymi nazywa się elementarne części lub zespoły, które można wydzielić w modelu matematycznym lub w schemacie blokowym układu. Dynamika tych członów jest dokładnie zbadana i często można ją wykorzystać w analizie złożonych układów sterowania.

A. Człon proporcjonalny (bezinercyjny)

Równanie tego członu i transmitancja mają postać

$$\boxed{y(t) = Ku(t)}, \quad \boxed{G(s) = K} \quad (4.91)$$

przy czym parametr K jest współczynnikiem wzmocnienia statycznego, który może przyjmować wartości dodatnie i ujemne. Odpowiedź skokową, charakterystykę amplitudowo-fazową oraz charakterystyki logarytmiczne członu proporcjonalnego przedstawia rysunek 4.10. Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest punktem, logarytmiczna charakterystyka amplitudowa ma wartość stałą. Kąt przesunięcia fazowego φ jest również stały, przy czym w zależności od znaku K może wynosić 0° lub 180° . Szczególny przypadek członu proporcjonalnego dla $K = -1$ nazywa się **inwertorem fazowym**. Członami proporcjonalnymi są: dzielnik napięcia, idealny wzmacniacz elektroniczny, prądnica tachometryczna (jeśli założy się stałe wzbudzenie i wielkość wejściową w postaci prędkości kątowej), dźwignia dwuramienna, przekładnia zębata, prasa hydrauliczna itd.



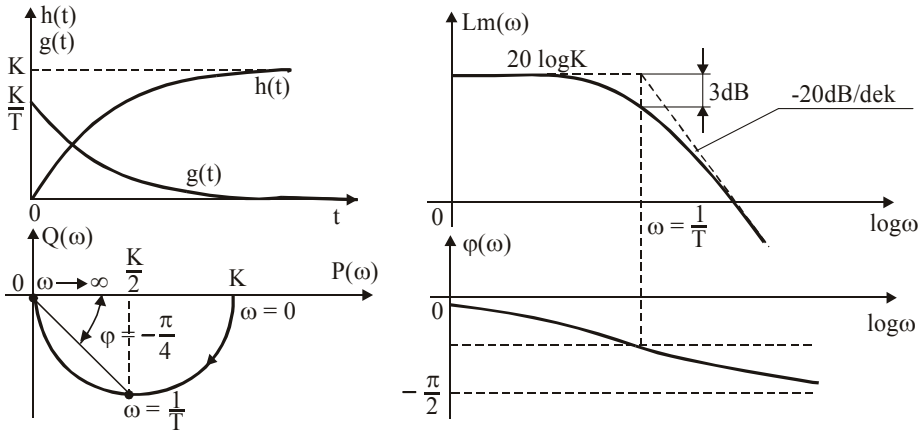
Rys. 4.10. Charakterystyki członu proporcjonalnego

B. Człon inercyjny pierwszego rzędu

Równanie i transmitancja członu inercyjnego pierwszego rzędu mają odpowiednio postać:

$$\left\{ T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t) \right\}, \quad \left\{ G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \right\} \quad (4.92)$$

przy czym: K – współczynnik wzmocnienia statycznego; T – stała czasowa. Podstawowe charakterystyki członu inercyjnego przedstawiono na rysunku 4.11.



Rys. 4.11. Charakterystyki członu inercyjnego pierwszego rzędu

Odpowiedź impulsowa $g(t)$ i skokowa $h(t)$ są określone zależnościami

$$g(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} 1(t), \quad h(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) 1(t) \quad (4.93)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest półokręgiem o średnicy K ; minimum charakterystyki urojonej $Q(\omega)$ i przesunięcie fazowe $\varphi(\omega) = -45^\circ$ występują dla $\omega = 1/T$.

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa wyraża się zależnością

$$Lm(\omega) = 20 \log \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad (4.94)$$

Ze wzoru (4.94) wynika, że wykres $Lm(\omega)$ można w przybliżeniu zastąpić linią łamaną (charakterystyką asymptotyczną) składającą się z dwóch półprostych. Wy-

nika to stąd, że dla małych pulsacji, tzn. gdy $\omega \ll 1/T$, $\log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx \log 1 = 0$, dominujące znaczenie ma pierwszy składnik prawej strony wzoru (4.94). Z kolei dla dużych pulsacji, gdy $\omega \gg 1/T$, to $\log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx \log \omega T$. Zatem w przybliżeniu można przyjąć

$$\text{Lm}(\omega) = \begin{cases} 20 \log K & \text{dla } \omega \leq \frac{1}{T} \\ 20 \log K - 20 \log \omega T & \text{dla } \omega > \frac{1}{T} \end{cases} \quad (4.95)$$

Dla pulsacji załamania $\omega = 1/T$ rzędna charakterystyki amplitudowej wyliczona ze wzoru (4.95) wynosi $\text{Lm}(\omega) = 20 \log K$, natomiast ze wzoru (4.94) – $\text{Lm}(\omega) \approx 20 \log K - 3$, zatem największa różnica rzędnych charakterystyki dokładnej i asymptotycznej wynosi około 3 dB. Nachylenie charakterystyki przybliżonej (dla $\omega > 1/T$) wynosi

$$\begin{aligned} \text{Lm}10\omega - \text{Lm}\omega &= 20 \log K - 20 \log 10\omega T - (20 \log K - 20 \log \omega T) = \\ &= -20 \text{dB/dekadę} \end{aligned} \quad (4.96)$$

Przykładami członów inercyjnych pierwszego rzędu są:

- czwórnik RC (wyjście – napięcie na pojemności C),
- obcowzbudny generator prądu stałego (wejście – napięcie wzbudzenia, wyjście – generowana siła elektromotoryczna),
- ruch masy pod wpływem siły z uwzględnieniem tarcia lepkiego (wejście – siła, wyjście – prędkość masy),
- zbiornik gazu z tłumionym dopływem (wejście – ciśnienie dopływu, wyjście – ciśnienie w zbiorniku).

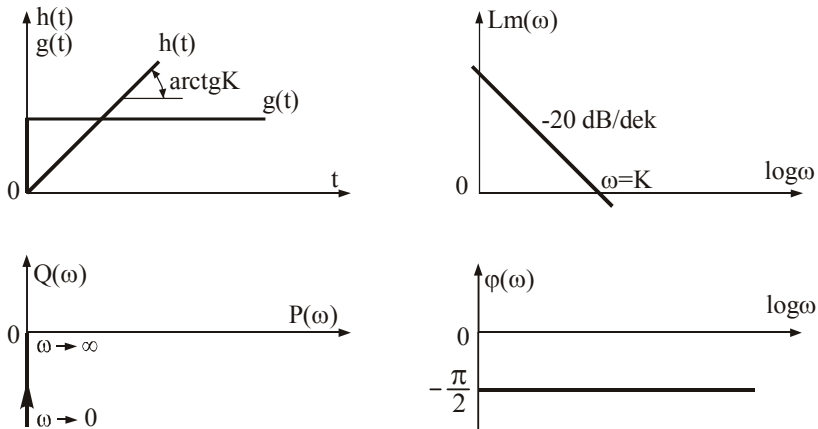
C. Człony całkujące

Rozróżnia się człon całkujący idealny i człon całkujący z inercją (rzeczywisty). Równanie i transmitancja idealnego członu całkującego wyrażają się wzorami:

$$\left\{ \frac{dy(t)}{dt} = Ku(t) \right\}, \quad \left\{ G(s) = \frac{K}{s} = \frac{1}{sT_i} \right\} \quad (4.97)$$

w których parametr K , charakteryzujący w stanie ustalonym stosunek wartości prędkości odpowiedzi członu do wartości wymuszenia, nazwany jest współczynniki

kiem wzmocnienia prędkościowego. Stała całkowania T_i jest równa wartości czasu, dla którego wartość odpowiedzi skokowej członu całkującego jest równa amplitudzie wymuszenia. Podstawowe charakterystyki członu całkującego przedstawiono na rysunku 4.12.



Rys. 4.12. Charakterystyki członu całkującego

Odpowiedź impulsowa $g(t)$ i skokowa $h(t)$ są określone wzorami:

$$g(t) = K \cdot 1(t), \quad h(t) = K \cdot t \cdot 1(t) \quad (4.98)$$

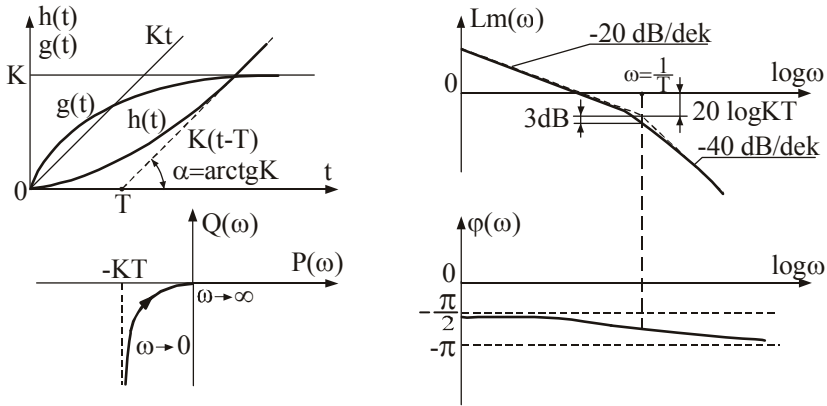
Charakterystyka amplitudowo-fazowa pokrywa się z ujemną półosią urojoną. Charakterystyka amplitudowa jest linią prostą, o nachyleniu -20 dB/dekade i przecinającą oś 0 dB dla $\omega = K$. Charakterystyka fazowa $\varphi(\omega)$ jest stała i wynosi $-\pi/2$. Przykładami członu całkującego są:

- a) kondensator idealny,
- b) zbiornik cieczy,
- c) siłownik hydrauliczny (przy pominięciu bezwładności obciążenia),
- d) silnik elektryczny (przy pominięciu bezwładności obciążenia).

W rzeczywistości rzadko spotyka się idealne człony całkujące. Można tylko przy pewnych założeniach przyjąć, że niektóre człony zachowują się jak całkujące. Dokładniej takie człony przedstawia się za pomocą całkowania z inercją. Transmiancja członu całkującego z inercją ma postać

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (4.99)$$

gdzie T jest stałą czasową. Podstawowe charakterystyki członu całkującego z inercją zamieszczono na rysunku 4.13.



Rys. 4.13. Charakterystyki członu całkującego z inercją

Odpowiedzi impulsowa $g(t)$ i skokowa $h(t)$ określone są następująco:

$$g(t) = K(1 - e^{-t/T})1(t), \quad h(t) = \left[Kt - KT(1 - e^{-t/T}) \right] 1(t) \quad (4.100)$$

Gdy $t \rightarrow \infty$, to odpowiedź jednostkowa dąży asymptotycznie do prostej o równaniu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = K(t - T) \quad (4.101)$$

Logarymiczna charakterystyka amplitudowa ma postać

$$Lm(\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad (4.102)$$

lub w postaci przybliżonej

$$Lm(\omega) \approx \begin{cases} 20 \log K - 20 \log \omega & \text{dla } \omega \leq 1/T \\ 20 \log K - 20 \log \omega - 20 \log \omega T & \text{dla } \omega > 1/T \end{cases} \quad (4.103)$$

Kąt fazowy zmienia się zgodnie z równaniem

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im} G(j\omega)}{\text{Re} G(j\omega)} = \arctg \frac{1}{\omega T} \quad (4.104)$$

lub

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega T \quad (4.105)$$

Przykładami członów całkujących z inercją są: silnik prądu stałego, siłownik hydrauliczny, przekładnia mechaniczna, przy uwzględnieniu bezwładności obciążenia w równaniach opisujących te elementy.

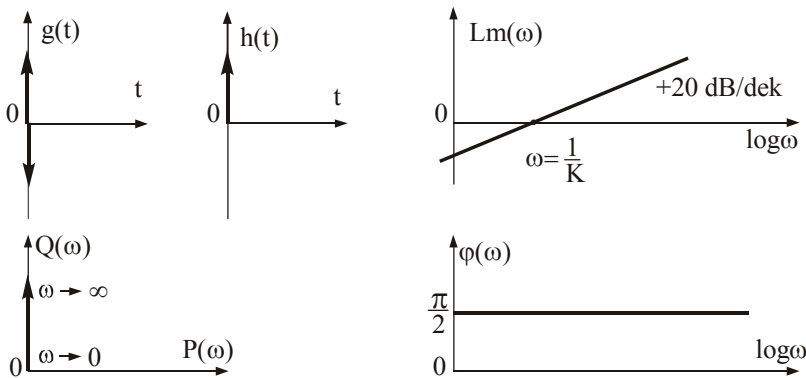
D. Człony różniczkujące

Rozróżnia się człony idealnie różniczkujące i człony różniczkujące z inercją (rzućzywiste). Idealny człon różniczkujący jest opisany następującym równaniem i transmitancją operatorową:

$$y(t) = K \frac{du(t)}{dt}, \quad G(s) = Ks \quad (4.106)$$

przy czym K – współczynnik wzmocnienia, równy stosunkowi amplitudy sygnału wyjściowego do amplitudy pochodnej sygnału wejściowego w stanie ustalonym.

Podstawowe charakterystyki idealnego członu różniczkującego przedstawiono na rysunku 4.14.



Rys. 4.14. Charakterystyki członu idealnie różniczkującego

Odpowiedź impulsowa członu idealnie różniczkującego ma postać

$$g(t) = K \frac{d\delta(t)}{dt} \quad (4.107)$$

przy czym pochodna funkcji $\delta(t)$ jest określona następująco:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ +\infty & \text{dla } t = 0^- \\ -\infty & \text{dla } t = 0^+ \end{cases} \quad (4.108)$$

Odpowiedź jednostkowa wyraża się następująco

$$h(t) = K\delta(t) \quad (4.109)$$

Charakterystyki logarytmiczne opisują zależności:

$$Lm(\omega) = 20\log K + 20\log \omega \quad (4.110)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \quad (4.111)$$

Do elementów idealnie różniczkujących można zaliczyć:

- kondensator idealny (wejście – napięcie, wyjście – prąd),
- idealny tłumik olejowy (wejście – przemieszczenie, wyjście – siła),
- sprężyna idealna (wejście – siła, wyjście – prędkość przemieszczenia),
- prądnica tachometryczna (wejście – obrót wału, wyjście – napięcie).

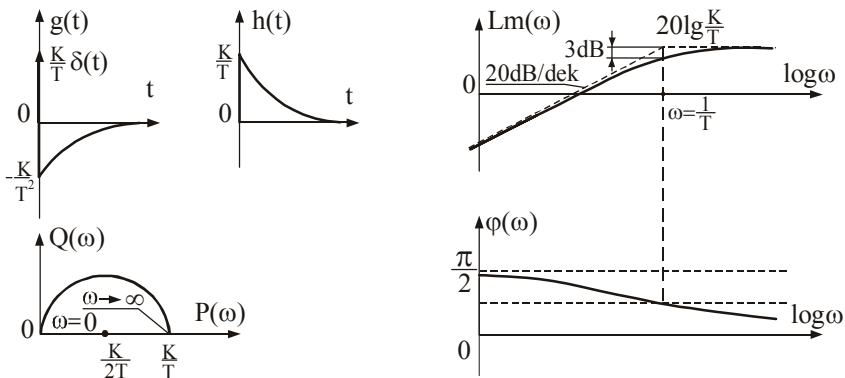
W rzeczywistości nigdy nie udaje się zrealizować członu idealnie różniczkującego, ze względu na występowanie w układach dynamicznych inercji. Dobrym przybliżeniem rzeczywistego układu różniczkującego jest wówczas jego model w postaci członu różniczkującego z inercją, który można przedstawić w formie transmitancji

$$G(s) = \frac{Ks}{Ts + 1} \quad (4.112)$$

Odpowiedzi impulsowa $g(t)$ i jednostkowa $h(t)$ członu różniczkującego z inercją są określone następująco:

$$g(t) = \frac{K}{T}\delta(t) - \frac{K}{T^2}e^{-t/T}1(t), \quad h(t) = \frac{K}{T}e^{-t/T}1(t) \quad (4.113)$$

Podstawowe charakterystyki tego członu zamieszczono na rysunku 4.15.



Rys. 4.15. Charakterystyki członu różniczkującego z inercją

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa

$$Lm(\omega) = 20 \log K\omega - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad (4.114)$$

lub w postaci przybliżonej

$$Lm(\omega) = \begin{cases} 20 \log K + 20 \log \omega & \text{dla } \omega \leq 1/T \\ 20 \log \frac{K}{T} & \text{dla } \omega > 1/T \end{cases} \quad (4.115)$$

Przesunięcie fazowe jest następujące

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T \quad (4.116)$$

Wśród elementów różniczkujących z inercją wymienia się:

- czwórnik RC (wejście – napięcie wejściowe, wyjście – napięcie na rezystorze R),
- czwórnik RL (wejście – napięcie wejściowe, wyjście – napięcie na indukcyjności L),
- silnik prądu stałego jako pojemność dynamiczna (wejście – napięcie, wyjście – napięcie),
- transformator stabilizujący (wejście – napięcie wejściowe, wyjście – napięcie wyjściowe w stanie jałowym),
- tłumik olejowy (wejście – przemieszczenie, wyjście – siła).

E. Człony drugiego rzędu

Transmitancja członu drugiego rzędu ma postać

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (4.117)$$

gdzie: K – współczynnik wzmocnienia statycznego; T – stała czasowa; ξ – współczynnik tłumienia. Jeżeli współczynnik tłumienia $\xi \geq 1$, to transmitancja (4.117) posiada dwa bieguny rzeczywiste i ujemne. Wtedy człon ten jest nazywany często członem dwuinercyjnym. Dla $\xi > 1$ bieguny są rzeczywiste i różne, a odpowiedź impulsowa $g(t)$ oraz skokowa $h(t)$ wyrażają się zależnościami:

$$g(t) = \frac{K}{2T\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[e^{-\frac{A_1}{T}t} - e^{-\frac{A_2}{T}t} \right] 1(t) \quad (4.118)$$

$$h(t) = K \left[1 - \frac{A_2}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\frac{A_1}{T}t} + \frac{A_1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\frac{A_2}{T}t} \right] 1(t) \quad (4.119)$$

gdzie: $A_1 = \xi - \sqrt{\xi^2 - 1}$; $A_2 = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1}$.

W miarę wzrostu wartości współczynnika tłumienia ξ zanikanie procesu przejściowego jest wolniejsze, a więc wolniejsze jest również ustalanie się odpowiedzi impulsowej i skokowej.

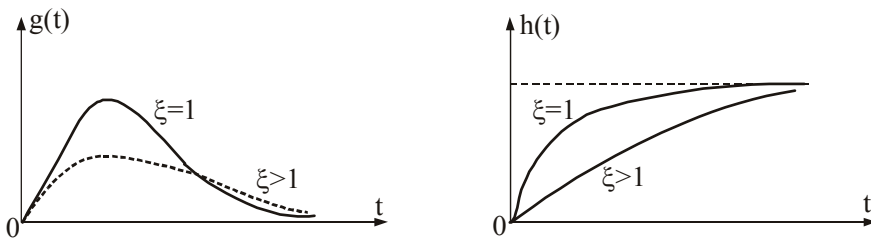
Gdy $\xi = 1$, transmitancja (4.117) sprowadza się do postaci

$$G(s) = \frac{K}{T^2 \left(s + \frac{1}{T} \right)^2} \quad (4.120)$$

i posiada biegun podwójny. Odpowiedź impulsowa $g(t)$ i jednostkowa $h(t)$ wyrażone są następująco:

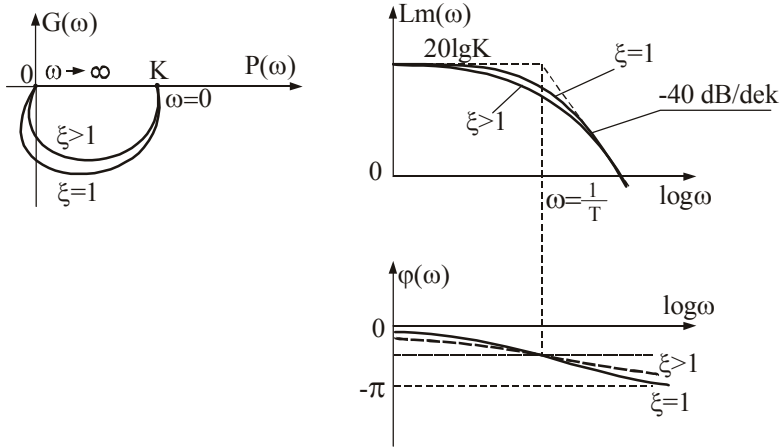
$$g(t) = \left(\frac{Kt}{T^2} e^{-t/T} \right) 1(t), \quad h(t) = K [1 - (1 + t/T) e^{-t/T}] 1(t) \quad (4.121)$$

Na rysunku 4.16 przedstawiono wykresy odpowiedzi $g(t)$ i $h(t)$ w zależności od wartości współczynnika tłumienia ξ .



Rys. 4.16. Odpowiedź impulsowa $g(t)$ i skokowa $h(t)$ członu inercyjnego drugiego rzędu

Charakterystyki logarytmiczne członu inercyjnego drugiego rzędu zamieszczono na rysunku 4.17.



Rys. 4.17. Charakterystyki częstotliwościowe członu inercyjnego drugiego rzędu

Przykładami członu inercyjnego drugiego rzędu są:

- czwórnik RLC o odpowiednio dobranych parametrach,
- dwa czworniki RC połączone kaskadowo i wzajemnie nie obciążające się,
- silnik obcowzbudny prądu stałego, który posiada odpowiednio duży moment bezwładności.

W przypadku gdy $0 < \xi < 1$ transmitancja (4.117) posiada dwa bieguny zespolone sprzężone i człon taki jest nazywany członem oscylacyjnym. Odpowiedzi impulsowa $g(t)$ i skokowa $h(t)$ członu oscylacyjnego mają postać:

$$g(t) = \left(\frac{K}{T\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right) 1(t) \quad (4.122)$$

$$h(t) = K \left[1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] 1(t) \quad (4.123)$$

Przebieg czasowy odpowiedzi skokowej jest oscylacyjny o pulsacji ω_t , co odpowiada częstotliwości

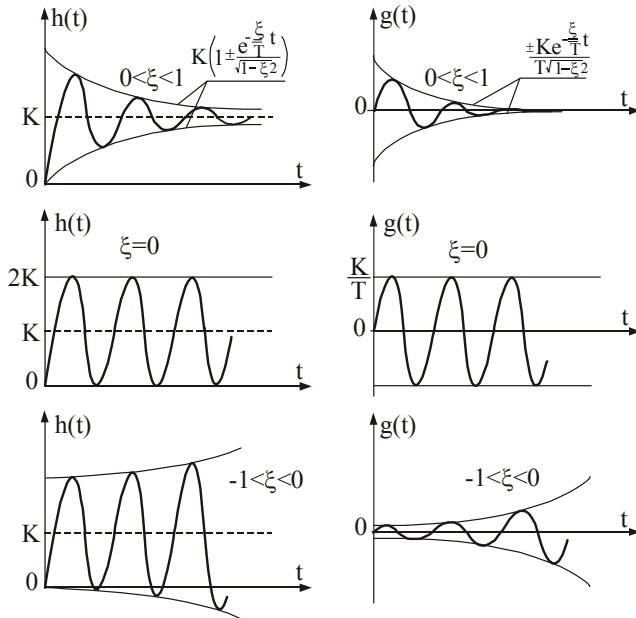
$$f = \frac{\omega_t}{2\pi} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi T}, \quad T = \frac{1}{\omega_n} \quad (4.124)$$

Pulsację $\omega_t = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ nazywa się **pulsacją drgań własnych tłumionych**.

Jeżeli współczynnik tłumienia jest ujemny i wynosi $-1 < \xi < 0$, wtedy części rzeczywiste biegunów transmitancji są dodatnie i układ jest niestabilny. Gdy $\xi = 0$, co odpowiada przypadkowi członu idealnego, w którym nie występują straty energii, to wtedy części rzeczywiste biegunów są równe zero i w odpowiedzi impulsowej oraz skokowej występują oscylacje nietłumione o stałej amplitudzie

$$g(t) = \left(\frac{K}{T} \sin \frac{t}{T} \right) 1(t), \quad h(t) = K \left[1 - \sin \left(\frac{t}{T} + \frac{\pi}{2} \right) \right] 1(t) \quad (4.125)$$

Przebiegi $g(t)$ i $h(t)$ dla różnych wartości ξ przedstawiono na rysunku 4.18.



Rys. 4.18. Odpowiedź skokowa $h(t)$ i impulsowa $g(t)$ członu oscylacyjnego dla różnych przedziałów wartości ξ

Moduł transmitancji widmowej członu oscylacyjnego oraz kąt fazowy odpowiednio wynoszą

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}} \quad (4.126)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{-2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2} \quad (4.127)$$

Dla stałych wartości K i T wykres modułu w funkcji pulsacji ω zależy od współczynnika tłumienia ξ . Przyrównując do zera pierwszą pochodną $|G(j\omega)|$ względem ω i sprawdzając znak drugiej pochodnej, można wyznaczyć pulsację ω_r , zwaną **pulsacją rezonansową**

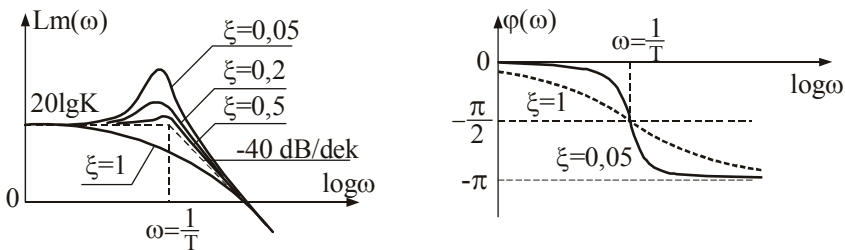
$$\omega_r = \frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{T} = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \quad (4.128)$$

dla której moduł $|G(j\omega)|$ osiąga wartość maksymalną M

$$M = \max |G(j\omega)| = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (4.129)$$

Pulsacje ω_r , ω_t i ω_n związane są nierównością $\omega_r \leq \omega_t \leq \omega_n$, która przechodzi w równość dla $\xi = 0$.

Wykres logarytmicznej charakterystyki amplitudowej zamieszczono na rysunku 4.19. Charakterystyka fazowa $\varphi(\omega)$ jest kształtem zbliżona do charakterystyki przedstawionej na rysunku 4.17.



Rys. 4.19. Charakterystyki logarytmiczne członu oscylacyjnego

Przykładem członu oscylacyjnego jest:

- czwórnik RLC (wejscie – napięcie, wyjście – napięcie na pojemności C),
- masa ze sprężyną i tłumikiem (wejscie – siła, wyjście – przemieszczenie masy),
- silnik prądu stałego przy uwzględnieniu indukcyjności obwodu twornika (wejscie – napięcie zasilające, wyjście – prędkość kątowna wału).

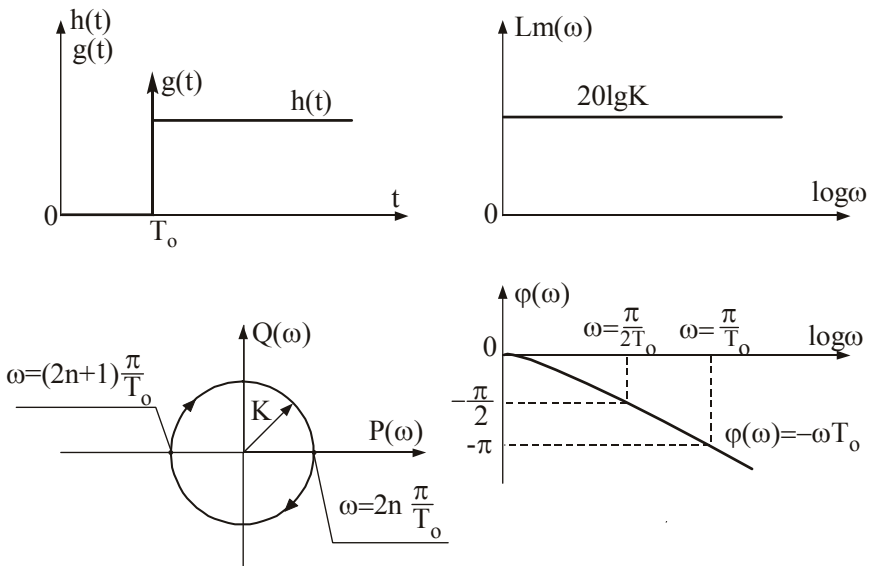
F. Człon opóźniający

Transmitancja członu opóźniającego ma postać

$$G(s) = K e^{-sT_o} \quad (4.130)$$

przy czym T_o jest czasem opóźnienia.

Charakterystyki członu opóźniającego zamieszczono na rysunku 4.20.



Rys. 4.20. Charakterystyki członu opóźniającego

Odpowiedzi impulsowa $g(t)$ i skokowa $h(t)$

$$g(t) = K \cdot \delta(t - T_o), \quad h(t) = K \cdot 1(t - T_o) \quad (4.131)$$

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa

$$Lm(\omega) = 20 \log K \quad (4.132)$$

oraz fazowa

$$\varphi(\omega) = -\omega T_o \quad (4.133)$$

Przykładem członu opóźniającego może być linia długa, przenośnik taśmowy, rurociąg itp.

4.3.2. Wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych

Analiza układów liniowych za pomocą metod częstotliwościowych wymaga wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych. Problemy związane z eksperymentalnym wyznaczaniem charakterystyk częstotliwościowych omówiono w rozdziale 3.6.3. Obecnie przedstawi się zagadnienie wyznaczania tych charakterystyk w przypadku, gdy znana jest postać transmitancji układu.

Ogólne zasady wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych dla danej transmitancji układu przedstawiono w rozdziale 3.6.1. Obecnie, biorąc pod uwagę możliwość wykorzystania techniki komputerowej, wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych nie stanowi problemu. Często jednak dla pobieżnej oceny ich przebiegu wyznacza się je odręcznie (bez wspomaganie komputerowego). Zadanie ręcznego wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych można uprościć, a mianowicie transmitancję układu potraktować jako szeregowe połączenie członów podstawowych i dla każdego z nich wyznaczyć charakterystyki asymptotyczne. Złożenie tych charakterystyk daje charakterystyki wypadkowe układu.

Przykład 4.8

Wyznaczyć logarytmiczne charakterystyki dla układu o danej transmitancji

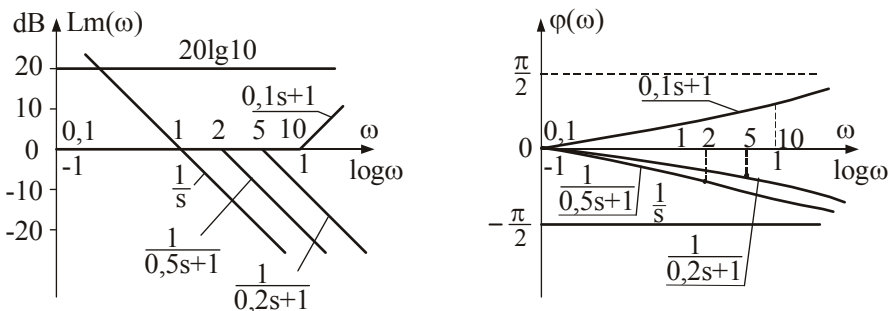
$$G(s) = \frac{2(s+10)}{s(s+2)(0,2s+1)} \quad (4.134)$$

Rozwiązanie

Dla ułatwienia wyznaczania charakterystyk asymptotycznych transmitancję $G(s)$ przekształcono do postaci

$$G(s) = \frac{2 \cdot 10 \left(\frac{1}{10} s + 1 \right)}{2s \left(\frac{1}{2} s + 1 \right) (0,2s + 1)} = 10 \frac{1}{s} \left(\frac{1}{10} s + 1 \right) \left(\frac{1}{0,5s + 1} \right) \left(\frac{1}{0,2s + 1} \right) \quad (4.135)$$

Pulsacje załamania poszczególnych członów dynamicznych wynoszą kolejno: 1, 10, 2 i 5. Logarytmiczne charakterystyki asymptotyczne przedstawiono na rysunku 4.21.



Rys. 4.21. Logarytmiczne charakterystyki asymptotyczne

Charakterystyki wypadkowe można otrzymać po zsumowaniu składowych charakterystyk asymptotycznych.

4.4. Metody przestrzeni stanów

4.4.1. Wprowadzenie

W rozdziale 3 stwierdzono, że w analizie i syntezie układów dynamicznych bardziej użyteczne – dające wgląd w wewnętrzną strukturę układu – jest pojęcie stanu układu oraz jego opis za pomocą równań stanu. Ogólna postać równań stanu jest następująca

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.136)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (4.137)$$

Można wykazać [19], że istnieje **jednoznaczność** rozwiązania równań stanu dla danego warunku początkowego $\mathbf{x}(t_0)$, natomiast – **niejednoznaczność** wyboru zmiennych stanu. Dla celów programowania komputerowego najczęściej wybiera się zmienne stanu w taki sposób, aby macierze w równaniach stanu zawierały wyłącznie elementy rzeczywiste. Również w przypadku dokonywania analizy teoretycznej, mającej na celu wykrycie pewnych istotnych własności układu, wygodniej jest sprowadzić jego równania – poprzez odpowiednie transformacje liniowe – do postaci, zawierającej wyłącznie elementy rzeczywiste.

Istotnym problemem zarówno w analizie, jak i w syntezie układów sterowania jest właściwy wybór zmiennych stanu. Zmienne stanu powinny być tak dobrane, o ile jest to możliwe, aby reprezentowały rzeczywiste sygnały występujące w układzie. Nieraz jednak okazuje się, że inny sposób doboru zmiennych stanu może okazać się bardziej dogodny ze względu na badanie właściwości dynamicznych, z powodu stosowania mniej skomplikowanych operacji przy analizie tych układów.

Metody przestrzeni stanów pozwalają:

- sformalizować zapis modelu matematycznego poprzez stosowanie równań wektorowo-macierzowych, umożliwiając analizę nawet bardzo złożonych systemów za pomocą prostych reguł rachunku macierzowego,
- łatwo uwzględnić warunki początkowe,
- opisać układ także wtedy, gdy opis za pomocą transmitancji jest niewystarczający, niemożliwy lub fałszywy,
- łatwo opisać obiekty niestacjonarne i nieliniowe.

4.4.2. Przedstawienie ciągłych układów sterowania w przestrzeni stanów

Opis układu sterowania za pomocą równań wektorowo-macierzowych otrzymuje się najczęściej drogą modelowania matematycznego. Często jednak wyjściowy model matematyczny jest w postaci skalarnej równania różniczkowego lub transmitancji, a dalsze rozważania wymagają zapisu wektorowo-macierzowego. Poniżej zostanie przedstawiony zapis układu w przestrzeni stanów, gdy jego model matematyczny jest dany w postaci transmitancji.

A. Transmitancja bez zer

Transmitancja nie posiadająca zer ma postać

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (4.138)$$

Transmitancji (4.138) odpowiada równanie różniczkowe

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t) \quad (4.139)$$

W tym przypadku można dokonać wyboru fazowych zmiennych stanu, przyjmując:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) & \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) & \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = x_3(t) \end{aligned} \quad (4.140)$$

$$\begin{aligned} \dots & \dots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) & \dot{x}_n(t) &= y^{(n)}(t) = \\ & & &= b_0u(t) - a_0y(t) - a_1\dot{y}(t) + \dots - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) = \\ & & &= b_0u(t) - a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + \dots - a_{n-1}x_n(t) \end{aligned}$$

Równania (4.140) zapisano w postaci macierzowej:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (4.141)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \quad (4.142)$$

gdzie:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad D \equiv 0$$

B. Transmitancja posiadająca zera

Obecnie zostanie przeanalizowany ogólniejszy przypadek układu dynamicznego, którego transmitancja zawiera zera i bieguny

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4.143)$$

Rozróżnione zostaną dwa przypadki, tj. $m < n$ i $m = n$. Przypadek $m > n$ nie jest realizowalny fizycznie.

1. Przypadek $m < n$. Układ ten można opisać za pomocą zmiennych fazowych, po uprzednim zastąpieniu transmitancji (4.143) iloczynem

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) \quad (4.144)$$

w którym:

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4.145)$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0 \quad (4.146)$$

Wyboru zmiennych dla części opisanej transmitancją (4.145) dokonuje się identycznie, jak w przypadku transmitancji (4.138), a więc:

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}(t), \quad \dots, \quad x_n(t) = x^{(n-1)}(t) \quad (4.147)$$

i równanie stanu ma postać (patrz (4.141))

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.148)$$

Natomiast sygnał wyjściowy $y(t)$ nie jest teraz równy $x_1(t)$, gdyż na podstawie równań (4.146) i (4.147) obowiązuje zależność

$$y(t) = b_m x_{m+1}(t) + \dots + b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t) \quad (4.149)$$

stąd równanie wyjścia

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (4.150)$$

przy czym

$$\mathbf{C} = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (4.151)$$

Opis układów jednowymiarowych przy zastosowaniu zmiennych fazowych umożliwia uzyskanie postaci równania stanu, w której macierz \mathbf{A} jest nazywana **macierzą Frobeniusa**.

2. Przypadek $m = n$. W tym przypadku transmitancja układu ma postać

$$G(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4.152)$$

Jednym ze sposobów zapisu transmitancji (4.152) w przestrzeni stanów jest wydzielenie licznika przez mianownik tej transmitancji, w wyniku czego uzyska się

$$G(s) = b_n + G_1(s) \quad (4.153)$$

Transmitancja $G_1(s)$ spełnia warunek $m < n$ i można ją zapisać w przestrzeni stanów jedną z uprzednio podanych metod, przy czym współczynnik $b_n \equiv D$.

Transmitancję spełniającą warunek B można zapisać zgodnie z zasadami podanej dla transmitancji spełniającej warunek A. Problem ten zostanie pokazany na przykładzie.

Przykład 4.9

Zapisać podaną transmitancję w postaci równań stanu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 5s + 10}{s^2 + 3s + 6} \quad (4.154)$$

Rozwiązanie

Zgodnie z równaniem (4.145)

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 6} \quad (4.155)$$

a stąd

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 6x(t) = u(t) \quad (4.156)$$

oraz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Z kolei transmitancja $G_2(s)$ wyraża się następująco

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = s^2 + 5s + 10 \quad (4.157)$$

oraz odpowiadające jej równanie różniczkowe

$$y(t) = \ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 10x(t) \quad (4.158)$$

Uwzględniając, że

$$\ddot{x}(t) = -3\dot{x}(t) - 6x(t) + u(t) \quad (4.159)$$

równanie (4.158) przyjmie postać

$$y(t) = 2\dot{x}(t) + 4x(t) + u(t) = 4x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \quad (4.160)$$

a stąd

$$C = [4 \quad 2] \quad \text{oraz} \quad D = 1 \quad (4.161)$$

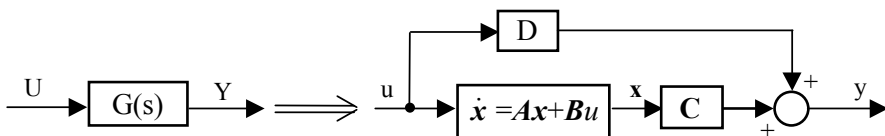
W ogólnym przypadku można zapisać

$$y(t) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]x(t) + b_n u(t) \quad (4.162)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} c_1 &= b_0 - a_0 b_n \\ c_2 &= b_1 - a_1 b_n \\ &\dots \\ c_n &= b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{aligned} \quad (4.163)$$

Na podstawie przeprowadzonych rozważań można zauważyć, że zapis w przestrzeni stanów polega na zastąpieniu równania różniczkowego n -tego rzędu układem n -równań różniczkowych rzędu pierwszego. Interpretację graficzną tego zapisu przedstawia rysunek 4.22.



Rys. 4.22. Struktura układu w przestrzeni stanów

4.4.3. Przedstawienie dyskretnych układów sterowania w przestrzeni stanów

Równanie różnicowe jest często przedstawiane w postaci

$$b_n y(k) + b_{n-1} y(k-1) + \dots + b_0 y(k-n) = f(k) \quad (4.164)$$

Wprowadzając nowe zmienne:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k-n) \\ x_2(k) &= y(k-n+1) \\ \dots & \dots \\ x_n(k) &= y(k-1) \end{aligned} \quad (4.165)$$

a następnie powiększając obustronnie wskaźnik czasu o 1 otrzymano:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= y(k-n+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) &= y(k-n+2) = x_3(k) \\ \dots & \dots \\ x_n(k+1) &= y(k) = \frac{1}{b_n} f(k) - \frac{b_0}{b_n} x_1(k) + \dots - \frac{b_{n-1}}{b_n} x_n(k) \end{aligned} \quad (4.166)$$

Równania (4.166) zapisano w postaci wektorowo-macierzowej, przy czym:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{b_0}{b_n} & -\frac{b_1}{b_n} & -\frac{b_2}{b_n} & \dots & -\frac{b_{n-1}}{b_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{b_n} \end{bmatrix}$$

Obecnie zostanie przedstawiony problem zapisu modelu matematycznego w przestrzeni stanów, gdy model ten dany jest w postaci transmitancji dyskretnej

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \frac{L(z)}{M(z)}, \quad n \geq m \quad (4.167)$$

Dzieląc licznik i mianownik transmitancji (4.167) przez z^n otrzymano

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}} = \frac{L(z)}{M(z)} \quad (4.168)$$

Przykład 4.10

Dana jest transmitancja dyskretna

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 2}{z^2 + 1,5z + 0,5} \quad (4.178)$$

Przedstawić układ o danej transmitancji $G(z)$ w przestrzeni stanów.

Rozwiązanie

Dzieląc licznik i mianownik transmitancji dyskretniej $G(z)$ przez z^2 otrzymano

$$G(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}} \quad (4.179)$$

Przyjęto:

$$G_1(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}} \quad (4.180)$$
$$G_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-1} + 2z^{-2}$$

Transmitancjom $G_1(z)$ i $G_2(z)$ odpowiadają równania różnicowe:

$$x(k) + 1,5x(k-1) + 0,5x(k-2) = u(k) \quad (4.181)$$
$$y(k) = x(k-1) + 2x(k-2)$$

Wprowadzając zmienne stanu:

$$x_1(k) = x(k-2) \quad (4.182)$$
$$x_2(k) = x(k-1)$$

otrzymano:

$$x_1(k+1) = x(k-1) = x_2(k) \quad (4.183)$$
$$x_2(k+1) = x(k) = -0,5x_1(k) - 1,5x_2(k) + u(k)$$

oraz

$$y(k) = 2x_1(k) + x_2(k) \quad (4.184)$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & -1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (4.185)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

4.4.4. Rozwiązanie ciągłych równań stanu

Opis liniowych układów dynamicznych w przestrzeni stanów jest formułowany w postaci liniowych wektorowo-macierzowych równań różniczkowych. W analizie układów istotne znaczenie ma uzyskanie rozwiązania tych równań w formie analitycznej, gdyż rozwiązania numeryczne nie dają ogólnego obrazu analizowanych zjawisk. Ponadto dla uzyskania rozwiązania numerycznego równania stanu należy przedstawić w formie dyskretnej, uzyskując w ten sposób równania różnicowe.

A. Odpowiedź układu swobodnego

Jeżeli w chwili początkowej $t = 0$ wektor stanu ma wartość $\mathbf{x}(0)$, a sygnały wymuszające (tj. sterujące i zakłócenia) są tożsamościowo równe zeru, wówczas układ znajduje się w stanie swobodnym i opisany jest tzw. **równaniem ruchu swobodnego**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (4.186)$$

Rozwiązanie równania (4.186) otrzymano po scałkowaniu obu jego stron

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}(\tau) d\tau \quad (4.187)$$

Inną postać rozwiązania $\mathbf{x}(t)$ można uzyskać zapisując równanie (4.186) w postaci

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (4.188)$$

Mnożąc to równanie przez $e^{-\mathbf{A}t}$

$$e^{-\mathbf{A}t} [\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t)] = \mathbf{0} \quad (4.189)$$

a następnie całkując w granicach od 0 do t otrzymano

$$e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) \quad (4.190)$$

a stąd

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)} \quad (4.191)$$

Macierz $e^{\mathbf{A}t}$ ma wymiar $n \times n$ i jest nazywana **macierzą podstawową** układu. Sposoby jej obliczania zostaną przedstawione w dalszej części rozdziału.

B. Odpowiedź układu wymuszonego

Wektorowo-macierzowe równanie różniczkowe układu wymuszonego ma postać

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.192)$$

Przepisując to równanie w formie

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

a następnie mnożąc przez e^{-At} otrzymano

$$e^{-At}[\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-At}\mathbf{x}(t)] = e^{-At}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.193)$$

Całkując ostatnie równanie w granicach od 0 do t

$$e^{-At}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (4.194)$$

a stąd

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau} \quad (4.195)$$

Jeżeli wartość chwili początkowej wynosi t_0 , to

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (4.196)$$

Niekiedy wygodnie jest korzystać z gotowych zależności, określających odpowiedź układu (4.196) dla typowych wymuszeń $\mathbf{u}(t)$. I tak [19]:

1) odpowiedź impulsowa dla $\mathbf{u}(t) = \delta(t)$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\delta(\tau)d\tau = e^{At}\mathbf{x}(0) + e^{At}\mathbf{B} \quad (4.197)$$

2) odpowiedź skokowa dla $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}_0 1(t)$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + [\mathbf{A}^{-1}(e^{At} - \mathbf{I})]\mathbf{B}\mathbf{U}_0 \quad (4.198)$$

3) odpowiedź liniowa dla $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}_1 t 1(t)$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + [\mathbf{A}^{-2}(e^{At} - \mathbf{I}) - \mathbf{A}^{-1}t]\mathbf{B}\mathbf{U}_1 \quad (4.199)$$

Rozwiązanie $\mathbf{x}(t)$ równania stanu zawiera funkcję wykładniczą macierzy e^{At} . Aby otrzymać rozwiązanie w postaci analitycznej, a niekiedy także i numerycznej, należy wyrazić macierz podstawową e^{At} w postaci macierzy kwadratowej. Istnieje kilka

metod obliczania macierzy e^{At} , które stosuje się w zależności od rzędu układu, żądanej dokładności, rodzaju rozwiązania (analitycznego lub numerycznego) itd.

Jedną z metod obliczania macierzy e^{At} jest rozwinięcie jej w szereg potęgowy względem t

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}t^i \quad (4.200)$$

4.4.5. Rozwiązanie dyskretnych równań stanu

Niech będzie dany układ równań różnicowych o stałych współczynnikach

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (4.201)$$

Należy wyznaczyć rozwiązanie układu równań (4.201) dla warunków początkowych

$$\mathbf{x}(k)|_{k=0} = \mathbf{x}_0 \quad (4.202)$$

Z układu równań (4.201), dla $k=0$, po uwzględnieniu warunku początkowego (4.202) otrzymano

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}(0) \quad (4.203)$$

Korzystając z układu równań (4.201) oraz uwzględniając zależność (4.203), można napisać:

– dla $k=1$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = A^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = A^2\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^1 A^{1-i}\mathbf{B}\mathbf{u}(i) \quad (4.204)$$

– dla $k=2$

$$\mathbf{x}(3) = A^3\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^2 A^{2-i}\mathbf{B}\mathbf{u}(i) \quad (4.205)$$

Ogólnie

$$\mathbf{x}(k) = A^k\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(i) \quad (4.206)$$

Wzór (4.206) określa poszukiwane rozwiązanie układu równań różnicowych (4.201), spełniające warunek początkowy (4.202). Pierwsza składowa rozwiązania określa **składową przejściową**, która zależy tylko od warunków początkowych

(4.202). Natomiast druga składowa tego rozwiązania, zależna od wymuszenia $\mathbf{u}(k)$, określa **składową wymuszoną**.

Ze wzoru (4.206) wynika, że rozwiązanie układu równań różnicowych jednorodnych (dla $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \quad (4.207)$$

spełniające warunek początkowy (4.202), ma postać

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 \quad (4.208)$$

Macierz \mathbf{A}^k jest nazywana **macierzą podstawową** rozwiązań układu równań różnicowych. Macierz ta jest odpowiednikiem macierzy podstawowej $\exp(\mathbf{A}t)$ w ciągłych równaniach stanu.

Układ równań (4.201) jest rozwiązywany najczęściej za pomocą komputera, poprzez wyznaczenie wektora $\mathbf{x}(k)$ punkt po punkcie; wówczas nie ma potrzeby wyznaczania macierzy podstawowej \mathbf{A}^k . Przy określaniu wektora stanu $\mathbf{x}(k)$ z zależności (4.206) lub (4.208) zachodzi konieczność wyznaczenia macierzy \mathbf{A}^k .

5. STABILNOŚĆ

5.1. Wprowadzenie

Stabilność jest jedną z podstawowych właściwości, jaką musi wykazywać każdy zastosowany w praktyce układ. Układ regulacji uważa się za **stabilny** wtedy i tylko wtedy, jeśli wielkość wyjściowa, jako odpowiedź na dowolne ograniczone wymuszenie, będzie ograniczona. Warunek ten jest spełniony, jeżeli w układzie występuje tłumienie stanu nieustalonego.

Odpowiedź układu liniowego $y(t)$ na dowolne wymuszenie $u(t)$ zawiera zawsze dwie składowe: składową nieustaloną $y_n(t)$ oraz składową ustaloną $y_u(t)$. Łatwo wykazać, że jeżeli odpowiedź układu na dowolne ograniczone wymuszenie ma być ograniczona, to musi być spełniona równość:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_u(t) \quad (5.1)$$

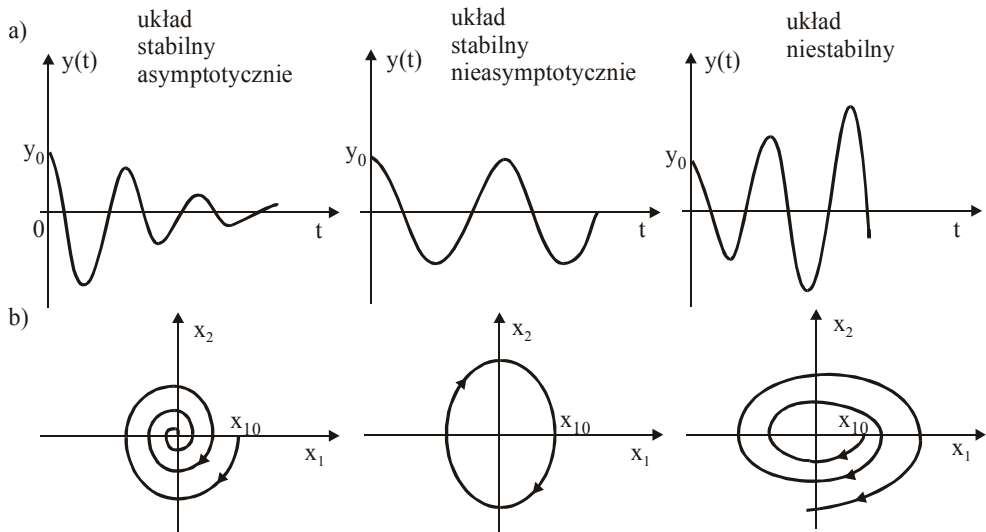
lub

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} y_n(t) = 0} \quad (5.2)$$

Wobec tego, w układzie stabilnym składowa nieustalona wielkości wyjściowej $y(t)$ jest tłumiona i z biegiem czasu zanika, a układ, po ustaniu działania wymuszenia, wraca do stanu, w jakim znajdował się przed zmianą wymuszenia, tzn. do **stanu równowagi**. W przestrzeni stanów stan równowagi jest nazywany **punktem równowagi**.

Jeśli $y_n(t)$ dla $t \rightarrow \infty$ i niezerowego warunku początkowego (lub po zaniknięciu wymuszenia) zdąża do stanu równowagi (lub trajektoria stanu zdąża do punktu równowagi), to układ jest **stabilny asymptotycznie**. Gdy odpowiedź $y_n(t)$ dla $t \rightarrow \infty$ nie zdąża do stanu równowagi, ale jest ograniczona, to układ jest **stabilny nieasymptotycznie** (stabilny w sensie Lapunowa lub znajduje się na granicy stabilności). Natomiast gdy $y_n(t) \rightarrow \infty$ dla $t \rightarrow \infty$, to układ jest **niestabilny**.

W celu zilustrowania różnych przypadków stabilności, na rysunku 5.1 podano przebiegi odpowiedzi $y(t)$ układu swobodnego (rys. 5.1a) oraz odpowiadające im przebiegi trajektorii fazowych (rys. 5.1b), przy czym $x_1 = y$ a $x_2 = \dot{y}$.



Rys. 5.1. Przykłady przebiegów: a) odpowiedzi swobodnych, b) trajektorii fazowych

Analizując rozwiązanie ogólne równania różniczkowego opisującego liniowy układ dynamiczny (patrz podrozdz. 4.1.2) określa się następujące warunki stabilności układu swobodnego:

1. Układ jest **stabilny asymptotycznie**, gdy spełniony zostanie następujący warunek konieczny i dostateczny: wszystkie rzeczywiste pierwiastki równania charakterystycznego (bieguny transmitancji lub wartości własne macierzy stanu) lub wszystkie części rzeczywiste pierwiastków zespolonych muszą być ujemne, czyli pierwiastki te muszą leżeć w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej.
2. Układ jest **stabilny nieasymptotycznie** (stabilny w sensie Lapunowa lub na granicy stabilności), gdy oprócz pierwiastków leżących w lewej półpłaszczyźnie występują:
 - jeden pierwiastek rzeczywisty równy zero,
 - pojedyncze pary pierwiastków urojonych,
 - jeden pierwiastek rzeczywisty równy zero i pojedyncze pary pierwiastków urojonych, tzn. żaden z pierwiastków nie znajduje się w prawej półpłaszczyźnie, natomiast na osi urojonej występują pierwiastki pojedyncze, w tym co najwyżej jeden rzeczywisty równy zero.
3. Układ jest **niestabilny**, jeśli co najmniej jeden pierwiastek znajduje się w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s .

W przypadku gdy układ jest stabilny dla dowolnych warunków początkowych, to jest **stabilny globalnie**. Jeżeli natomiast jest stabilny dla warunków początkowych leżących w pobliżu stanu równowagi, jest wówczas **stabilny lokalnie**.

Stabilny w stanie swobodnym, stacjonarny układ liniowy jest zawsze **stabilny globalnie**, gdyż od wartości warunków początkowych zależą tylko poszczególne stałe całkowania, a nie charakter procesów przejściowych układu. Stabilnością lokalną charakteryzują się układy nieliniowe.

W ogólnym ujęciu można rozróżnić niestabilność **parametryczną** (zależną od wartości parametrów modelu matematycznego), **strukturalną** (nazywaną także nieparametryczną, zależną od struktury modelu matematycznego), a także **numeryczną** (wynikającą ze zbyt dużej wartości okresu całkowania równań różniczkowych).

Stabilność układu liniowego jest podstawowym stawianym mu wymaganiami, gdyż w układzie takim, po przyłożeniu lub odjęciu działania wymuszenia, ustalają się jego warunki pracy. Zwykle stabilność nieasymptotyczna jest niedopuszczalna, gdyż układ pracuje wtedy na granicy stabilności i niewielka zmiana wartości jego parametrów (np. pod wpływem działania otoczenia) może spowodować niestabilność układu. W układach liniowych stan taki praktycznie nie występuje ze względu na ściśle określone położenie biegunów, a więc ma tylko sens teoretyczny.

Można wykazać [20], że wymuszenie zewnętrzne nie zmienia charakteru stabilności lub niestabilności układu liniowego, a zatem układ liniowy poddany wymuszeniu zewnętrznemu stabilny asymptotycznie w stanie swobodnym jest również stabilny asymptotycznie.

Jak już wcześniej stwierdzono, warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności asymptotycznej stacjonarnego, jednowymiarowego układu liniowego jest, żeby wszystkie pierwiastki jego równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej. Chcąc więc określić stabilność układu należy rozwiązać jego równanie charakterystyczne lub ewentualnie wyznaczyć jego odpowiedź swobodną. Rozwiązanie równania charakterystycznego ma zaletę, gdyż pozwala określić położenie pierwiastków, a więc także odległość od granicy stabilności, którą jest oś urojona płaszczyzny zmiennej zespolonej. Obecnie, biorąc pod uwagę powszechność zastosowań techniki komputerowej, a także dostępność odpowiedniego oprogramowania, jest to podstawowa metoda badania stabilności.

Często jednak, dla pobieżnego oszacowania stabilności układu, stosuje się inne metody badania stabilności, np. tzw. kryteria stabilności, pozwalające badać stabilność bez rozwiązywania równania charakterystycznego.

5.2. Algebraiczne kryteria stabilności

Kryteria algebraiczne pozwalają stwierdzić, czy liniowy układ jednowymiarowy jest stabilny asymptotycznie, na podstawie wartości współczynników równania charakterystycznego, bez jego rozwiązywania.

Warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym stabilności asymptotycznej układu jest, aby jego równanie charakterystyczne

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (5.3)$$

miało wszystkie współczynniki a_0, a_1, \dots, a_n jednego znaku i niezerowe. Dowód tego warunku wynika z rozłożenia wielomianu (5.3) na czynniki i po założeniu, że wszystkie pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie, a dla $a_n > 0$ uzyskuje się – po wymnożeniu czynników – wielomian o dodatnich współczynnikach. Ponieważ zmiana znaków wszystkich wyrazów po lewej stronie równania (5.3) nie wpływa na wartości pierwiastków, wystarczy udowodnić, że układ jest stabilny asymptotycznie, gdy wszystkie współczynniki, tj. a_0, a_1, \dots, a_n istnieją i są dodatnie.

Warunki dostateczne, których spełnienie zapewnia stabilność asymptotyczną układu zostały podane m.in. przez Hurwitza.

Kryterium Hurwitza podaje warunki, które powinny być spełnione, aby równanie charakterystyczne układu

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (5.4)$$

miało wyłącznie pierwiastki leżące w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Aby to zachodziło, muszą być spełnione warunki:

- a) spełniony jest warunek konieczny stabilności, tj. wszystkie współczynniki równania (5.4) są większe od zera

$$a_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.5)$$

- b) podwyznaczniki Δ_i , jako minory główne wyznacznika Δ_n , są większe od zera (warunek dostateczny), tj.

$$\Delta_i > 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (5.6)$$

Wyznacznik Δ_n , utworzony ze współczynników równania (5.4), ma n wierszy oraz n kolumn

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

a podwyznaczniki Δ_i mają postać

$$\Delta_1 = a_{n-1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad \dots \text{ itd.} \quad (5.8)$$

Układ znajduje się na granicy stabilności (jest stabilny w sensie Lapunowa lub stabilny nieasymptotycznie), jeżeli współczynnik $a_0 = 0$ (występuje wówczas jednokrotny pierwiastek zerowy) lub jeśli co najmniej jeden z podwyznaczników (5.6) jest równy zero (występują wówczas pierwiastki urojone). Jeżeli nie są spełnione wyżej wymienione warunki, wówczas układ jest niestabilny.

Dla układów niskiego rzędu ($n = 2, 3$ i 4) warunki stabilności (5.5) i (5.6) ulegają znacznemu uproszczeniu, a więc:

- dla $n = 2$ spełnienie warunku (5.5) pociąga za sobą spełnienie warunku (5.6) ($\Delta_1 = a_{n-1} > 0$),
- dla $n = 3$ i $n = 4$ spełnienie warunku (5.5) oraz spełnienie warunku $\Delta_{n-1} > 0$ pociąga za sobą spełnienie pozostałych warunków.

Pracochłonność analizy stabilności metodą Hurwitza rośnie szybko ze wzrostem rzędu n układu. Obliczenia dla $n \geq 6$ stają się pracochłonne i trudno je wykonywać bez pomocy komputerów. Natomiast dla $n \leq 4$ kryterium to stanowi najszybszy sposób badania stabilności układu.

W przypadku niestabilności układu, kryterium Hurwitza nie pozwala określić, ile pierwiastków równania charakterystycznego leży w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s .

Przykład 5.1

Dane jest równanie charakterystyczne układu

$$s^4 + 2s^3 + 8s^2 + 4s + 3 = 0$$

Stosując kryterium Hurwitza należy zbadać stabilność układu.

Rozwiązanie

Wszystkie współczynniki równania charakterystycznego istnieją i są jednego znaku, a więc warunek konieczny stabilności jest spełniony. W celu zbadania warunku dostatecznego należy zbudować wyznacznik Hurwitza, który ma postać

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

Stąd:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 36 > 0 \quad (5.10)$$

i oczywiście

$$\Delta_4 = 3\Delta_3 = 3 \cdot 36 = 108 > 0 \quad (5.11)$$

Warunek dostateczny jest spełniony, czyli wszystkie pierwiastki danego równania są ujemne, względnie mają ujemne części rzeczywiste. Kryterium algebraiczne umożliwia badanie stabilności układu zarówno otwartego, jak i zamkniętego.

5.3. Częstotliwościowe kryteria stabilności

Przedstawione algebraiczne kryteria stabilności mają dwie zasadnicze wady:

- dostarczają jedynie informacji dotyczącej stabilności lub niestabilności układu, pozostawiając kwestię odległości od granicy stabilności w zasadzie otwartą,
- wymagają analitycznego ujęcia transmitancji układu.

W wielu przypadkach uzyskanie opisu właściwości układu w formie równań jest trudne, łatwiej natomiast jest otrzymać informacje o układzie w postaci np. charakterystyk częstotliwościowych. Dla takich układów istnieją metody badania stabilności zwane **kryteriami częstotliwościowymi**. Spośród nich najczęściej jest stosowane kryterium Nyquista. Pozwala ono badać stabilność układu zamkniętego na podstawie przebiegu charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego, którą można wyznaczyć zarówno analitycznie, jak i doświadczalnie. Umożliwia ono także ocenę odległości układu od granicy stabilności. Miarą tej odległości jest tzw. **zapas stabilności**.

5.3.1. Zapas stabilności

Projektując układ sterowania dąży się do tego, aby jego bieguny (wartości własne) były odpowiednio oddalone od granicy stabilności, którą stanowi oś urojona. Oddalenie to daje gwarancję, że przypadkowe zmiany wartości parametrów tego układu nie spowodują jego niestabilności. Jak już wcześniej wspomniano, miarą odległości położenia biegunów od granicy stabilności jest zapas stabilności. Zapas stabilności określa się za pomocą:

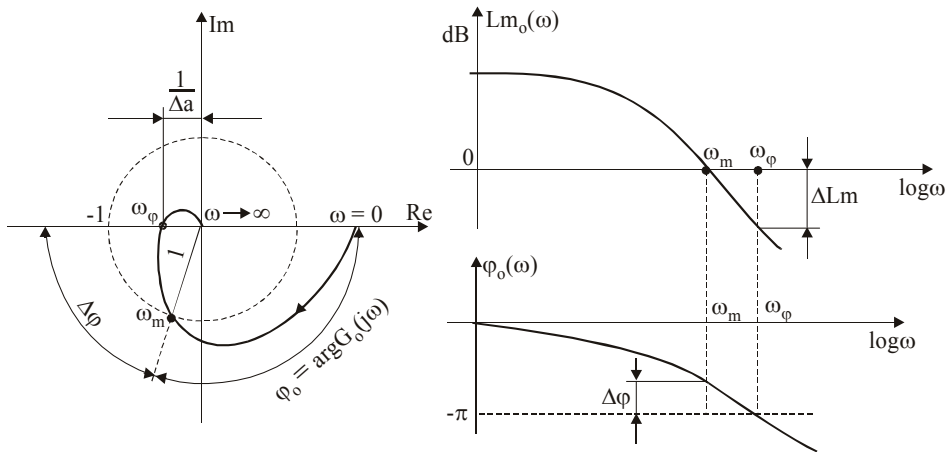
- a) zapasu modułu (wzmocnienia) ΔLm [dB] lub Δa ,
- b) zapasu fazy $\Delta\varphi$.

Zapas modułu ΔLm określa wzmocnienie układu otwartego wyznaczone dla **pulsacji granicznej (odcięcia) fazy** ω_φ , tj. w punkcie, w którym $\arg G_o(j\omega_\varphi) = -\pi$. W przypadku charakterystyk logarytmicznych zapas modułu ΔLm określa się w decybelach, przy czym ujemną wartość tego wzmocnienia traktuje się jako zapas modułu ze znakiem dodatnim.

Zapas fazy $\Delta\varphi$ określa się dla **pulsacji granicznej modułu** ω_m , tj. w punkcie, w którym $|G_o(j\omega_m)| = 1$ (lub 0 dB), a więc

$$\Delta\varphi = 180^\circ + \arg G_o(j\omega_m) \quad (5.12)$$

Zapasy modułu i fazy są zdefiniowane jako dodatnie, gdy układ jest stabilny. Obydwa zapasy znikają jednocześnie, gdy układ osiągnie granicę stabilności. Określenie „zapas” traci swoje pierwotne znaczenie, jeżeli układ jest niestabilny. Interpretację zapasów stabilności przedstawiono na rysunku 5.2.



Rys. 5.2. Interpretacja zapasu stabilności

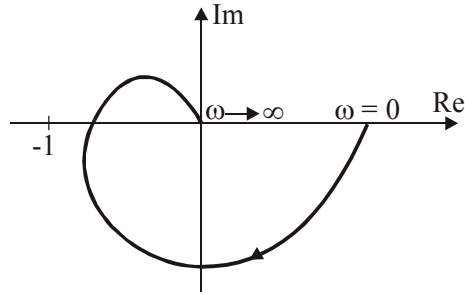
5.3.2. Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista pozwala analizować stabilność układu zamkniętego na podstawie charakterystyk częstotliwościowych $G_o(j\omega_m)$ układu otwartego. Poniżej podane zostanie kryterium Nyquista bez podania jego dowodu, który przedstawiono w [22]. Kryterium to dowodzi, że można wnioskować o stabilności układu zamkniętego na podstawie przebiegu charakterystyki $[1+G_o(j\omega)]$ (wyrażenie to jest mianownikiem transmitancji widmowej układu zamkniętego) na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Tę charakterystykę otrzymuje się po przesunięciu charakterystyki amplitudowo-fazowej $G_o(j\omega_m)$ w prawo o odcinek o długości równej jednostce w skali osi odciętych. W związku z tym zamiast rozważać przyrost argumentu charakterystyki $[1+G_o(j\omega)]$ przy zmianie pulsacji ω od 0 do $+\infty$ można badać, czy i w jaki sposób charakterystyka $G_o(j\omega)$ obejmuje punkt $(-1, j0)$. Wynikające z tych rozważań kryterium stabilności podane przez Nyquista formułuje się następująco:

1. Jeżeli układ otwarty jest stabilny asymptotycznie, to układ zamknięty jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej $G_o(j\omega)$ układu otwartego przy zmianie pulsacji ω od 0 do $+\infty$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$, tzn. przyrost argumentu wyrażenia $[1+G_o(j\omega)]$ (wektora poprowadzonego z punktu $(-1, j0)$ do charakterystyki amplitudowo-fazowej) wynosi 0.
2. Jeżeli układ otwarty jest niestabilny i jego transmitancja ma m biegunów w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej (uwzględniając krotności tych biegunów), to układ zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej $G_o(j\omega)$ układu otwartego przy zmianie pulsacji ω od 0 do $+\infty$ obejmuje w kierunku dodatnim (przeciwным do ruchu wskazówek zegara) punkt $(-1, j0)$ $m/2$ razy, tzn. przyrost argumentu wyrażenia $[1+G_o(j\omega)]$ wynosi $m\pi$.

Badanie stabilności układu zamkniętego metodą Nyquista, w przypadku gdy układ otwarty jest niestabilny, wymaga uprzedniego ustalenia liczby biegunów leżących w prawej półpłaszczyźnie.

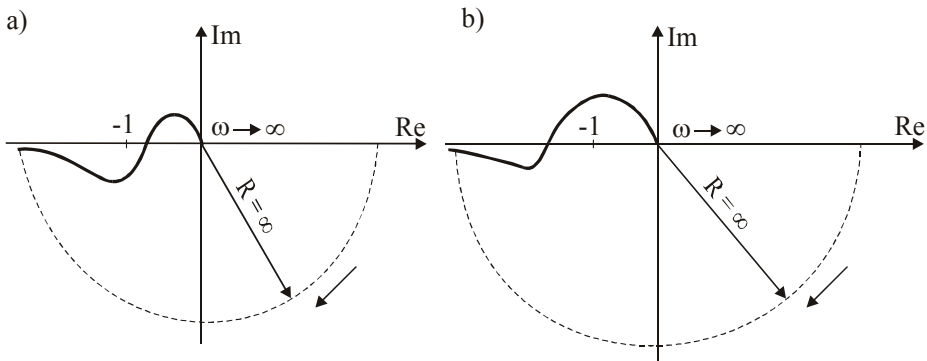
Na rysunku 5.3 przedstawiono przykład charakterystyki amplitudowo-fazowej układu stabilnego.



Rys. 5.3. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu stabilnego

W ogólnym przypadku układ zamknięty o charakterze filtra dolnoprzepustowego jest stabilny asymptotycznie, jeżeli punkt przecięcia charakterystyki układu otwartego z osią rzeczywistą leży na prawo od punktu $(-1, j0)$. Natomiast, gdy punkt ten leży na lewo od punktu $(-1, j0)$, to układ jest niestabilny. Szczególnym przypadkiem jest przecinanie się charakterystyki z osią rzeczywistą w punkcie $(-1, j0)$ – wówczas układ jest na granicy stabilności.

W przypadku gdy równanie charakterystyczne układu otwartego posiada jeden lub więcej pierwiastków zerowych, aby stwierdzić czy układ po zamknięciu będzie stabilny, należy początek charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego połączyć z dodatnią półosią rzeczywistą łukiem o nieskończonej dużej promieniu. Jeżeli punkt $(-1, j0)$ znajduje się na zewnątrz obszaru wyznaczonego przez charakterystykę $G_o(j\omega)$, dodatnią półoś rzeczywistą i łączący je łuk, to układ zamknięty jest stabilny. Na rysunku 5.4 przedstawiono przykładowo taki przypadek dla dwóch pierwiastków zerowych (dwóch członów całkujących połączonych szeregowo).



Rys. 5.4. Charakterystyki amplitudowo-fazowe układu otwartego drugiego rzędu: a) układ zamknięty stabilny, b) układ zamknięty niestabilny

5.3.3. Logarytmiczne kryterium stabilności

Badanie stabilności układu można również przeprowadzić w oparciu o logarytmiczną charakterystykę amplitudową i fazową lub logarytmiczną charakterystykę amplitudowo-fazową. Kryterium stabilności Nyquista brzmi następująco (patrz rys. 5.2):

1. Jeżeli układ otwarty jest stabilny asymptotycznie, to układ zamknięty jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy układ otwarty posiada zapas stabilności, tj. zapas modułu ΔLm i zapas fazy $\Delta\varphi$.
2. Jeżeli układ otwarty jest stabilny asymptotycznie, to układ zamknięty jest stabilny w sensie Lapunowa (na granicy stabilności) wtedy i tylko wtedy, gdy układ otwarty posiada zerowy zapas stabilności.

Zwykle przyjmuje się, że:

$$\Delta\varphi = 30^\circ \div 60^\circ, \quad \Delta Lm = 6 \div 12 \text{ dB} \quad (5.13)$$

Warunki stabilności można przedstawić w innej w postaci, a mianowicie, gdy układ zamknięty jest:

- stabilny asymptotycznie, to

$$\omega_m < \omega_\varphi \quad (5.14)$$

- stabilny w sensie Lapunowa, to

$$\omega_m = \omega_\varphi \quad (5.15)$$

- niestabilny, to

$$\omega_m > \omega_\varphi \quad (5.16)$$

5.4. Stabilność układów dyskretnych

Stabilność układów dyskretnych jest definiowana analogicznie jak dla układów ciągłych. Układ dyskretny jest stabilny, gdy dla $kT \rightarrow \infty$ każdemu ograniczonemu wymuszeniu odpowiada ograniczony sygnał wyjściowy. Inaczej mówiąc, w układzie stabilnym dyskretnie wartości składowych przejściowych są ograniczone dla dowolnej chwili czasu. Jeżeli ponadto te dyskretnie wartości składowych przejściowych $kT \rightarrow \infty$ maleją do zera (są tłumione), to układ taki jest stabilny asymptotycznie.

Dyskretny układ liniowy jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy bieguny z_i transmitancji dyskretnej (lub wartości własne macierzy A) spełniają warunek

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.17)$$

ozn., gdy leżą na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z wewnątrz okręgu o promieniu równym jedności oraz o środku w początku układu współrzędnych.

Jeżeli dla dowolnego i jest spełniony warunek $|z_i| = 1$, to układ jest na granicy stabilności, natomiast dla $|z_i| > 1$ układ jest niestabilny.

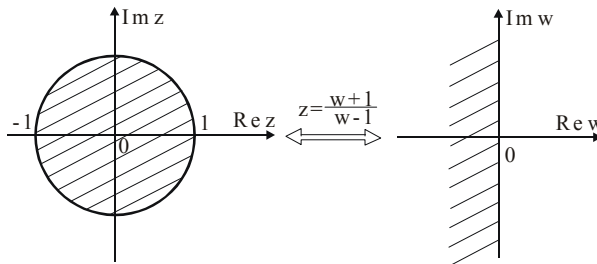
Badanie stabilności układu dyskretnego polega na sprawdzeniu, czy pierwiastki równania charakterystycznego układu leżą wewnątrz koła jednostkowego. Informacje o wartości pierwiastków otrzymuje się w wyniku rozwiązania równania charakterystycznego. Analityczne rozwiązywanie równań charakterystycznych stopnia $n \geq 3$ napotyka na trudności, dlatego wówczas są stosowane metody numeryczne.

W celu oceny stabilności układu dyskretnego są także stosowane algebraiczne kryteria, pozwalające sprawdzić warunek stabilności (5.16) bez rozwiązywania równania charakterystycznego. Analogicznie jak dla układów ciągłych, kryteria stabilności układów dyskretnych umożliwiają ocenę stabilności układu na podstawie współczynników równania charakterystycznego lub na podstawie charakterystyk częstotliwościowych dyskretnego układu otwartego.

Zastosowanie kryteriów stabilności, znanych dla układów ciągłych, jest możliwe w wyniku zastosowania przekształcenia biliniowego

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad \text{lub} \quad z = \frac{1+w}{1-w} \quad (5.18)$$

które odwzorowuje obszar koła jednostkowego (rys. 5.5), na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z , w lewą półpłaszczyznę płaszczyzny zmiennej zespolonej w .



Rys. 5.5. Odwzorowanie koła jednostkowego w lewą półpłaszczyznę

Niech równanie charakterystyczne układu dyskretnego ma postać

$$M(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (5.19)$$

Podstawiając (5.18) do (5.19) otrzymano odwzorowanie wielomianu $M(z)$ w wielomian $N(w)$

$$N(w) = M(z) \Big|_{z=\frac{w+1}{w-1}} = b_n w^n + b_{n-1} w^{n-1} + \dots + b_1 w + b_0 w = 0 \quad (5.20)$$

przy czym do wyznaczania zależności między współczynnikami b_i i a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) można korzystać ze wzoru

$$(a+b)^m = \sum_{i=0}^m \frac{m!}{(m-i)! i!} a^i b^{m-i} \quad (5.21)$$

Z właściwości funkcji (5.18) wynika, że jeżeli równanie (5.20) ma wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie zmiennej w , to równanie (5.19) ma wszystkie pierwiastki wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zmiennej z . Zatem badanie położenia pierwiastków równania (5.19) wewnątrz okręgu jednostkowego sprowadza się do badania położenia pierwiastków równania (5.20) w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej w , a więc do zagadnienia znanego dla układów ciągłych. Do oceny stabilności układu dyskretnego można więc zastosować wszystkie kryteria badania stabilności układów ciągłych.

Przykład 5.2

Stosując kryterium Hurwita, zbadać stabilność układu dyskretnego o transmitancji

$$G(z) = \frac{z^2 + 2z + 2}{z^4 + z^3 - 0,4z^2 - 0,9z - 0,45} \quad (5.22)$$

Rozwiązanie

Podstawiając zależność (5.18) do równania charakterystycznego transmitancji $G(z)$ otrzymano

$$N(w) = \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^4 + \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 0,4\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - 0,9\left(\frac{w+1}{w-1}\right) - 0,45 \quad (5.23)$$

a następnie dokonując odpowiednich przekształceń otrzymano następujące równanie charakterystyczne we współrzędnych w

$$N(w) = b_4 w^4 + b_3 w^3 + b_2 w^2 + b_1 w + b_0 = 0 \quad (5.24)$$

gdzie:

$$b_4 = 0,25, \quad b_3 = 9,6, \quad b_2 = 4,1, \quad b_1 = 6, \quad b_0 = 0,05 \quad (5.25)$$

Warunki konieczne są spełnione, gdyż wszystkie współczynniki równania charakterystycznego (5.24) są dodatnie. Aby sprawdzić warunki dostateczne, należy zbudować wyznacznik Hurwitza $W = W_4$

$$W = W_4 = \begin{vmatrix} b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 \end{vmatrix}$$

$$\text{a stąd: } W_1 = |b_3| = 9,6, \quad W_2 = \begin{vmatrix} b_3 & b_4 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 38,1, \quad W_3 = \begin{vmatrix} b_3 & b_4 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = 224,3$$

$$\text{oraz } W_4 = b_0 \cdot W_3.$$

Podwyznaczniki wyznacznika W są większe od zera, a zatem wszystkie pierwiastki równania (5.24) leżą w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny w . Oznacza to, że wszystkie bieguny transmitancji $G(z)$ leżą wewnątrz okręgu jednostkowego, a więc badany układ jest stabilny asymptotycznie.

Kryterium Nyquista pozwala zbadać stabilność zamkniętego układu dyskretnego na podstawie danej dyskretniej charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego $G_o(j\omega T)$ lub na podstawie danej charakterystyki amplitudowo-fazowej $G_o(j\omega)$, na płaszczyźnie zmiennej w . Jest ono sformułowane następująco [1], [12]:

1. Jeżeli dyskretny układ otwarty jest stabilny, to układ zamknięty jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy dyskretna charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego $G_o(j\omega T)$ dla $0 < \omega T < \pi$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$, tzn. gdy przyrost argumentu wyrażenia $1 + G_o(j\omega T)$ (wektora poprowadzonego z punktu $(-1, j0)$ do charakterystyki amplitudowo-fazowej) dla $0 < \omega T < \pi$ wynosi zero

$$\Delta \arg_{0 < \omega T < \pi} [1 + G_o(j\omega T)] = 0 \quad (5.26)$$

2. Jeżeli dyskretny układ otwarty jest niestabilny i równanie charakterystyczne układu otwartego ma m pierwiastków na zewnątrz koła jednostkowego (a pozostałych $n-m$ wewnątrz koła), to układ zamknięty jest stabilny asymptotycznie, wtedy i tylko wtedy, gdy dyskretna charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego $G_o(j\omega T)$ dla $0 < \omega T < \pi$ obejmuje w kierunku dodatnim (przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) $m/2$ razy punkt $(-1, j0)$, tzn. gdy

$$\Delta \arg [1 + G_o(j\omega T)] = m\pi \quad (5.27)$$

$$0 < \omega T < \pi$$

Z przedstawionych twierdzeń wynika, że badanie stabilności układów dyskretnych metodą Nyquista przeprowadza się podobnie do układów ciągłych. Szczególnie dotyczy to badania stabilności w oparciu o charakterystyki amplitudowo-fazowe oraz logarytmiczne charakterystyki amplitudowe i fazowe na płaszczyźnie w . Należy jednak pamiętać, że charakterystyki częstotliwościowe układów dyskretnych mają zwykle inny kształt niż charakterystyki odpowiednich układów ciągłych.

6. SYNTEZA UKŁADÓW LINIOWYCH

6.1. Wprowadzenie

Projektując układ należy podjąć szereg decyzji, dotyczących struktury i parametrów układu, a także dokonać wyboru określonych członów lub określić warunki pracy dla tych członów. Zespół tych decyzji powinien gwarantować wykonanie przez układ postawionego zadania sterowania w sposób technicznie optymalny, z uwzględnieniem prostoty, niezawodności i kosztu przyjętego rozwiązania. **Projektowanie** jest więc pojęciem szerszym niż **synteza**, która jest rozważana wyłącznie w kategoriach dynamiki układu (dokładność dynamiczna, zapas stabilności, charakter lub czas trwania procesu przejściowego itp.). Projektowanie obejmuje, oprócz syntezy, także rozważania dotyczące problemu sprzęgnięcia części sterującej z obiektem, instalacją układów pomiarowych, zasilania w energię itd.

Rozwiązując zadanie syntezy należy więc dysponować następującymi danymi:

- a) modelem matematycznym obiektu (lub wielkościami charakteryzującymi pośrednio jego dynamikę),
- b) celem sterowania,
- c) informacjami o ograniczeniach sygnałów występujących w układzie,
- d) wskaźnikiem jakości,
- e) założeniami o typie algorytmu regulacji.

Model matematyczny układu oraz cel sterowania stanowią **zadanie sterowania**. Zadanie to ze względu na istniejące ograniczenia sygnałów lub struktury układu oraz występowanie zakłóceń może być zrealizowane ze skończoną dokładnością. Miarą oceny jakości uzyskanego rozwiązania zadania jest wskaźnik jakości. Jeżeli dla zadania sterowania poszukuje się rozwiązania najlepszego ze względu na przyjęty wskaźnik, to mówi się wówczas o rozwiązaniu **optymalnym** ze względu na dany wskaźnik.

Sformułowanie wymagań dla układu sterowania może być różnorodne i zależy od opisu właściwości układu oraz od rodzaju układu (np. układ stabilizacji, nadążny itd.). W przypadku układu stabilizacji istotne jest zachowanie odpowiedniej dokładności statycznej, natomiast w przypadku układu nadążnego – dokładności statycznej i dynamicznej. W ogólnym przypadku wymagania odnosi się do spełnienia przyjętego kryterium jakości sterowania. Często żąda się jednoczesnego spełnienia kilku wymagań (np. dotyczących czasu regulacji, pasma roboczego

i dokładności statycznej), które niekiedy mogą być sprzeczne. Wówczas rozwiązanie zadania jest kompromisem między poszczególnymi wymaganiami. Wygodnie jest wtedy stosować całkowite wskaźniki jakości.

6.2. Regulatory

Wiele układów regulacji automatycznej można realizować przy użyciu typowych regulatorów, dobieranych stosownie do warunków pracy tych układów i stawianych im wymagań. **Regulatorem** nazywa się urządzenie, które wytwarza sygnał sterujący procesem technologicznym (obiektom sterowania) w sposób zapewniający przebieg procesu zgodny z przebiegiem pożądanym. W regulatorze następuje:

- porównanie aktualnej wartości wielkości regulowanej z wartością wielkości zadanej (określenie wartości uchybu regulacji),
- wytworzenie sygnału wyjściowego o wartości zależnej od wartości uchybu regulacji, czasu występowania uchybu regulacji i prędkości jego zmian.

Sygnał wyjściowy regulatora powinien posiadać moc i postać umożliwiającą uruchomienie urządzeń wykonawczych. Ponieważ moc sygnału wyjściowa regulatora jest zwykle niewielka, w układzie sterowania stosuje się urządzenia pośredniczące, często nazywane sprzęgającymi.

6.2.1. Regulatory analogowe

Regulatory analogowe są stosowane w układach sterowania zbudowanych w poprzednich latach, gdyż obecnie nie są już produkowane. Z tego powodu regulatory te zostaną omówione w stopniu umożliwiającym zrozumienie ich wpływu na właściwości układu, albowiem łatwiej ten wpływ jest wyjaśnić na bazie teorii układów ciągłych. Ponadto przy spełnieniu pewnych warunków do syntezy układu sterowania można zastosować teorię układów ciągłych, a układ zrealizować w technice mikroprocesorowej. Problem ten zostanie szerzej przedstawiony w dalszej części rozdziału.

Sygnał wartości zadanej w regulatorze analogowym jest wytwarzany z reguły przez tzw. **nadajnik wartości zadanej**. Nadajnik wartości zadanej jest częścią **stacyjki sterowania ręcznego**, stanowiącej wydzielony zespół regulatora. Podstawowymi rodzajami pracy regulatora są: „praca automatyczna” (sterowanie obiektem za pomocą sygnału wyjściowego regulatora) i „praca ręczna” (sterowanie obiektem za pomocą sygnału wyjściowego nadajnika z udziałem operatora).

Istnieje kilka kryteriów podziału regulatorów analogowych. Przy klasyfikacji według postaci sygnału wyjściowego wyróżnia się regulatory: o wyjściu ciągłym, regulatory dyskretne oraz regulatory dwu- i trójpołożeniowe. Jednym z ważniejszych kryteriów podziału jest podział według właściwości dynamicznych regulatora, czyli według rodzaju zależności pomiędzy wartością sygnału wyjściowego regulatora a wartością sygnału wejściowego. Według tego kryterium rozróżnia się regulatory: proporcjonalne (P), całkujące (I), proporcjonalno-całkujące (PI), proporcjonalno-różniczkujące (PD) i proporcjonalno-całkująco-różniczkujące (PID).

A. Regulator typu P (proporcjonalny)

Regulator typu P charakteryzuje się tym, że jego sygnał wyjściowy $u(t)$ jest proporcjonalny do wejściowego $e(t)$, tj. uchybu regulacji, przy założeniu, że regulator jest umiejscowiony w torze głównym

$$u(t) = k_p e(t), \quad G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p \quad (6.1)$$

przy czym k_p jest współczynnikiem wzmocnienia (proporcjonalności). Regulator ten ma własności członu proporcjonalnego, który omówiono w rozdziale 4.3. Praktycznie mógłby nim być odpowiednio dobrany wzmacniacz bezinercyjny o współczynniku wzmocnienia k_p . Jednak takie proste rozwiązanie (ze wzmacniaczem włączonym bezpośrednio w tor główny układu regulacji) ma zasadniczą wadę. Wynika ona z tego, że występująca przy praktycznej realizacji wzmacniacza nieliniowość jego charakterystyk, a także wrażliwość na zmiany niektórych parametrów powodują, że współczynnik wzmocnienia nie jest stały. W celu wyeliminowania lub odpowiedniego zmniejszenia wpływu tych zjawisk na pracę układu i uzyskania możliwie stałego współczynnika k_p realizuje się regulatory typu P obejmując wzmacniacz elektroniczny o dużym wzmocnieniu k_p ujemnym sprzężeniem zwrotnym o wzmocnieniu $1/k_p$.

Regulator P stosuje się w układach regulacji statycznej (astatycznej zerowego rzędu). Jego działanie zapewnia realizację elementarnego celu regulacji, tj. zmniejszenie uchybu regulacji. Jednak wzrost wzmocnienia k_p zmniejsza istotnie zapas stabilności (wynika to z analizy charakterystyk częstotliwościowych układu otwartego), dając w zamian tylko pewne poszerzenie pasma roboczego (wzrost pulsacji granicznej modułu ω_m) i zmniejszenie uchybu ustalonego.

B. Regulator typu I (całkujący)

Równanie i transmitancja regulatora typu I mają postać

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad G(s) = \frac{k_p}{s} = \frac{1}{sT_i}, \quad T_i = \frac{1}{k_p} \quad (6.2)$$

gdzie: k_p – współczynnik wzmocnienia; T_i – jest to czas, po upływie którego amplituda odpowiedzi skokowej jest równa amplitudzie wymuszającego sygnału skokowego. Podaną postać transmitancji regulatora I można przyjąć wówczas, gdy możliwe jest pominięcie jego inercji. W pierwszym przypadku stosuje się model matematyczny regulatora w postaci rzeczywistego członu całkującego. Charakterystyki idealnego i rzeczywistego członu całkującego przedstawiono w rozdziale 4.3.1.

Analizując charakterystyki częstotliwościowe można zauważyć, że regulator typu I oddziałuje na układ głównie w zakresie małych pulsacji, co podnosi efekt astatyizmu. Samo działanie całkujące jest rzadko stosowane, gdyż wprawdzie w zakresie małych pulsacji wzmocnienie układu otwartego wzrasta znacznie (zwiększa się rząd astatyizmu o 1), ale w zakresie dużych pulsacji następuje duże zmniejszenie wzmocnienia. Spadek wartości tego wzmocnienia powoduje zmniejszenie pasma przenoszenia układu, a tym samym zmniejszenie prędkości działania układu (wolniej zanikają procesy przejściowe, czyli wydłuża się czas regulacji). Nie bez znaczenia jest również przesunięcie fazowe równe $-\pi/2$, które powoduje przesunięcie w lewo pulsacji granicznej fazy ω_φ (patrz rys. 5.2), a tym samym pogorszenie warunków stabilności.

C. Regulator typu PI (proporcjonalno-całkujący)

W regulatorze typu PI sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do sumy sygnału wejściowego i jego całki, co można zapisać w postaci

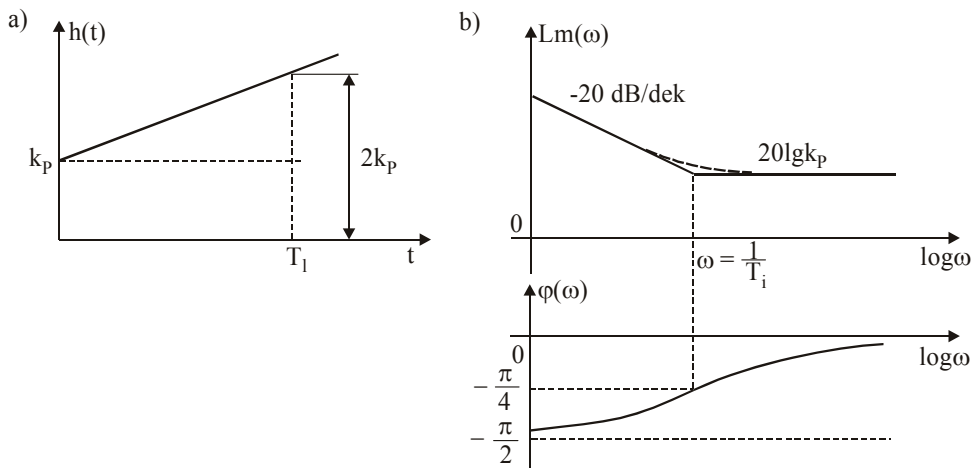
$$u(t) = k_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right), \quad G(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (6.3)$$

przy czym T_i jest nazywane **czasem zdwojenia** regulatora.

W tym przypadku czas zdwojenia T_i wyraża intensywność działania całkującego; jest to czas potrzebny na to, aby przy wymuszeniu skokowym składowa sygnału wyjściowego regulatora, będąca rezultatem działania całkującego, stała się równa składowej sygnału wyjściowego z części proporcjonalnej regulatora.

Tym samym sygnał łączny po czasie T_i staje się dwukrotnie większy i stąd pochodzi nazwa **czas zdwojenia**.

Na rysunku 6.1 zamieszczono charakterystykę skokową oraz charakterystyki częstotliwościowe regulatora PI. Widoczne jest, że regulator PI ma zalety regulatora I, tzn. zwiększa rząd astatyzmu o 1, nie mając jego wad, polegających na wprowadzeniu ujemnego przesunięcia fazy i ograniczeniu roboczego pasma częstotliwości (dla większych pulsacji regulator typu PI zachowuje się jak regulator typu P). Zatem można poprawić właściwości statyczne układu bez pogorszenia warunków stabilności. Pogarsza się przy tym jednak właściwości dynamiczne, w wyniku wydłużenia się czasu regulacji.



Rys. 6.1. Charakterystyki regulatora typu PI: a) skokowa, b) częstotliwościowe

D. Regulator typu PD (proporcjonalno-różniczkujący)

W idealnym regulatorze typu PD sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do sumy sygnału wejściowego i pochodnej tego sygnału

$$u(t) = k_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right), \quad G(s) = k_p (1 + T_d s) \quad (6.4)$$

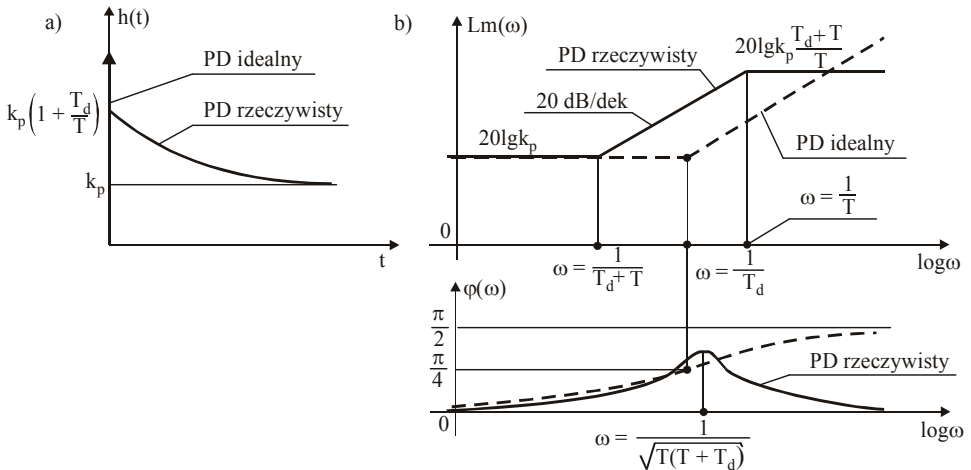
Stała T_d jest nazywana **czasem wyprzedzenia** i określa działanie różniczkujące regulatora. Jej nazwa jest uzasadniona efektami ekstrapolacyjnymi, osiąganymi w układzie regulacji przez wprowadzenie pochodnej. Działanie różniczkujące umożliwia silne reagowanie regulatora już na małe zmiany amplitudy sygnału wej-

ściowego $e(t)$, w związku z dużą wartością pochodnej tego sygnału. Jeżeli szybkość zmian sygnału $e(t)$ jest duża, regulator „uprzedza” spodziewany dalszy wzrost tego sygnału przez odpowiednie oddziaływanie na obiekt regulacji. Wartość liczbowa T_d można zdefiniować następująco: jest to czas, po którym – przy wprowadzeniu na wejście regulatora PD sygnału liniowo-narastającego – składowa sygnału wyjściowego $u(t)$, związana z działaniem proporcjonalnym, zrówna się ze składową sygnału pochodzącą od działania różniczkującego.

Praktyczna realizacja regulatora PD o równaniach (6.4) jest często niemożliwa, ze względu na nieuniknioną inercję części różniczkującej, stąd też stosuje się model matematyczny rzeczywistego regulatora typu PD w postaci transmitancji

$$G(s) = k_p \left(1 + \frac{T_d s}{T_s + 1} \right) \quad (6.5)$$

Charakterystykę skokową i charakterystyki częstotliwościowe idealnego (linia przerywana) oraz rzeczywistego (linia ciągła) regulatora PD przedstawiono na rysunku 6.2.



Rys. 6.2. Charakterystyki regulatora PD idealnego (linia przerywana) i rzeczywistego (linia ciągła): a) skokowa, b) częstotliwościowe

Regulator PD w ogólnym przypadku powoduje zwiększenie zapasu stabilności i rozszerzenie pasma przenoszenia układu (wzrost pulsacji granicznej modułu). Stosując go można więc stabilizować układ poprawiając przy tym jego właściwości dynamiczne, bowiem wzrost wzmocnienia w zakresie dużych wartości pulsacji

powoduje szybkie zanikanie uchybu dynamicznego. Rozwiązanie takie ma niestety również wadę, gdyż wraz z poszerzeniem pasma przenoszenia wzrasta niepożądana wpływ szumów o dużych częstotliwościach.

E. Regulator typu PID (proporcjonalno-całkująco-różniczkujący)

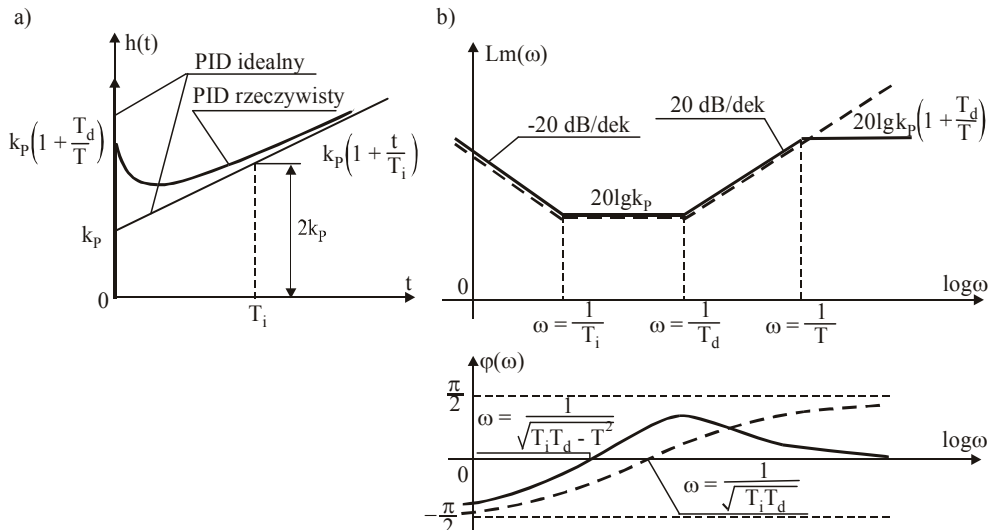
W idealnym regulatorze PID sygnał wyjściowy związany jest z sygnałem wejściowym zależnością

$$u(t) = k_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (6.6)$$

Natomiast transmitancje idealnego i rzeczywistego regulatora PID mają odpowiednio postać

$$G(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad G(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{Ts + 1} \right) \quad (6.7)$$

Podstawowe charakterystyki idealnego (linia przerywana) i rzeczywistego (linia ciągła) regulatora typu PID zamieszczono na rysunku 6.3.



Rys. 6.3. Charakterystyki idealnego (linia przerywana) i rzeczywistego (linia ciągła) regulatora PID: a) skokowa, b) częstotliwościowe

Z przedstawionych charakterystyk częstotliwościowych wynika, że regulator PID zawiera zalety regulatorów: P, PI i PD, tzn. powoduje wzrost wzmocnienia układu otwartego w zakresie małych oraz dużych pulsacji. Przyczynia się to do poprawy właściwości statycznych i dynamicznych układu bez pogorszenia jego stabilności.

W uniwersalnych systemach modułowych regulatory są tak budowane, że kompletny regulator ma działanie PID, a pozostałe działania uzyskuje się wyłączając bloki realizujące poszczególne funkcje składowe. W rozwiązaniach specjalistycznych pożądane właściwości regulatora są zwykle ściśle określone i realizacja konstrukcyjna jest im ściśle podporządkowana, np. tylko działanie P, PI lub PD.

Zamiast wzmocnienia proporcjonalnego k_p podaje się często w procentach tzw. **zakres proporcjonalności** X_p

$$X_p = \frac{1}{k_p} 100\% \quad (6.8)$$

Zakres proporcjonalności można rozumieć jako procentową część pełnego zakresu zmian wielkości wejściowej $e(t)$, potrzebną do wywołania zmiany wielkości wyjściowej $u(t)$ o pełen zakres.

Stałe k_p (lub X_p), T_i oraz T_d można w poszczególnych regulatorach nastawiać w dość szerokich zakresach. Przeciętnie spotykane wartości tych nastaw są następujące:

$$\begin{aligned} k_p &= 0,2 \div 50 \quad (X_p = 500 \div 2\%) \\ T_i &= 0,1 \div 30 \quad (60) \text{ min.} \\ T_d &= 0,05 \div 20 \quad (50) \text{ min.} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Stała czasowa T występująca we wzorach (6.5) i (6.7) jest zwykle związana ze stałą T_d za pomocą **wzmocnienia dynamicznego** k_d

$$k_d = \frac{T_d}{T} \quad (6.10)$$

przy czym wartość k_d zawiera się w granicach $6 \div 15$.

6.2.2. Analogowe człony korekcyjne

Często w prostych układach regulacji w tor główny wstawia się analogowy człon korekcyjny, którego zadaniem jest odpowiednie formowanie sygnału uchybu. Uzyskuje się to przez narzucenie przesunięcia fazowego oraz oddziaływanie na wartość amplitudy sygnałów w wybranym zakresie częstotliwości. Rozwiąza-

nie to jest znacznie tańsze od zastosowania regulatorów analogowych lub cyfrowych. Rozróżnia się trzy podstawowe człony korekcyjne, a mianowicie: człon korekcji całkowej PI (opóźniający fazę), człon korekcji różniczkowej PD (przyspieszający fazę) i człon korekcji różniczkowo-całkowej PID (opóźniająco-przyspieszający fazę).

Człon korekcji całkowej, podobnie jak regulator PI, jest stosowany przede wszystkim w układach z astatyzmem zerowego rzędu do wyeliminowania lub zmniejszenia uchybu statycznego lub w układach astatycznych do zwiększenia rzędu astatyzmu.

Transmitancja tego członu ma postać

$$G_k(s) = K \frac{1 + sT_2}{1 + sT_1}, \quad T_2 < T_1 \quad (6.11)$$

gdzie: K – współczynnik wzmocnienia, T_1 i T_2 – stałe czasowe.

Charakterystyki częstotliwościowe korektora o transmitancji (6.11) są zbliżone do regulatora typu PI.

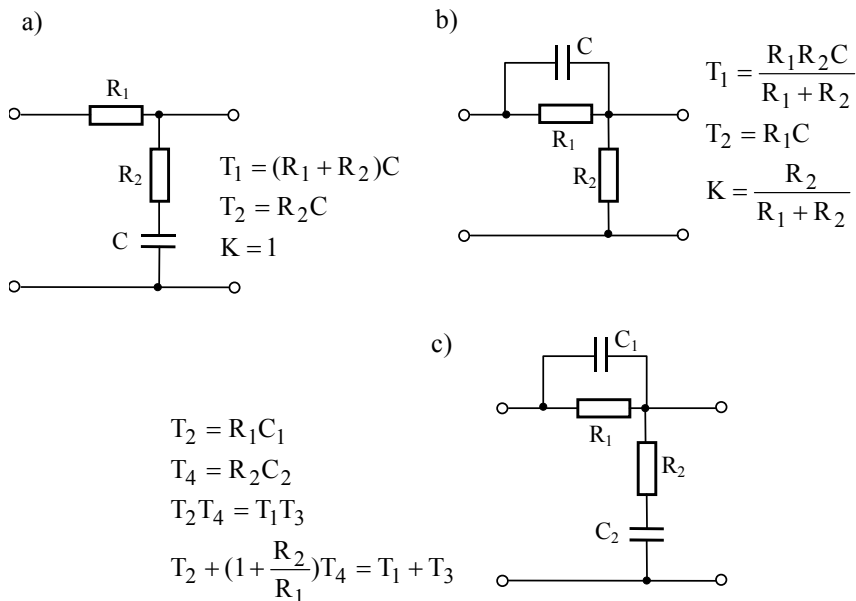
Człon korekcji różniczkowej. Jeśli w transmitancji (6.11) $T_2 > T_1$, to otrzyma się korektor przyspieszający fazę. Kształt charakterystyk częstotliwościowych jest zbliżony do charakterystyk regulatora PD, a więc korektor różniczkowy powoduje zwiększenie zapasu stabilności i poszerzenie pasma roboczego układu regulacji.

Człon korekcji różniczkowo-całkowej. W niektórych układach występuje potrzeba wprowadzenia elementu korekcyjnego o właściwościach regulatora PID, złożonego z dwu szeregowo połączonych członów – przyspieszającego i opóźniającego fazę. Transmitancja takiego korektora wynosi

$$G_k(s) = K \frac{(1 + sT_2)(1 + sT_4)}{(1 + sT_1)(1 + sT_3)} \quad (6.12)$$

przy czym $T_1T_3 = T_2T_4$ oraz $T_1 > T_2 > T_4 > T_3$.

Wymienione korektory wykonuje się jako elementy: elektryczne, pneumatyczne, hydrauliczne itp. Często stosowanym rozwiązaniem jest budowa korektorów w postaci czwórników RC (rzadziej RLC) lub na bazie wzmacniaczy operacyjnych. Schematy korektorów zamieszcza rysunek 6.4.



Rys. 6.4. Korektory: a) całkowy, b) różniczkowy, c) różniczkowo-całkowy

Zaletą tej korekcji jest prostota i łatwość realizacji, jej wadę natomiast stanowi to, że w wyniku połączenia szeregowego wszelkie zmiany parametrów korektorów, a także niepożądane ich nieliniowości, silnie oddziałują na warunki pracy układu. Także w wielu korektorach szeregowych współczynnik wzmocnienia $K < 1$, co powoduje zmniejszenie wypadkowego wzmocnienia układu. W celu skompensowania skutków włączenia takich korektorów trzeba stosować wzmacniacze o odpowiednio większym wzmocnieniu.

6.2.3. Regulatory dyskretne

Technika cyfrowa stwarza szerokie możliwości stosowania złożonych algorytmów sterowania: nieliniowych, ekstremalnych, adaptacyjnych itd. Na podkreślenie zasługuje zwłaszcza elastyczność tych algorytmów, wynikająca z łatwości dokonywania różnych zmian w trakcie pracy układu sterowania.

Mimo oczywistych zalet ww. metod sterowania wciąż szerokie zastosowanie znajdują realizowane w wersji dyskretnej klasyczne regulatory P, I, PI, PD i PID. Przyczyną tego jest zarówno uniwersalność tych regulatorów, jak i przyzwyczajenia projektantów do pojęć związanych z regulacją klasyczną. Należy jednak pamiętać, że

algorytmy typu PID zapewniają zadowalające wyniki regulacji dla rozmaitych obiektów sterowania, gdy punkt pracy układu nie jest położony daleko od pożądanego stanu równowagi. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, tzn. bieżący punkt pracy jest położony daleko od pożądanego stanu końcowego, bardziej skuteczne są inne metody sterowania, które zostaną przedstawione w dalszej części rozdziału.

Dyskretne wersje klasycznych regulatorów ciągłych otrzymano aproksymując ich równania wyrażeniami, w których całkowanie zastąpiono sumowaniem, a różniczkowanie – różnicą pierwszego rzędu. I tak równania różnicowe i transmitancje dyskretne klasycznych regulatorów mają następującą postać:

– regulator typu P

$$\boxed{u(kT) = k_p e(kT)}, \quad G_r(z) = k_p \quad (6.13)$$

– regulator typu I

$$\boxed{u(kT) = \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^k e(iT)}, \quad G_r(z) = \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} \quad (6.14)$$

– regulator typu PI

$$\boxed{u(kT) = k_p \left(e(kT) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^k e(iT) \right)}, \quad G_r(z) = k_p \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} \right) \quad (6.15)$$

– regulator typu PD

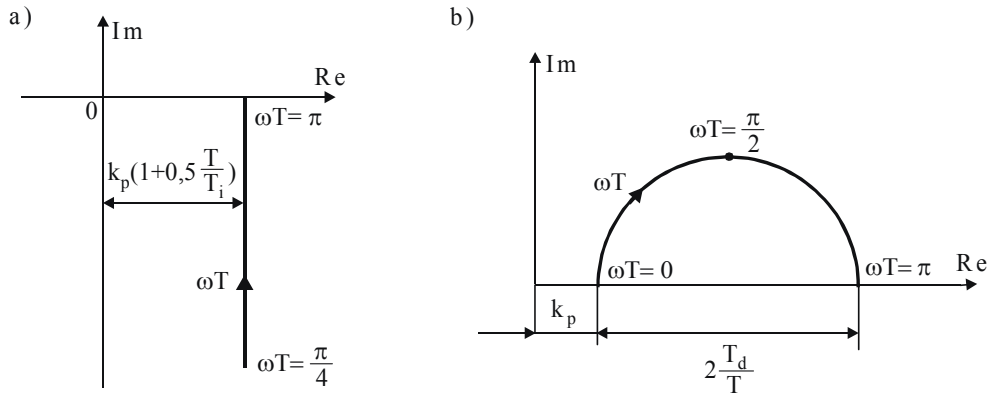
$$\boxed{u(kT) = k_p \left(e(kT) + \frac{T_d}{T} [e(kT) - e((k-1)T)] \right)}, \quad G_r(z) = k_p \left(1 + \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} \right) \quad (6.16)$$

– regulator typu PID

$$\boxed{u(kT) = k_p \left(e(kT) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^k e(iT) + \frac{T_d}{T} [e(kT) - e((k-1)T)] \right)} \quad (6.17)$$

$$G_r(z) = k_p \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} + \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} \right) \quad (6.18)$$

Wymienione dyskretne regulatory spełniają w układzie regulacji funkcje podobne do odpowiednich regulatorów ciągłych. Świadczyć o tym mogą choćby dyskretne charakterystyki amplitudowo-fazowe regulatorów PI i PID, przedstawione na rysunku 6.5. Należy jednak pamiętać, że wartość okresu próbkowania T wpływa na kształt charakterystyki amplitudowo-fazowej regulatora i obiektu, a więc także na właściwości układu regulacji.



Rys. 6.5. Charakterystyki amplitudowo-fazowe: a) dyskretnego regulatora PI, b) dyskretnego regulatora PD

Do korekcji właściwości układu regulacji najpowszechniej są stosowane regulatory PID. Wynika to stąd, że pozwalają one korygować zarówno właściwości statyczne, jak i dynamiczne układu regulacji.

Istnieją dwie podstawowe wersje dyskretnego algorytmu PID. Algorytm określony zależnością (6.17) nosi nazwę **algorytmu pozycyjnego**. W wyniku jego działania otrzymuje się sygnał odpowiadający położeniu członu wykonawczego obiektu. Sygnał wyjściowy $u(k)$ regulatora PID, po przejściu przez przetwornik cyfrowo-analogowy, jest wprowadzany do elementu z pamięcią, który będzie utrzymywał go na wyznaczonym poziomie przez najbliższy okres próbkowania.

W przypadku, gdy członem wykonawczym obiektu jest człon całkujący, np. silnik elektryczny, to wystarczy obliczyć jedynie przyrost sygnału sterującego $\Delta u(k)$

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) \quad (6.19)$$

przy czym dla uproszczenia zapisu przyjęto, że $kT = k$. Podstawienie zależności (6.18) do (6.19) daje tzw. **algorytm przyrostowy** o postaci

$$\Delta u(k) = \left(k_p [e(k) - e(k-1)] + \frac{T}{T_i} e(k) + \frac{T_d}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \right) \quad (6.20)$$

przy czym operacja całkowania odbywa się poza regulatorem.

Istotnym problemem realizacji praktycznej dyskretnych regulatorów jest filtracja skokowych zmian sygnałów. W algorytmie (6.17) występuje, jako analog różniczkowania, różnica uchybów $\Delta e(k) = e(k) - e(k-1)$. Powoduje to w przypadku nagłej zmiany uchybu, spowodowanej przez zakłócenie lub zmianę wartości zadanej, duże zmiany wartości $u(k)$. Może to wywołać szkodliwe przeregulowania i oscylacje wielkości wyjściowej układu regulacji. Aby uniknąć tej niedogodności, w przypadku skokowych zmian sygnału wejściowego $w(t)$ układu regulacji, stosuje się w algorytmach dyskretnych, zamiast członu realizującego różnicę uchybów $\Delta e(k)$ w kolejnych chwilach próbkowania, człon realizujący różnicę wielkości wyjściowych $\Delta y(k)$ układu, która nie zmienia się skokowo przy skokowej zmianie wielkości wejściowej $w(t)$. W celu zmniejszenia wrażliwości regulatorów dyskretnych na skokowe zakłócenia przypadkowe są stosowane różne metody filtracji analogowej lub cyfrowej wielkości $e(k)$ lub $\Delta e(k)$.

6.3. Metody zwiększania dokładności statycznej

Dokładność w stanie ustalonym ma istotne znaczenie dla większości układów regulacji i dlatego poświęca się jej wiele uwagi. Jest ona określona przez wypadkowy uchyb ustalony e_u , który spowodowany jest sygnałami sterującymi i zakłóceniami.

Zwiększenie dokładności statycznej, czyli zmniejszenie uchybu ustalonego, osiąga się poprzez:

- 1) zwiększenie wartości współczynnika układu otwartego,
- 2) podwyższenie rzędu astatyizmu układu,

Zwiększenie wartości współczynnika wzmocnienia

Zwiększenie wartości współczynnika wzmocnienia układu otwartego jest najbardziej uniwersalną, ale nie zawsze efektywną metodą. Wzrost współczynnika układu otwartego wpływa na zmniejszenie wartości uchybu statycznego. Jednak wzrost współczynnika wzmocnienia układu otwartego jest ograniczony stabilnością układu zamkniętego. Przy pewnej określonej wartości tego współczynnika w układzie zanika tłumienie i układ zbliża się do granicy stabilności. Dalszy wzrost współczynnika może spowodować niestabilność układu. Ze względu na dokład-

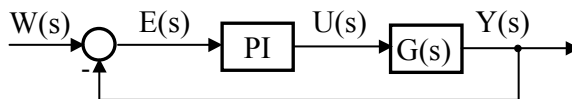
ność statyczną współczynnik wzmocnienia powinien być więc jak największy, a ze względu na stabilność – możliwie mały. Występuje zatem przeciwieństwo między wymaganiami dokładności statycznej i stabilności.

Zwykle wartość współczynnika wzmocnienia układu otwartego, zapewniająca żadaną dokładność statyczną jest tak duża, że dla uzyskania niezbędnego zapasu stabilności zachodzi potrzeba wprowadzenia odpowiednich algorytmów sterowania.

Podwyższenie rzędu astatyzmu

Na podstawie wyników otrzymanych w rozdziale 4.2.5 można wysnuć wniosek, że uchyb ustalony doprowadza się do wartości równej zero przez zastosowanie modyfikacji, po której układ regulacji stanie się astatyczny odpowiedniego rzędu. W tym celu należy do układu wprowadzić człony całkujące (w układach dyskretnych – sumujące), których liczbę i miejsce usytuowania dobiera się w taki sposób, aby uchyb ustalony był równy zero. Niestety ten sposób likwidacji uchybu ustalonego ma zasadniczą wadę, polegającą na tym, że podwyższenie rzędu astatyzmu wpływa niekorzystnie na właściwości dynamiczne układu. Mianowicie wprowadzenie członów całkujących (sumujących) może spowodować utratę stabilności.

Podwyższenie rzędu astatyzmu układu bez utraty stabilności można osiągnąć przez włączenie do układu regulatora typu PI (rys. 6.6). Włączenie jednego regulatora powoduje podwyższenie rzędu astatyzmu o jeden, włączenie dwóch połączonych szeregowo – o dwa itd.



Rys. 6.6. Włączenie regulatora typu PI do układu regulacji

6.4. Metody syntezy ciągłych układów jednowymiarowych

Syntezę układów sterowania można zrealizować za pomocą różnych metod, które prowadzą do zgodnych z oczekiwaniami wyników. Zwykle przy projektowaniu jest więcej niewiadomych niż danych i spośród wielu możliwych rozwiązań należy wybrać jedno, najlepsze z punktu widzenia wybranego kryterium oceny jakości sterowania. Rozwiązanie to dotyczy wyboru struktury układu regulacji, wyboru

rodzaju regulatora lub wartości jego parametrów (nastaw). Projektując układ sterowania żąda się, aby spełniał określone wymagania, które wynikają z warunków technologicznych sterowanego procesu. Do podstawowych wymagań zalicza się:

- dokładność w stanie ustalonym,
- stabilność i odpowiedni jej zapas,
- charakter przebiegu procesu przejściowego.

Poza tym niektórym układom, zależnie od ich przeznaczenia, stawia się dodatkowe wymagania, np. dokładność w stanie dynamicznym, tłumienie zakłóceń, niezawodność działania itd.

Obecnie wynikiem powszechnego zastosowania komputerowego wspomaganie projektowania jest dominujące znaczenie metod czasowych syntezy układów sterowania, a szczególnie metod przestrzeni stanów. Dlatego też najwięcej uwagi zostanie poświęcone tym metodom syntezy układów liniowych.

6.4.1. Metody częstotliwościowe

Metody częstotliwościowe jeszcze kilkanaście lat temu zaliczane były do podstawowych metod syntezy jednowymiarowych układów liniowych. Jako dane wyjściowe przyjmuje się tu logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe, amplitudowe i fazowe, układu bez regulatora oraz wymagania dotyczące jakości regulacji, tzw. warunki syntezy. Na podstawie tych wymagań wyznacza się żądany przebieg charakterystyk układu regulacji. Dla układów minimalnofazowych, które będą przedmiotem dalszych rozważań, wystarczającą jest znajomość logarytmicznej charakterystyki amplitudowej. Znajomość charakterystyk układu nieskorygowanego (o transmitancji $G_{ob}(s)$) oraz żądanych charakterystyk układu (o transmitancji $G_o(s)$) pozwala wyznaczyć strukturę i parametry szeregowo włączonego w układ regulatora (o transmitancji $G_r(s)$)

$$G_o(j\omega) = G_r(j\omega)G_{ob}(j\omega) \quad (6.21)$$

a po obliczeniu stronami logarytmu

$$\text{Lm}G_o(j\omega) = \text{Lm}G_r(j\omega) + \text{Lm}G_{ob}(j\omega) \quad (6.22)$$

a stąd

$$\text{Lm}G_r(j\omega) = \text{Lm}G_o(j\omega) - \text{Lm}G_{ob}(j\omega) \quad (6.23)$$

przy czym, np. $\text{Lm}G_o(j\omega) = 20 \log|G_o(j\omega)|$.

Problem ten można ująć w postaci następujących etapów:

- a) wyznaczenie logarytmicznej charakterystyki amplitudowej nieskorygowanego układu otwartego,
- b) przyjęcie pożądanej, ze względu na jakość regulacji, logarytmicznej charakterystyki amplitudowej układu otwartego,
- c) wyznaczenie struktury i parametrów szeregowego regulatora na podstawie logarytmicznej charakterystyki amplitudowej, będącej dopełnieniem charakterystyki nieskorygowanego układu otwartego do charakterystyki pożądanej lub inaczej – różnicą charakterystyki pożądanej i charakterystyki układu otwartego.

Zazwyczaj po dokonaniu takiej syntezy wyznacza się charakterystyki układu z uwzględnieniem regulatora i następnie sprawdza, w jakim stopniu są spełnione postawione układowi wymagania, korygując w razie potrzeby uzyskane rozwiązanie zadania syntezy.

6.4.2. Metody rozkładu pierwiastków równania charakterystycznego

Badanie rozkładu pierwiastków równania charakterystycznego układu regulacji umożliwia bardziej precyzyjne określenie własności procesów przejściowych niż badanie charakterystyk częstotliwościowych. Jednak metody syntezy oparte na analizie rozkładu biegunów (wartości własnych) transmitancji są mniej ogólne, choćby z tego powodu, że dotyczą zwykle transmitancji o postaci funkcji wymiernych.

Warunkami syntezy najczęściej są:

- 1) algebraiczne kryteria stabilności,
- 2) zadane położenie biegunów i ewentualnie zer transmitancji,
- 3) zadana postać transmitancji układu.

Algebraiczne kryteria stabilności stosuje się do syntezy układów regulacji, od których wymaga się tylko spełnienia warunku stabilności. Kryteria te nie podają odległości od granicy stabilności, lecz tylko warunki, dla których układ jest stabilny.

Parametry regulatora można określić z warunku **zadanego położenia biegunów** lub **zadanej postaci transmitancji**. W tym przypadku określa się strukturę układu regulacji (regulator w torze głównym lub w obwodzie sprzężenia zwrotnego) i typ regulatora (korektora), a następnie wyznacza transmitancję układu zamkniętego z regulatorem o postaci

$$G_z(s) = \frac{L(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{L(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (6.24)$$

przy czym zarówno współczynniki a_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$), jak i bieguny p_j ($j = 1, 2, \dots, n$) są funkcjami parametrów zastosowanego regulatora (korektora). Przyjmując zadane wartości współczynników a_i^* lub biegunów p_j^* otrzyma się układ równań:

$$a_i = a_i^*, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6.25)$$

lub

$$p_j = p_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.26)$$

z którego wyznacza się parametry regulatora. W tego typu zadaniach może się zdarzyć, że liczba równań (6.25) lub (6.26) jest większa od liczby szukanych parametrów regulatora. Wówczas wartości parametrów regulatora należy dobrać kompromisowo, tzn. w przybliżeniu spełnić zadane warunki syntezy. Można także obniżyć rząd transmitancji (6.24), a co się z tym wiąże zmniejszyć liczbę równań (6.25) lub (6.26).

Problem syntezy upraszcza się, jeżeli układ regulacji z regulatorem jest opisany transmitancją drugiego rzędu. Wtedy parametry regulatora najwygodniej jest obliczać z zadanej wartości współczynnika tłumienia ξ i pulsacji drgań własnych nie-tłumionych ω_n .

Zamiast redukcji rzędu układu z regulatorem można zastosować szeregowo połączone regulatory, np. typu PD lub PID. Regulatory umiejscawia się w torze głównym lub w torze sprzężenia zwrotnego układu sterowania. Stosując regulator w torze głównym zmienia się licznik transmitancji układu zamkniętego w porównaniu z licznikiem transmitancji obiektu. Jeżeli natomiast regulator zostanie zastosowany w pętli sprzężenia zwrotnego, liczniki transmitancji układu z regulatorem i obiektu są identyczne.

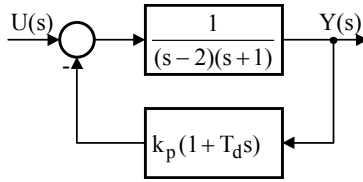
Przykład 6.1

Zaprojektować układ sterowania, który dokona stabilizacji obiektu o transmitancji

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

Rozwiązanie

Stabilizacji obiektu dokonano za pomocą regulatora PD, umieszczonego w torze sprzężenia zwrotnego (rys. 6.7).



Rys. 6.7. Struktura układu regulacji

Transmitancja układu zamkniętego ma postać

$$G_z(s) = \frac{1}{s^2 + (k_p T_d - 1)s + k_p - 2} \quad (6.27)$$

Stosując kryterium Hurwitza układ regulacji jest stabilny, gdy zachodzi:

$$k_p T_d - 1 > 0 \quad \text{i} \quad k_p - 2 > 0 \quad (6.28)$$

czyli

$$k_p > 0 \quad \text{i} \quad T_d > \frac{1}{k_p} \quad (6.29)$$

Zastosowanie kryterium Hurwitza zapewnia stabilność, ale nie gwarantuje odpowiedniego zapasu stabilności, niezbędnego dla zapewnienia stabilności w przypadku zmian parametrów układu lub niedokładności opisu matematycznego obiektu.

Parametry regulatora można także określić przyjmując zadane położenie biegunów układu zamkniętego, np.

$$p_1^* = p_2^* = -5 \quad (6.30)$$

Bieguny rzeczywiste zapewniają w układzie aperiodyczny przebieg stanu nieustalonego (brak oscylacji), a przyjęte wartości (6.30) – krótki czas jego trwania i odpowiedni zapas stabilności. W ogólnym przypadku wyznaczanie biegunów transmitancji (6.27) może prowadzić do złożonych zależności, dlatego też jest łatwiej w oparciu o zadane wartości biegunów wyznaczyć żadaną postać transmitancji

$$G_z(s) = \frac{1}{(s - p_1^*)(s - p_2^*)} = \frac{1}{(s + 5)^2} = \frac{1}{s^2 + 10s + 25} \quad (6.31)$$

a następnie z porównania wartości współczynników mianowników transmitancji (6.27) i (6.31) otrzymano szukane wartości parametrów:

$$k_p = 27 \quad \text{i} \quad T_d = \frac{11}{27} \quad (6.32)$$

6.4.3. Metody czasowe

Metody czasowe syntezy układów regulacji polegają na doborze parametrów regulatora na podstawie założonych wartości parametrów odpowiedzi skokowej, które traktuje jako warunki syntezy. Tymi parametrami najczęściej są: czas regulacji t_r , maksymalne przeregulowanie χ i ewentualnie czas t_1 osiągnięcia przez odpowiedź skokową pierwszego ekstremum. Analityczne wyznaczenie wartości parametrów regulatorów z wymienionych warunków syntezy jest utrudnione ze względu na konieczność rozwiązywania złożonych równań. Parametry te zwykle wyznacza się metodami numerycznymi.

Metoda Zieglera-Nicholsa stała się standardową procedurą doboru parametrów (nastaw) regulatora. W wielu przypadkach zapewnia dobrą jakość regulacji, a jej podstawową zaletą jest prostota. Pomimo dużej popularności metody Zieglera-Nicholsa, otrzymanywane w wyniku jej zastosowania wartości parametrów należy traktować jedynie jako pierwsze racjonalne przybliżenie. Dla wielu układów obliczone tą metodą wartości nastaw nie są najlepsze. Często wykonując proste doświadczenia, można dobrać nastawy zapewniając lepszą regulację.

Procedura doboru wartości parametrów regulatora według metody Zieglera-Nicholsa jest następująca:

- regulator zainstalowany w układzie regulacji należy nastawić na działanie P i zwiększać stopniowo jego wzmocnienie k_p , doprowadzając układ do granicy stabilności,
- w stanie wzbudzonych oscylacji zmierzyć ich okres T_{os} (w minutach) oraz odczytać wartość współczynnika wzmocnienia $k_p = k_{kr}$,
- zależnie od typu regulatora należy przyjąć:

$$\text{dla P} \quad k_p = 0,5k_{kr}$$

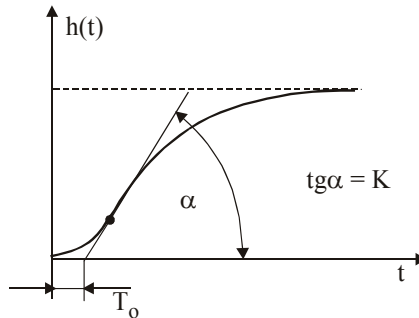
$$\text{dla PI} \quad k_p = 0,45k_{kr} \quad T_i = 0,85T_{os} \quad (6.33)$$

$$\text{dla PID} \quad k_p = 0,6k_{kr} \quad T_i = 0,5T_{os} \quad T_d = 0,125T_{os}$$

W nastawach według zasady Zieglera-Nicholsa można zauważyć wpływ działania całkującego i różniczkującego na właściwości układu regulacji. Jeśli dla regulatora P zaleca się $k_p = 0,5k_{kr}$, to dla PI nieco mniej, właśnie ze względu na destabilizujący wpływ ujemnego przesunięcia fazowego wprowadzanego przez ten regulator. Z kolei, po wprowadzeniu działania D (regulator PID) można zwiększyć za-

równy k_p , jak też działanie części całkującej regulatora, co wyraża się zmniejszeniem zalecanego czasu zdwojenia T_i .

Ziegler i Nichols [22] zaproponowali również dobór nastaw regulatora w zależności od parametrów aperiodycznej odpowiedzi skokowej obiektu (rys. 6.8). Przewodząc przez punkt przegięcia styczną określa się opóźnienie zastępcze T_o oraz współczynnik nachylenia stycznej K .



Rys. 6.8. Parametry odpowiedzi skokowej obiektu

Autorzy metody proponują następujące nastawy:

$$\begin{aligned}
 \text{dla P} \quad k_p &= \frac{1}{KT_o} \\
 \text{dla PI} \quad k_p &= \frac{0,9}{KT_o} \quad T_i = 3,3T_o \\
 \text{dla PID} \quad k_p &= \frac{1,2}{KT_o} \quad T_i = 2T_o \quad T_d = 0,5T_o
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

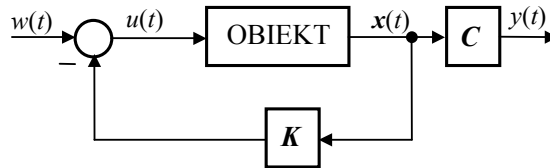
6.4.4. Metody przestrzeni stanów

Jednowymiarowy układ sterowania opisany jest za pomocą równań stanu:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\
 y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

Sposób rozwiązania problemu syntezy w oparciu o metody przestrzeni stanów, także i struktura układu sterowania są uzależnione od możliwości pomiaru zmiennych stanu. W przypadku dostępności pomiarowej pełnego wektora stanu obiektu,

zadanie syntezy polega na wyznaczeniu elementów proporcjonalnego regulatora wielowymiarowego (wektorowego) \mathbf{K} , umieszczonego w torze sprzężenia zwrotnego od wektora stanu obiektu do wejścia układu sterowania. Składowe wektora \mathbf{K} powinny być tak dobrane, aby macierz stanu układu z regulatorem posiadała wartości własne o pożądanych wartościach. Schemat blokowy układu skorygowanego przedstawiono na rysunku 6.9.



Rys. 6.9. Schemat blokowy układu z regulatorem parametrycznym

Natomiast w przypadku możliwości pomiaru tylko części zmiennych stanu jest niezbędne zastosowanie w układzie sterowania tzw. obserwatora stanu, który na podstawie pomiaru wejścia i części zmiennych stanu obiektu odtwarza pozostałą niemierzalną część wektora stanu.

Schemat blokowy z rysunku 6.9 można opisać następującymi równaniami:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (6.36)$$

$$u(t) = w(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (6.37)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (6.38)$$

Po podstawieniu równania (6.37) do równania (6.36) otrzymano równanie stanu układu zamkniętego (z regulatorem)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{BK}]\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}w(t) \quad (6.39)$$

Równanie charakterystyczne układu z regulatorem ma postać

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}] = 0 \quad (6.40)$$

Porównując równanie (6.54) z zadaniem równaniem charakterystycznym, które otrzymuje się przyjmując zadane wartości własne, można obliczyć współrzędne wektora \mathbf{K} .

Przykład 6.2

Dany jest obiekt sterowania

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (6.41)$$

Dobrać parametry regulatora parametrycznego (proporcjonalnego), umieszczonego w pętli sprzężenia zwrotnego, aby wartości własne układu skorygowanego wynosiły: $\lambda_1 = -8$ i $\lambda_2 = -10$.

Rozwiązanie

Wartości własne obiektu sterowania wyznaczono rozwiązując równanie charakterystyczne

$$\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0 \quad (6.42)$$

a stąd $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -6$. Ponieważ obydwie wartości własne należy przesunąć do położenia zadanego, konieczne jest dokonanie pomiaru pełnego wektora stanu (lub pomiaru jednej zmiennej stanu, a drugiej odtworzenie za pomocą obserwatora) i realizacji pętli sprzężenia zwrotnego z uwzględnieniem regulatora dwuwymiarowego $\mathbf{K} = [k_1 \ k_2]$. Na podstawie zależności (6.40) równanie charakterystyczne układu z regulatorem ma postać

$$\lambda^2 + \lambda(k_2 + 7) + k_1 + 6 = 0 \quad (6.43)$$

Przyrównując do siebie odpowiednie współczynniki tego równania i zadanego równania charakterystycznego o postaci

$$(\lambda + 8)(\lambda + 10) = \lambda^2 + 18\lambda + 80 = 0 \quad (6.44)$$

otrzymano układ równań:

$$\begin{aligned} k_2 + 7 &= 18 \\ k_1 + 6 &= 80 \end{aligned} \quad (6.45)$$

a więc szukane wartości współrzędnych wektora \mathbf{K} wynoszą:

$$k_1 = 74 \quad \text{ i } \quad k_2 = 11 \quad (6.46)$$

6.5. Metody syntezy układów dyskretnych

Metody projektowania układów dyskretnych są zbliżone do metod stosowanych w układach ciągłych. Istnieje tu jednak większa swoboda w doborze metod i posta-

ci algorytmów sterowania ze względu na łatwiejszą ich implementację praktyczną. Ponadto intensywny rozwój techniki mikroprocesorowej umożliwia stosowanie złożonych algorytmów, zapewniających wysoką jakość sterowania.

Klasyczne metody projektowania polegają w większości przypadków na kompromisie między wymaganiami stabilności a wymaganiami dokładności statycznej. W układach jednowymiarowych do syntezy układów regulacji można zastosować metody czasowe i częstotliwościowe, znane dla układów liniowych. Metody częstotliwościowe stosuje się wtedy, gdy dysponuje się wyznaczoną eksperymentalnie charakterystyką częstotliwościową obiektu oraz gdy wymagania sformułowane są w postaci parametrów procesu przejściowego, pasma przenoszonych częstotliwości lub zapasu stabilności. Poza metodami syntezy znanymi dla układów ciągłych, w układach dyskretnych są stosowane specyficzne dla tych układów metody. Jedna z nich zostanie przedstawiona niżej.

6.5.1. Określenie struktury regulatora dla zadanej transmitancji układu zamkniętego

Celem syntezy jest wyznaczenie transmitancji regulatora dyskretnego

$$G_r(z) = \frac{L_r(z)}{M_r(z)} \quad (6.47)$$

w przypadku, gdy dana jest transmitancja dyskretna obiektu wraz z ekstrapolatorem

$$G(z) = \frac{L(z)}{M(z)} \quad (6.48)$$

i żądana transmitancja układu zamkniętego

$$G_z(z) = \frac{L_z(z)}{M_z(z)} \quad (6.49)$$

Rozwiązując zależność określającą dyskretną transmitancję zastępczą układu (przyjęto regulator w torze głównym)

$$G_z(z) = \frac{G_r(z)G(z)}{1 + G_r(z)G(z)} \quad (6.50)$$

względem poszukiwanej transmitancji $G_r(z)$, otrzymano

$$\boxed{G_r(z) = \frac{G_z(z)}{G(z)[1 - G_z(z)]}} \quad (6.51)$$

lub po uwzględnieniu zależności (6.48) i (6.49)

$$G_r(z) = \frac{M(z)L(z)}{L(z)[M_z(z) - L_z(z)]} \quad (6.52)$$

Na podstawie równań (6.51) lub (6.52) można wyznaczyć równanie różnicowe, według którego regulator (mikroprocesor) oblicza wartości sygnału sterującego obiektem w kolejnych chwilach próbkowania. Gdyby wyznaczona transmitancja regulatora nie była realizowalna fizycznie (stopień wielomianu licznika większy od stopnia wielomianu w mianowniku), wówczas należy zmienić warunek syntezy, czyli postać transmitancji $G_z(z)$.

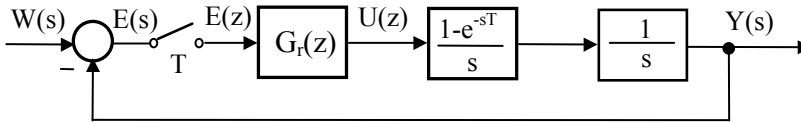
W dyskretnym układzie regulacji o równaniu charakterystycznym w postaci

$$M_z(z) - L_z(z) = 0 \quad (6.53)$$

czas trwania procesu przejściowego jest skończony i jest najkrótszy z możliwych. Układ regulacji spełniający ten warunek jest nazywany **układem czasooptymalnym**.

Przykład 6.3

Wyznaczyć algorytm rekurencyjny czasooptymalnego regulatora dyskretnego zastosowanego w układzie regulacji przedstawionym na rysunku 6.10 dla $T = 1$ s. Przyjąć, że układ regulacji osiągnie stan ustalony po dwóch okresach próbkowania.



Rys. 6.10. Dyskretny układ regulacji

Rozwiązanie

Transmitancja operatorowa części ciągłej ma postać

$$G(s) = (1 - e^{-sT}) \frac{1}{s^2} = (1 - e^{-s}) \frac{1}{s^2} \quad (6.54)$$

Korzystając z tabeli 2.2 określono transmitancję dyskretną

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{T}{z-1} = \frac{1}{z-1} \quad (6.55)$$

Na podstawie zależności (6.53) przyjęto

$$G_z(z) = \frac{1}{z^2} \quad (6.56)$$

Wyznaczona z równania (6.51) transmitancja regulatora dyskretnego ma postać

$$G_r(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{z-1} \quad (6.57)$$

Z transmitancji $G_r(z)$ wynika, że

$$(z-1)U(z) = E(z) \quad (6.58)$$

a stąd równanie różnicowe

$$u(k+1) - u(k) = e(k) \quad (6.59)$$

czyli

$$u(k+1) = u(k) + e(k) \quad (6.60)$$

lub po przesunięciu wskaźnika czasu

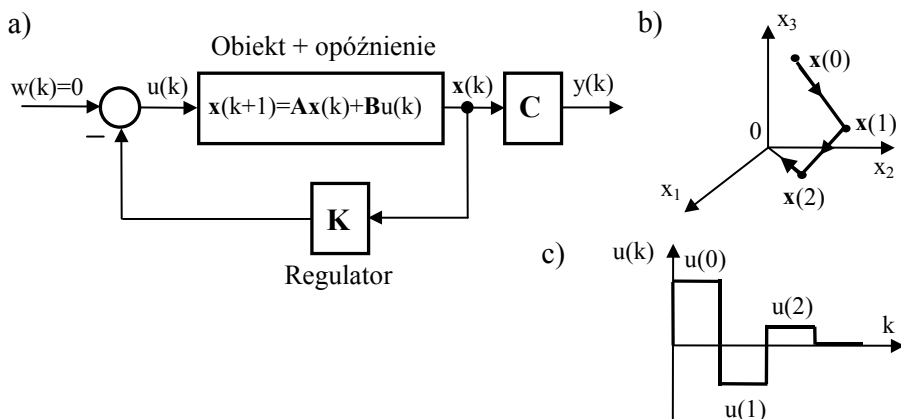
$$u(k) = u(k-1) + e(k-1) \quad (6.61)$$

6.5.2. Wyznaczanie wartości parametrów regulatora stanu

Korekcja układów dyskretnych jest możliwa także przez wprowadzenie regulatora proporcjonalnego w sprzężeniu zwrotnym do stanu. W dalszych rozważaniach będzie analizowane zagadnienie kształtowania żądanej dynamiki układu przez sprzężenie zwrotne od stanu przy założeniu, że stan $\mathbf{x}(k)$ jest znany. Niech obiekt z ekstrapolatorem będzie określony równaniem stanu

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (6.62)$$

przy czym $\mathbf{x}(k)$ jest n -wymiarowym wektorem stanu, a $u(k)$ sygnałem sterującym. Problem sterowania czasooptymalnego polega na wyznaczeniu ciągu sterowania $u(0), u(1), \dots, u(k)$, który będzie przeprowadzać układ z dowolnego stanu początkowego $\mathbf{x}(0)$ do początku układu współrzędnych przestrzeni stanów (do stanu ustalonego lub równowagi) w ciągu minimalnej liczby okresów próbkowania (rys. 6.11). Okazuje się, że jest możliwe osiągnięcie stanu zerowego w ciągu co najwyżej n okresów próbkowania, przy założeniu, że układ jest sterowalny i że jest możliwe sprzężenie zwrotne od stanu.



Rys. 6.11. Sterowanie za pomocą regulatora parametrycznego: a) schemat blokowy układu, b) trajektoria stanu, c) przebieg sygnału sterującego

Układ sterowania jest opisany równaniami:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (6.63)$$

$$u(k) = w(k) - \mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad (6.64)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (6.65)$$

Podstawiając zależność

$$u(k) = w(k) - \mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad (6.66)$$

do równania (6.63) otrzymano równanie stanu układu z regulatorem

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}]\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}w(k) = \mathbf{A}_z\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}w(k) \quad (6.67)$$

przy czym \mathbf{A}_z jest macierzą stanu układu zamkniętego.

Wartości elementów macierzy \mathbf{K} należy tak dobrać, aby równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$M_z(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_z] = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0 = 0 \quad (6.68)$$

miało pierwiastki o zadanych wartościach $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$ – rzeczywistych lub zespolonych, czyli

$$(z - z_1^*)(z - z_2^*) \dots (z - z_n^*) = z^n + c_{n-1}^*z^{n-1} + \dots + c_1^*z + c_0^* \quad (6.69)$$

Szukane wartości współrzędnych wektora \mathbf{K} wyznacza się rozwiązując układ równań

$$c_i = c_i^* \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \quad (6.70)$$

Jeżeli jest projektowany układ czasooptymalny, to zadane równanie charakterystyczne (6.69) przyjmie postać

$$(z-0)(z-0) \dots (z-0) = z^n \quad (6.71)$$

Problem przeprowadzenia sterowalnego, jednowymiarowego układu n -tego rzędu z zadanego stanu początkowego $\mathbf{x}(0)$ do stanu końcowego $\mathbf{x}(n) = \mathbf{0}$, w ciągu n okresów próbkowania T można stosunkowo prosto rozwiązać, jeżeli model matematyczny obiektu jest określony równaniami stanu w postaci kanonicznej Frobeniusa, tj.

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (6.72)$$

Wykazuje się [12], że wówczas macierz parametrów regulatora \mathbf{K} , zastosowanego w sprzężeniu zwrotnym od wektora stanu, ma postać

$$\mathbf{K} = [-a_0 \quad -a_1 \quad \dots \quad -a_{n-1}] \quad (6.73)$$

W przypadku ogólnym jednowymiarowego układu sterowalnego, jego równanie stanu o dowolnej postaci macierzy stanu \mathbf{A} można przekształcić do postaci kanonicznej Frobeniusa (6.72) za pomocą transformacji liniowej

$$\mathbf{x}^*(k) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k) \quad (6.74)$$

gdzie \mathbf{P} jest następującą macierzą

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

Wówczas sygnał sterujący określony jest zależnością

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}^*(k) = -\mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{x}(k) = -\mathbf{K}_1\mathbf{x}(k) \quad (6.76)$$

a więc w tym przypadku regulator parametryczny będzie określony przez macierz

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}\mathbf{P} \quad (6.77)$$

Z powyższych rozważań wynika następujący tok postępowania przy wyznaczeniu macierzy \mathbf{K}_1 :

- mając daną macierz stanu \mathbf{A} wyznacza się współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} wielomianu charakterystycznego tej macierzy (przypomina się, że współczynniki wielomianu charakterystycznego są elementami ostatniego wiersza macierzy Frobeniusa ze znakiem minus)

$$\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0 \quad (6.78)$$

oraz macierz

$$\mathbf{K} = [-a_0 \quad -a_1 \quad \dots \quad -a_{n-1}] \quad (6.79)$$

- korzystając ze znanych metod należy określić macierz transformującą \mathbf{P} ,
- z zależności (6.77) wyznacza się poszukiwaną macierz \mathbf{K}_1 .

Przykład 6.4

Dany jest niestabilny obiekt regulacji o równaniu

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (6.80)$$

Dokonać stabilizacji tego obiektu za pomocą sprzężenia zwrotnego od stanu tak, aby proces przejściowy w układzie regulacji przy wymuszeniu jednostkowym trwał nie dłużej niż dwa okresy próbkowania (układ czasooptymalny).

Rozwiązanie

W przykładzie macierze stanu \mathbf{A} i sterowania \mathbf{B} mają postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A jest następujący

$$\det[zI - A] = \det \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 2 & z-3 \end{bmatrix} = z^2 - 4z + 5 \quad (6.82)$$

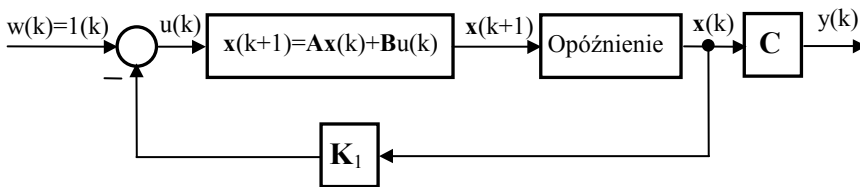
Obiekt jest niestabilny, gdyż

$$z_{1,2} = 2 \pm j \quad (6.83)$$

Zakładając, że sygnałem wyjściowym układu regulacji jest $y(k) = x_1(k)$, macierze C , P , K i K_1 wynoszą:

$$C = [1 \ 0], \quad P = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = [-5 \ 4], \quad K_1 = [-1 \ 4] \quad (6.84)$$

Struktura układu regulacji ma postać przedstawioną na rysunku 6.12.



Rys. 6.12. Schemat blokowy układu regulacji

Układ ten opisują równania:

$$\begin{aligned} w(k) &= 1(k), \\ u(k) &= 1(k) - K_1 x(k) = 1(k) + x_1(k) - 4x_2(k), \\ x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k), \\ x_2(k+1) &= -2x_1(k) + 3x_2(k) + u(k), \\ y(k) &= x_1(k). \end{aligned} \quad (6.85)$$

Przyjmując $x_1(0) = x_2(0) = 0$ można wykazać, że:

– dla $k = 0$

$$w(0) = 1, \quad u(0) = 1, \quad x_1(1) = 0, \quad x_2(1) = 1, \quad y(0) = 0$$

– dla $k = 1$

$$w(1) = 1, \quad u(1) = -3, \quad x_1(2) = 1, \quad x_2(2) = 0, \quad y(1) = 1$$

– dla $k = 2$

$$w(2) = 1, \quad u(2) = 2, \quad x_1(3) = 1, \quad x_2(3) = 0, \quad y(2) = 1$$

– dla $k = 3$

$$w(3) = 1, \quad u(3) = 2, \quad x_1(4) = 1, \quad x_2(4) = 0, \quad y(3) = 1$$

Można więc stwierdzić, że postawione zadanie zostało rozwiązane poprawnie. W układzie pojawia się uchyb ustalony równy 2. Chcąc go zlikwidować, należy podwyższyć rząd astatyzmu układu poprzez zastosowanie członu całkującego (sumującego).

Parametry wielowymiarowego regulatora \mathbf{K} również można wyznaczyć dysponując wielomianami charakterystycznymi obiektu i układu z regulatorem. Wobec tego niech będzie dany dyskretny wielowymiarowy obiekt opisany równaniami:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (6.86)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (6.87)$$

Niech wielomian charakterystyczny macierzy \mathbf{A} (obiektu) ma postać

$$M(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0 \quad (6.88)$$

oraz wielomian charakterystyczny układu zamkniętego (warunek syntezy)

$$M_z(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_z] = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0 = 0 \quad (6.89)$$

Dowodzi się [12], że przy dostępności wszystkich zmiennych stanu obiektu można zawsze tak dobrać elementy macierzy \mathbf{K} , że wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego (6.89) będą przyjmowały żądane wartości. Jeżeli równanie stanu ma postać kanoniczną Frobeniusa, to elementy n -wymiarowego regulatora \mathbf{K} wyznacza się z zależności

$$k_i = c_{i-1} - a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.90)$$

przy czym $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$.

W ogólnym przypadku, gdy równanie stanu nie jest w postaci kanonicznej Frobeniusa, macierz parametrów regulatora określa się z równania

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}\mathbf{P} \quad (6.91)$$

gdzie \mathbf{P} jest nieosobliwą macierzą transformacji liniowej

$$\mathbf{x}^*(k) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k) \quad (6.92)$$

układu (6.86) do postaci kanonicznej Frobeniusa.

Przykład 6.5

Zaprojektować układ regulacji z regulatorem parametrycznym, aby dla obiektu z przykładu 6.4 równanie charakterystyczne układu posiadało pierwiastki: $z_1^* = z_2^* = 0$.

Rozwiązanie

Wielomian charakterystyczny obiektu ma postać

$$\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = z^2 - 4z + 5 \quad (6.93)$$

natomiast żądana postać wielomianu charakterystycznego układu zamkniętego wynika z zadanych wartości pierwiastków

$$(z - z_1^*)(z - z_2^*) = (z - 0)(z - 0) = z^2 \quad (6.94)$$

Współrzędne wektora \mathbf{K} wyznaczono z zależności (6.90):

$$\begin{aligned} k_1 &= c_0 - a_0 = 0 - 5 = -5 \\ k_2 &= c_1 - a_1 = 0 - (-4) = 4 \end{aligned} \quad (6.95)$$

a więc

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2] = [-a_0 \quad -a_1] = [-5 \quad 4] \quad (6.96)$$

Ponieważ model matematyczny nie jest dany w postaci kanonicznej Frobeniusa, więc macierz transformująca

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

a stąd

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}\mathbf{P} = [-1 \quad 4] \quad (6.98)$$

Z przedstawionego przykładu wynika wniosek, że jeżeli przyjęto zadane położenie wartości własnych układu zamkniętego w początku układu współrzędnych, to przedstawiona metoda syntezy regulatora sprowadzi się do metody omówionej poprzednio (patrz równanie (6.73)), a więc proces przejściowy układu trwać będzie nie dłużej niż n okresów próbkowania T . Jeśli natomiast założy się inne położenie wartości własnych układu zamkniętego, proces przejściowy trwał będzie znacznie dłużej.

6.5.3. Wyznaczanie wartości parametrów klasycznych algorytmów regulacji

Do wyznaczania wartości parametrów podstawowych regulatorów dyskretnych, przy znanym okresie próbkowania T , są wykorzystywane modyfikacje metody Zieglera-Nicholsa, znane dla układów ciągłych. Otóż znając krytyczny współczynnik wzmocnienia k_{kr} regulatora proporcjonalnego i okres drgań T_{os} układu regulacji znajdującego się blisko lub na granicy stabilności, wartości parametrów regulatora wyznacza się z następujących zależności [18]:

- dla regulatora P

$$k_p = 0,5k_{kr} \quad (6.99)$$

- dla regulatora PI

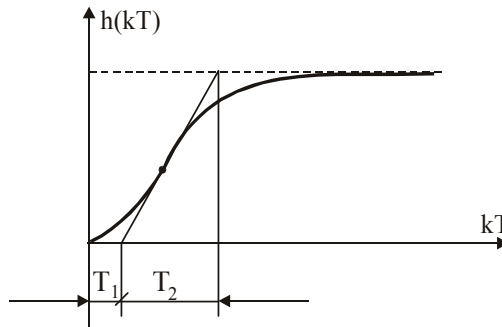
$$k_p = \left(0,45 - 0,27 \frac{T}{T_{os}} \right) k_{kr}, \quad \frac{T}{T_i} = 0,54 \frac{k_{kr} T}{k_p T_{os}} \quad (6.100)$$

przy czym stosuje się mniejsze wartości, jeżeli $T \approx 4T_1$, T_1 – zastępcze opóźnienie odpowiedzi czasowej układu (rys. 6.13),

- dla regulatora PID

$$k_p = k_{kr} \left(0,6 - 0,6 \frac{T}{T_{os}} \right), \quad \frac{T}{T_i} = 1,2 \frac{k_{kr} T}{k_p T_{os}}, \quad \frac{T_d}{T} = \frac{3}{40} \frac{k_{kr} T}{k_p T_{os}} \quad (6.101)$$

przy czym stosuje się tylko dla $T \leq 2T_1$.



Rys. 6.13. Odpowiedź skokowa obiektu

Jeżeli odpowiedź obiektu jest o charakterze aperiodycznym (rys. 6.13), to nastawy przyjmują wartości:

- dla regulatora P

$$k_p = \frac{T_2}{T_1 + T_2} \quad (6.102)$$

- dla regulatora PI

$$k_p = \frac{0,9T_2}{T_1 + 0,5T} - \frac{0,135T_2T}{(T_1 + 0,5T)^2}, \quad \frac{T}{T_i} = \frac{0,27T_2T}{k_p(T_1 + 0,5T)^2} \quad (6.103)$$

- dla regulatora PID

$$k_p = \frac{1,2T_2}{T_1 + T} - \frac{0,3T_2T}{(T_1 + 0,5T)^2}, \quad \frac{T}{T_i} = \frac{0,6T_2T}{k_p(T_1 + 0,5T)^2}, \quad \frac{T_d}{T} = \frac{0,5T_2}{k_pT} \quad (6.104)$$

przy czym nastaw tych nie stosuje się dla $T_1/T \rightarrow 0$.

W wielu przypadkach tak określone nastawy są wartościami początkowymi dla poszukiwania parametrów optymalnych. Do określania parametrów regulatorów stosuje się także inne metody, głównie metody optymalizacji statycznej.

PYTANIA

Pytania do rozdziału 1

- 1.1. Wyjaśnić pojęcia: automatyka, automatyzacja, teoria sterowania, sterowanie ręczne, sterowanie automatyczne.
- 1.2. Scharakteryzować krótko historię rozwoju automatyki.
- 1.3. Wyjaśnić istotę sterowania w układzie zamkniętym i w układzie otwartym. Podać przykłady.
- 1.4. Czym różni się sterowanie od regulacji?
- 1.5. Omówić wady i zalety sterowania w układzie otwartym i zamkniętym.
- 1.6. Wyjaśnić pojęcia: sygnał wejściowy, sygnał wyjściowy, sygnał uchybu, regulator, człon wykonawczy, obiekt sterowania, sprzężenie zwrotne, przetwornik pomiarowy.

Pytania do rozdziału 2

- 2.1. Przedstawić istotę oraz podstawowe właściwości ciągłego przekształcenia Laplace'a.
- 2.2. Przedstawić sposób wyznaczania oryginału transformaty Laplace'a na podstawie:
 - metody rozkładu na ułamki proste,
 - metody residuów,
 - rozkładu sygnału wejściowego na składniki.
- 2.3. Omówić problem dyskretyzacji sygnału ciągłego.
- 2.4. Scharakteryzować strukturę układu dyskretnego.
- 2.5. Podać przykład kwantyzacji oraz próbkowania sygnału.
- 2.6. Jaką funkcję w układzie sterowania spełnia impulsator (przetwornik analogowo-cyfrowy)?
- 2.7. Jaką funkcję w układzie sterowania spełnia ekstrapolator (przetwornik cyfrowo-analogowy)?
- 2.8. Narysować przykładowe widmo ciągłego i dyskretnego sygnału harmonicznego.
- 2.9. Sformułować twierdzenia Shannona-Kotielnikowa.
- 2.10. Podać istotę i podstawowe właściwości dyskretnego przekształcenia \mathcal{Z} .
- 2.11. Omówić metody odwrotnego przekształcenia \mathcal{Z} .

Pytania do rozdziału 3

- 3.1. Wymienić podstawowe formy opisu układu dynamicznego.
- 3.2. Przedstawić opis układu za pomocą równań różniczkowych.
- 3.3. Przedstawić opis układu za pomocą równań różnicowych.
- 3.4. Scharakteryzować opis układu ciągłego i dyskretnego za pomocą transmitancji operatorowej.
- 3.5. Scharakteryzować opis układu ciągłego i dyskretnego za pomocą transmitancji widmowej.
- 3.6. Co to jest charakterystyka statyczna układu? Podaj sposób jej wyznaczenia na podstawie eksperymentu, równania różniczkowego i transmitancji operatorowej.
- 3.7. Przedstawić opis układu ciągłego za pomocą równań stanu.
- 3.8. Przedstawić opis układu dyskretnego za pomocą równań stanu.
- 3.9. Wyprowadzić związek między równaniami stanu a transmitancją dla układu ciągłego i dyskretnego.
- 3.10. Omówić podstawowe charakterystyki czasowe układu ciągłego i dyskretnego.
- 3.11. Analityczne i eksperymentalne wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych.

Pytania do rozdziału 4

- 4.1. Wymienić i omówić standardowe sygnały wymuszające.
- 4.2. Scharakteryzować klasyczne metody analizy.
- 4.3. Omówić operatorowe metody analizy.
- 4.4. Jakie są podstawowe zasady budowy schematów blokowych?
- 4.5. Podstawowe metody przekształcania schematów blokowych – omówić i podać przykłady.
- 4.6. Wyprowadzić zależności określające transmitancje ciągłego i dyskretnego układu: otwartego, zamkniętego oraz uchybową.
- 4.7. Omówić metody dyskretnej aproksymacji układów ciągłych.
- 4.8. Wymienić i podać interpretację fizyczną podstawowych parametrów członów dynamicznych. Oblicz parametry dla zadanej postaci transmitancji układu.
- 4.9. Przedstawić problem wyznaczania uchybu ustalonego.
- 4.10. Omówić podstawowe człony dynamiczne (proporcjonalny, inercyjny pierwszego rzędu, całkujący, różniczkujący, inercyjne drugiego rzędu i opóźniający).
- 4.11. Zapisać transmitancję układu ciągłego bez zer i z zerami w przestrzeni stanów.

- 4.12. Zapisać transmitancję układu dyskretnego bez zer i z zerami w przestrzeni stanów.
- 4.13. Co to są wartości własne układu?
- 4.14. Odpowiedź czasowa układu swobodnego i wymuszonego, opisanego równaniami stanu.

Pytania do rozdziału 5

- 5.1. Wyjaśnić pojęcia: układ stabilny asymptotycznie, stabilny nieasymptotycznie, stabilny globalnie, stabilny lokalnie i niestabilny.
- 5.2. Co to jest punkt (stan) równowagi?
- 5.3. Podać warunek konieczny i wystarczający stabilności asymptotycznej układu ciągłego.
- 5.4. Algebraiczne kryteria stabilności ciągłych układów dynamicznych.
- 5.5. Częstotliwościowe kryteria stabilności ciągłych układów dynamicznych.
- 5.6. Podać warunek konieczny i wystarczający stabilności asymptotycznej układu dyskretnego.

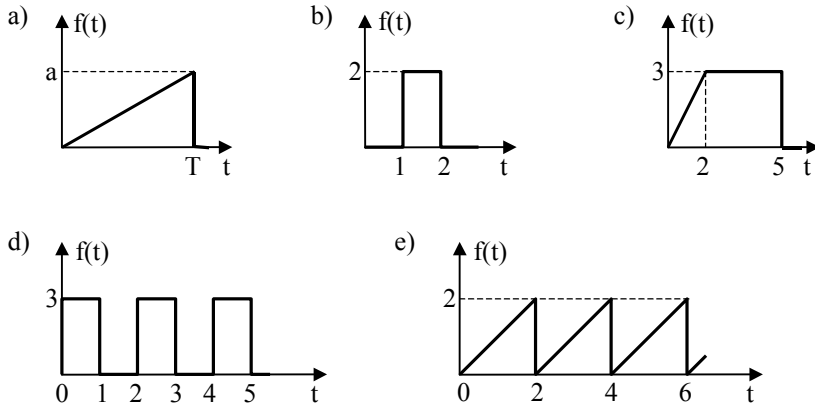
Pytania do rozdziału 6

- 6.1. Przedstawić istotę problemu syntezy układu regulacji.
- 6.2. Napisać transmitancje oraz narysować charakterystyki skokowe i częstotliwościowe podstawowych regulatorów analogowych.
- 6.3. Napisać równania różnicowe podstawowych regulatorów dyskretnych.
- 6.4. Wymienić metody zwiększenia dokładności statycznej układu.
- 6.5. Synteza układów regulacji bazująca na rozkładzie pierwiastków równania charakterystycznego.
- 6.6. Scharakteryzować metody czasowe syntezy ciągłych i dyskretnych układów regulacji (zasada Zieglera-Nicholsa).
- 6.7. Scharakteryzować metody przestrzeni stanów syntezy układów ciągłych.
- 6.8. Przedstawić sposób wyznaczenia transmitancji regulatora dla zadanej transmitancji dyskretnego układu zamkniętego.
- 6.9. Scharakteryzować metody przestrzeni stanów syntezy układów dyskretnych.

ZADANIA

Zadania do rozdziału 2

Zadanie 2.1. Wyznaczyć transformaty Laplace'a funkcji przedstawionych na rys. Z.2.1.



Rys. Z.2.1. Wykresy funkcji

Zadanie 2.2. Dane są transformaty $Y(s)$ odpowiedzi układu. Wyznaczyć wartości ustalone tych odpowiedzi

a) $Y(s) = \frac{2s + 1}{s(s^2 + 3s + 2)}$

b) $Y(s) = \frac{1}{s^2(s + 2)^2}$

Zadanie 2.3. Korzystając z metody rozkładu na ułamki proste, wyznaczyć oryginały transformat:

a) $Y(s) = \frac{s + 2}{s(s + 1)(s + 3)}$

b) $Y(s) = \frac{1}{(s + 2)^2(s + 3)}$

c) $Y(s) = \frac{s + 2}{s^2(s + 1)}$

Zadanie 2.4. Korzystając z metody residuum, wyznaczyć oryginały transformat podanych w zadaniu 2.3.

Zadanie 2.5. Stosując metodę rozkładu na ułamki proste, wyznaczyć oryginały następujących transformat:

a) $Y(z) = \frac{1}{(z - 0,2)(z - 0,5)}$

b) $Y(z) = \frac{z + 0,5}{(z + 0,1)(z + 0,6)}$

$$\text{c) } Y(z) = \frac{z+1}{(z+0,5)^2}$$

$$\text{d) } Y(z) = \frac{z+0,1}{(z+0,2)^2(z+0,5)}$$

Zadanie 2.6. Stosując metodę szeregu potęgowego, wyznaczyć oryginały w chwilach $n = 0, 1, 2, 3$ dla następujących transformat:

$$\text{a) } Y(z) = \frac{z+1}{z+0,5}$$

$$\text{b) } Y(z) = \frac{z^2}{z^2 + 2z + 1}$$

Zadanie 2.7. Stosując metodę residuów, wyznaczyć oryginały transformat przedstawionych w zadaniu 2.6.

Zadania do rozdziału 3

Zadanie 3.1. Dane są równania różnicowe:

$$\text{a) } y(k) = u(k) - 2u(k-1) + y(k-1) - 3y(k-2)$$

$$\text{b) } y(k+1) = u(k) - 5u(k-2) + y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)$$

Wyznaczyć transmitancje dyskretne.

Zadanie 3.2. Wyznaczyć transmitancje dla danych równań stanu:

$$\text{a) } \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\text{b) } \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

Zadanie 3.3. Wyznaczyć transmitancje dyskretne dla danych równań stanu:

$$\text{a) } \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\text{b) } \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

Zadanie 3.4. Wykreślić charakterystyki częstotliwościowe (amplitudowo-fazowe oraz logarytmiczne) dla układów o następujących transmitancjach:

$$\text{a) } G(s) = \frac{100}{s(2s+1)}$$

$$\text{b) } G(s) = \frac{10}{s(s+5)}$$

Zadania do rozdziału 4

Zadanie 4.1. Rozwiązać następujące równania różniczkowe:

- a) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 0$ $y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$
b) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 1$ $y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 0$
c) $\ddot{y} + \dot{y} + y = 2t$ $y(0) = \dot{y}(0) = 0$

Zadanie 4.2. Wyznaczyć odpowiedź impulsową i skokową następujących układów:

- a) $G(s) = \frac{1}{s+5}$
b) $G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$

Zadanie 4.3. Wyznaczyć odpowiedź impulsową i skokową następujących układów:

- a) $G(z) = \frac{z+1}{z+0,5}$
b) $G(z) = \frac{z}{(z+0,1)(z+0,2)^2}$

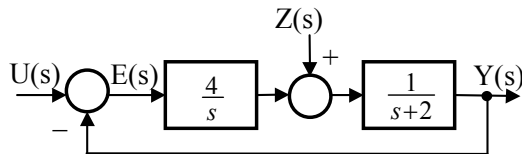
Zadanie 4.4. Dla układu z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym należy wyznaczyć wartość uchybu w stanie ustalonym, jeżeli transmitancja układu otwartego jest następująca:

- a) $G_o(s) = \frac{50}{(s+1)(s+2)}$ b) $G_o(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+5)}$

a sygnał sterujący przyjmuje postać:

- 1) $u(t) = 1(t)$; 2) $u(t) = t$; 3) $u(t) = t^2$

Zadanie 4.5. Wyznaczyć wartość ustaloną uchybu w układzie regulacji przedstawionym na rys. Z.4.1, przy czym $u(t) = 1(t)$, a $z(t) = 2t$.



Rys. Z.4.1. Schemat blokowy układu regulacji

Zadanie 4.6. Zapisz podane niżej równania różniczkowe w przestrzeni stanów:

a) $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2u,$

c) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 2u + \dot{u}$

b) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = \dot{u}$

d) $\ddot{y} + \dot{y} + 2y = u + 3\dot{u} + 2\ddot{u}$

Zadanie 4.7. Zapisać w postaci równań stanu następujące transmitancje dyskretne:

a) $G(z) = \frac{z+1}{z^2+z+1}$

b) $G(z) = \frac{z^2+2z+1}{z^2+5z+2}$

Zadanie 4.8. Wyznaczyć odpowiedź czasową układów:

a) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 1(t)$

Zadania do rozdziału 5

Zadanie 5.1. Zbadać stabilność układu, gdy dana jest jego transmitancja:

a) $G(s) = \frac{10s+45}{2s^4+2s^3+7s^2+6s+3}$

b) $G(s) = \frac{s^2+10}{4s^5+10s^4+10s^3+20s^2+s+1}$

c) $G(s) = \frac{s+5}{s^4+5s^2+4}$

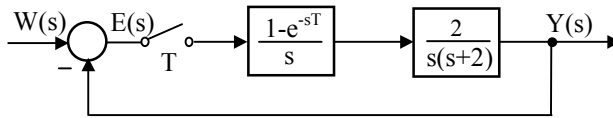
d) $G(s) = \frac{1}{s^5+s^4+10s^3-11s+1}$

Zadanie 5.2. Określić stabilność układu zamkniętego, jeśli jest dana transmitancja układu otwartego. Określić zapas stabilności:

a) $G(s) = \frac{10}{s(s+2)}$

b) $G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s-1)}$

Zadanie 5.3. Korzystając z algebraicznych kryteriów stabilności zbadać stabilność układu przedstawionego na rys. Z.5.1.



Rys. Z.5.1. Schemat blokowy układu regulacji

Zadania do rozdziału 6

Zadanie 6.1. Dany jest obiekt regulacji o transmitancji

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s-1)}$$

Zaprojektować układ regulacji (dobrać typ i parametry regulatora), zapewniający stabilność układu.

Zadanie 6.2. Dany jest obiekt regulacji

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

Zaprojektować układ regulacji, zapewniający stabilność układu.

Zadanie 6.3. Dla obiektu o transmitancji

$$G(s) = \frac{10}{(s+0,1)(s+1)}$$

Zaprojektować układ regulacji, aby czas regulacji wynosił (w przybliżeniu) 10 sekund.

Zadanie 6.4. Dany jest obiekt regulacji o transmitancji

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 1}$$

Dobrać typ i parametry regulatora, aby bieguny układu z regulatorem osiągnęły wartość -10 .

Zadanie 6.5. Dany jest obiekt

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2-3s+2}$$

Dobrać wzmocnienia proporcjonalnych sprzężeń zwrotnych od stanu (parametry regulatora stanu) zapewniających stabilność asymptotyczną obiektu.

Zadanie 6.6. Dany jest obiekt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t), \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Wyznaczyć macierz regulatora stanu, aby wartości własne układu skorygowanego miały wartości: $\lambda_1 = -6$ i $\lambda_2 = -7$.

Zadanie 6.7. Dany jest obiekt

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

Wyznaczyć transmitancję i równanie różnicowe regulatora umiejscowionego w torze głównym, aby:

- czas trwania stanu nieustalonego był minimalny (regulator czasooptymalny),
- bieguny układu z regulatorem były równe: $z_1 = z_2 = 0,5$.

Zadanie 6.8. Dany jest obiekt

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

Wyznaczyć parametry regulatora stanu, aby:

- czas trwania stanu nieustalonego był minimalny (regulator czasooptymalny),
- wartości własne układu z regulatorem były równe: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$.

LITERATURA

1. ACKERMAN J.: Regulacja impulsowa. Warszawa, WNT 1976.
2. AMBORSKI K., MARUSAK A.: Teoria sterowania w ćwiczeniach. Warszawa, PWN 1978.
3. AMBORSKI K., MARUSAK A.: Ćwiczenia z automatyki, cz. III. Układy impulsowe i optymalne. Warszawa, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej 1977.
4. CANNON R.H.: Dynamika układów fizycznych. Warszawa, WNT 1973.
5. CRUZ J.B.: Układy ze sprzężeniem zwrotnym. Warszawa, BNI 1977.
6. DOUGLAS J.M.: Dynamika i sterowanie procesów. Analiza układów dynamicznych. Warszawa, WNT 1976.
7. FINDEISEN W.: Technika regulacji automatycznej. Warszawa, PWN 1978.
8. GÓRECKI H.: Algorytmy i programy sterowania. Warszawa, WNT 1978.
9. HOLEJKO D., KOŚCIELNY W., NIEWCZAS W.: Zbiór zadań z podstaw automatyki. Warszawa, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej 1978.
10. JURY E.I.: Przekształcenie Z i jego zastosowania. Warszawa, WNT 1977.
11. KACZOREK T.: Teoria układów regulacji automatycznej. Warszawa, WNT 1977.
12. KACZOREK T.: Teoria sterowania. T. 1 i 2. Warszawa, PWN 1977.
13. KACZOREK T.: Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych liniowych. Warszawa, WNT 1983.
14. KACZOREK T.: Teoria układów regulacji automatycznej. Cz. 1. Warszawa, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej 1976.
15. KACZOREK T.: Teoria sterowania i systemów. Warszawa, PWN 1993.
16. KLAMKA J.: Zbiór zadań z teorii systemów i teorii sterowania. Gliwice, Wydawnictwa Politechniki Śląskiej 1980.
17. LARMINAT P., THOMAS Y.: Automatyka – układy liniowe. T. 1 i 2. Warszawa, WNT 1983.
18. NIEDERLIŃSKI A.: Systemy komputerowe automatyki przemysłowej. T. 2. Warszawa, WNT 1985.
19. OGATA K.: Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania. Warszawa, WNT 1974.
20. PEŁCZEWSKI W.: Teoria sterowania. Warszawa, WNT 1980.
21. STEFAŃSKI T.: Teoria sterowania. T. 1 i 2. Kielce, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej 1996, 1997.
22. TAKAHASHI Y., RABINS M., AUSLANDER D.: Sterowanie i systemy dynamiczne. Warszawa, WNT 1976.