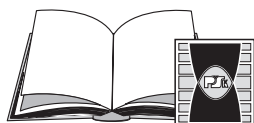


MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY

M13

Krzysztof Grysa

**FUNKCJE TREFFTZA
I ICH ZASTOSOWANIA
W ROZWIĄZYWANIU ZAGADNIEŃ
ODWROTNYCH**



WYDAWNICTWO
POLITECHNIKI ŚWIĘTOKRZYSKIEJ
W KIELCACH

Kielce 2010

MONOGRAFIE, STUDIA, ROZPRAWY NR M13

Redaktor Naukowy serii

NAUKI TECHNICZNE - MECHANIKA

prof. dr hab. Andrzej RADOWICZ

Recenzent

prof. dr hab. inż. Ryszard A. BIAŁECKI

Redakcja

Elżbieta WIKŁO

Redakcja techniczna

Irena PRZEORSKA-IMIOŁEK

Projekt okładki

Tadeusz UBERMAN

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 2010

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część tej pracy nie może być powielana czy rozpowszechniana w jakiegokolwiek formie, w jakikolwiek sposób: elektroniczny bądź mechaniczny, włącznie z fotokopiowaniem, nagrywaniem na taśmy lub przy użyciu innych systemów, bez pisemnej zgody wydawcy.

PL ISSN 1897-2691



25-314 Kielce, Al. 1000-lecia Państwa Polskiego 7, tel. 41 34 24 581
www.tu.kielce.pl/organizacja/wydawnictwo e-mail: wydawca@tu.kielce.pl

Spis treści

1. WSTĘP	7
2. ZAGADNIENIA ODWROTNE I ZAGADNIENIA ŹŁE POSTAWIONE	11
2.1. Zagadnienia dobrze postawione i zagadnienia źle postawione	11
2.2. Najprostsze problemy źle postawione	13
2.3. Przykłady zagadnień odwrotnych	19
2.3.1. Analiza obrazu	20
2.3.2. Tomografia komputerowa	20
2.3.3. Geofizyka	21
2.3.4. Problemy nawigacji	21
2.3.5. Dopasowanie modelu do danych	21
2.3.6. Odtwarzanie niewyraźnego obrazu (odseparowanie zakłóceń)	22
2.3.7. Obiekty w Kosmosie	23
2.3.8. Odwrotny problem rozpraszania	23
2.3.9. Problemy przewodnictwa cieplnego	25
2.4. Wybrane metody rozwiązywania liniowych zagadnień odwrotnych	27
2.4.1. Metoda SVD a zagadnienia odwrotne	28
2.4.2. Regularyzacja Tichonowa	32
2.4.3. Iteracja Landwebera	34
2.4.4. Wybór parametru regularyzacji - zasada niezgodności Morozowa	34
2.4.5. Metoda gradientów sprzężonych	36
2.4.6. Metoda Levenberga-Marquardta	38
2.4.7. Regularyzacja przez dyskretyzację	41
2.4.8. Inne metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych	42
3. FUNKCJE TREFFTZA I ICH WŁASNOŚCI	45
3.1. Metoda Trefftza	45
3.2. Funkcje Trefftza dla równania Laplace'a	48
3.2.1. Równanie Laplace'a w przestrzeni dwuwymiarowej	49
3.2.2. Równanie Laplace'a w przestrzeni trójwymiarowej	53
3.2.3. Równanie Laplace'a w układzie (r, z)	58
3.3. Funkcje Trefftza dla równania przewodnictwa cieplnego	62
3.3.1. Niestacjonarne jednowymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego	62
3.3.2. Niestacjonarne dwuwymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego	64
3.3.3. Równanie przewodnictwa cieplnego w układzie (r, t)	64
3.3.4. Równanie przewodnictwa cieplnego w układzie (r, φ, t)	69
3.3.5. Równanie przewodnictwa cieplnego w układzie (r, z, t)	70
3.3.6. Niestacjonarne trójwymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego	71
3.3.7. Równanie przewodnictwa cieplnego dla pręta z boczną wymianą ciepła (w żębrze)	72

3.4. Funkcje Trefftza dla równania falowego	73
3.4.1. Dwuwymiarowe równanie falowe	73
3.4.2. Trójwymiarowe równanie falowe	77
3.4.3. Równanie falowe w układzie (r, z, t)	80
3.4.4. Równanie falowe w układzie (r, φ, t)	83
3.5. Funkcje Trefftza dla równania Helmholtza	89
3.6. Funkcje Trefftza dla równania drgań belki	92
3.7. Funkcje Trefftza dla równania drgań płyty	96
3.7.1. Równanie drgań płyty w układzie kartezjańskim	96
3.7.2. Równanie drgań płyty w układzie biegunowym	99
3.8. Funkcje Trefftza dla równania biharmonicznego	99
3.8.1. Równanie biharmoniczne w układzie kartezjańskim	99
3.8.2. Równanie biharmoniczne w układzie biegunowym	101
3.9. Funkcje Trefftza dla zagadnień elastostatyki	102
3.9.1. Równania Beltrami-Michella	103
3.9.2. Metoda Boussinesq'a	104
3.9.3. Rozwiązanie Kelvina	108
3.9.4. Wielomiany Kompisa	108
3.9.5. Płaski stan naprężenia/odkształcenia	111
3.10. Funkcje Trefftza dla zagadnień elastokinetyki	114
3.10.1. Ogólne rozwiązanie Lamégo	114
3.10.2. Inne możliwości wykorzystania funkcji Trefftza	115
3.11. Inne rodzaje T-funkcji	116
4. METODA TREFFTZA	119
4.1. Pośrednie i bezpośrednie podejścia do metody Trefftza	119
4.2. Pośrednia metoda Trefftza dla zagadnień stacjonarnych	121
4.2.1. Podejście koloakcyjne do metody Trefftza	121
4.2.2. Metoda aproksymacji brzegowej – podejście całkowite	123
4.2.3. Podejście wykorzystujące metodę najmniejszych kwadratów	125
4.2.4. Sformułowanie wykorzystujące metodę Galerkina	128
4.2.5. Zmodyfikowana pośrednia metoda Trefftza	129
4.2.6. Podsumowanie pośredniej metody Trefftza	130
4.3. Pośrednia metoda Trefftza dla zagadnień niestacjonarnych	131
4.4. Bezpośrednia metoda Trefftza	132
4.5. Uwagi o zastosowaniach metody Trefftza	134
5. FUNKCJE TREFFTZA W ZAGADNIENIACH IDENTYFIKACJI WARUNKÓW BRZEGOWYCH	135
5.1. Zagadnienia opisane równaniem Laplace'a	135
5.1.1. Rozwiązania uzyskane bez dzielenia obszaru na elementy skończone	135
B.1: Kwadrat, problem brzegowy	135
B.2: Ścianka dwuwarstwowa	137

B.3: Walec kołowy	141
B.4: Kwadrat, metoda Becka	143
5.1.2. Rozwiązania uzyskane z podziałem obszaru na elementy skończone	148
B.5: Kwadrat, podział na cztery elementy	148
B.6: Kwadrat, cztery elementy, analiza ciągłości rozwiązania między elementami	151
B.7: Łopatka turbiny, MEST	157
B.8: Kwadrat, trzy rodzaje MEST, regularyzacja energetyczna	160
5.2. Zagadnienia opisane równaniem przewodnictwa cieplnego	165
B.9: Warstwa płaska, zagadnienie początkowo-brzegowe, stygnięcie	165
B.10: Korpus turbiny	168
B.11: Walec	173
B.12: Kwadrat, trzy rodzaje MEST, regularyzacja energetyczna	178
5.3. Zagadnienia opisane równaniem falowym	185
B.13: Drgania kwadratowej membrany, zagadnienie początkowo-brzegowe	185
B.14: Drgania kwadratowej membrany, identyfikacja warunków brzegowych	188
5.4. Zagadnienia sprężystości	190
B.15: Kwadrat, identyfikacja przemieszczeń na części brzegu	191
 6. FUNKCJE TREFFTZA W ZAGADNIENIACH IDENTYFIKACJI WSPÓŁCZYNNIKÓW	 195
W.1: Współczynnik przejmowania ciepła na powierzchni ścianki dwuwarstwowej	195
W.2: Liczba Biota na powierzchni warstwy płaskiej	197
W.3: Współczynnik przejmowania ciepła na powierzchni wewnętrznej łopatkı turbiny	200
W.4: Wyznaczanie współczynnika dyfuzyjności cieplnej	202
W.5: Wyznaczanie współczynnika przewodnictwa cieplnego	204
 7. FUNKCJE TREFFTZA W ZAGADNIENIACH IDENTYFIKACJI ŹRÓDEŁ	211
 8. UWAGI KOŃCOWE	221
 Bibliografia	223

1. Wstęp

Zagadnienia odwrotne od lat trzydziestych dwudziestego stulecia stanowiły wyzwanie dla matematyków i inżynierów. Jako zagadnienia źle postawione prowokowały do szukania matematycznych sposobów prowadzących do rozwiązań, a w miarę rozwoju metod numerycznych – także do eksperymentów numerycznych. Nieco uwag na ten temat można znaleźć w rozdziale drugim.

Przez wiele lat uzyskanie rozwiązań obarczonych błędem 5-10% było sukcesem badaczy. Wiązało się to zarówno z naturą danych wejściowych, zwykle obarczonych błędem, jak i niedostatkiem metod obliczeniowych, które w miarę upływu lat dopiero się rozwijały.

Można powiedzieć, że artykuł Trefftza z 1926 roku, [T26], nie mógł wywrzeć większego wpływu na rozwój metod obliczeniowych do czasu dwóch wielkich przełomów w naukach stosowanych: powstania metody elementów skończonych i upowszechnienia metod numerycznych. Także matematycy – poza nielicznymi pracami, np. [RW56] – raczej nie poświęcali uwagi pomysłowi Trefftza. Dopiero w latach siedemdziesiątych idea Trefftza została odkryta na nowo powodując lawinę artykułów. W końcu 2009 roku wyszukiwarka Google Scholar na hasło „Trefftz” pokazywała ok. 5000 artykułów (niektóre zapewne kilka razy, ale liczba ich i tak jest znaczna), zaś Google – ponad 123 000 witryn, gdzie słowo „Trefftz” jest wspomniane.

Termin „metoda Trefftza” dość szybko zyskał sobie obywatelstwo w społeczności badaczy. Powstawały rozmaite jej odmiany i uogólnienia, które były przedstawiane w kolejnych artykułach i wystąpieniach konferencyjnych.

Do końca lat dziewięćdziesiątych dwudziestego wieku olbrzymia większość artykułów i wszystkie znane autorowi monografie omawiały metodę Trefftza w odniesieniu do zagadnień stacjonarnych lub takich, w których czas został wyeliminowany. Prowadziło to do analizy problemów opisanych równaniem Laplace’a, Poissona, Helmholtza, biharmonicznym i innymi, w których występowały tylko zmienne przestrzenne. Było to także związane z zastosowaniami metody elementów skończonych, także skonstruowanej z myślą o zagadnieniach stacjonarnych. Bardzo obszerny przegląd monografii i artykułów poświęconych metodzie Trefftza można znaleźć w opublikowanej w 2009 roku monografii Kołodzieja i Zielińskiego, [KZ09].

Wśród badaczy, którzy wnieśli ogromny wkład w rozwój metody Trefftza, można wymienić, oprócz wspomnianych wyżej autorów monografii [KZ09], takie nazwiska jak Herrera, Jiroušek, Freitas, Zienkiewicz, Wróblewski i wielu innych. Szerszy przegląd literatury zawarty jest w rozdziale drugim oraz po części w każdym z pozostałych rozdziałów.

Rozwój metody Trefftza w odniesieniu do zagadnień niestacjonarnych zainicjowała praca Rosenbloom i Widdera, [RW56], w której przedstawiono tzw. wielomiany ciepłne, będące w istocie funkcjami Trefftza dla jednowymiarowego (w sensie przestrzennym) równania parabolicznego. Praca ta została dostrzeżona m.in. w artykułach [PW69, R81, YFK83, LR84], lecz dopiero w pracach [R97, H99] i monografii [CF00] jej wyniki doczekały się rozwinięcia i uogólnienia na inne typy równań. Idea zawarta w pracy została znacznie poszerzona przede wszystkim we wspomnianej już monografii [CF00], w której m.in. przedstawiono różne sposoby generowania funkcji Trefftza dla liniowych równań różniczkowych cząstkowych, wskazano sposób uwzględniania niejednorodności, jak również przedstawiono przykłady zastosowań funkcji Trefftza (nazywanych tam wielomianami ciepłnymi lub funkcjami rozwiązującymi) w odniesieniu do stacjonarnych i niestacjonarnych zagadnień wymiany ciepła (także w 2D i w 3D). Ponadto wyprowadzono tam funkcje Trefftza dla jednowymiarowego równania falowego.

Badania dotyczące zastosowań funkcji Trefftza do rozwiązywania zagadnień odwrotnych, zainicjowane pracą [H99] były następnie rozwijane w dwóch ośrodkach: na Politechnice Świętokrzyskiej w Kielcach oraz na Politechnice Poznańskiej. Wynikiem współpracy tych dwóch ośrodków w pierwszej dekadzie XXI wieku było m.in. ok. dziesięć rozpraw doktorskich, poświęconych metodzie Trefftza w odniesieniu do zagadnień niestacjonarnych oraz jedna praca habilitacyjna, a ponadto kilkadziesiąt artykułów i wystąpień konferencyjnych. Funkcje Trefftza zostały zbadane i zastosowane w odniesieniu do zagadnień niestacjonarnych wymiany ciepła, ruchu falowego, elastokinetyki, zagadnień niestacjonarnych dotyczących belek i płyt, a także w odniesieniu do wielu problemów stacjonarnych.

Stan wiedzy na temat funkcji Trefftza w odniesieniu do zagadnień stacjonarnych dobrze ilustrują tablice, przedstawione w rozdziale 3 monografii [KZ09], a także po części w pracach [Z95, Q00, CLS09, Q09] i innych, w której przedstawiono układy T-funkcji (układy zupełne funkcji Trefftza) dla różnych równań różniczkowych cząstkowych.

Zastosowania funkcji Trefftza w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych nie doczekały się, jak dotąd, opracowania w formie monografii. Mam nadzieję, że niniejsza książka zainteresuje czytelników zarówno ze względu na przedstawione układy funkcji Trefftza dla wielu zagadnień niestacjonarnych, jak i ze względu na przedstawione zastosowania ich do rozwiązywania zagadnień odwrotnych.

Książka przeznaczona jest dla pracowników naukowych i studentów wyższych lat studiów. W niektórych rozdziałach zawarte są pojęcia z zakresu analizy funkcjonalnej, takie jak przestrzenie Sobolewa, przestrzenie Hilberta, funkcje Bessela, operatory ograniczone, nieograniczone, pojęcia funkcjonału, zagadnienia Cauchy'ego, transformacji Radona, przestrzeni Kryłowa. Pojęcia te są potrzebne do zachowania poprawności matematycznej, jednak w głównym nurcie rozważań (rozdziały 3-7) ich znaczenie dla zrozumienia treści książki jest nieznaczne lub wprowadzone pojęcia są przedstawione w formie zastosowań, co ułatwia zarówno przyswojenie sobie nazewnictwa jak i zrozumienie istoty tych pojęć.

Układ książki jest następujący:

Rozdział drugi poświęcono podstawowym pojęciom dotyczącym zagadnień odwrotnych i zagadnień źle postawionych. Czytelnik, który chce od razu przejść do rozdziału trzeciego, może rozdział drugi opuścić.

W rozdziale trzecim omówiono w ogólnych zarysach metodę Trefftza, a następnie przedstawiono układy funkcji Trefftza kolejno dla równania Laplace'a, równania przewodnictwa cieplnego, równania falowego, równania Helmholtza, równań drgań belki i drgań płyty, równania biharmonicznego, dla zagadnień elastostatyki i dla zagadnień elastokinetyki. W ostatnim podrozdziale omówiono inne rodzaje T-funkcji, opierając się na pracy [Z95].

W rozdziale czwartym omówiono przedstawione w literaturze metody matematyczne noszące wspólną nazwę „metoda Trefftza”.

Rozdziały piąty, szósty i siódmy poświęcono przykładom zastosowań funkcji Trefftza do rozwiązywania niestacjonarnych zagadnień odwrotnych identyfikacji wartości brzegowych poszukiwanych funkcji, identyfikacji współczynników oraz identyfikacji źródła.

W rozdziale ósmym podano krótko uwagi dotyczące ewentualnych dalszych kierunków badań dotyczących funkcji Trefftza dla zagadnień niestacjonarnych.

Cytowane prace zostały opisane pierwszymi literami nazwisk autora (autorów) tych prac oraz ostatnimi dwiema cyframi roku ich opublikowania. Taki sposób opisu artykułów i monografii spowodował, że w bibliografii nazwiska autorów zaczynające się na kolejne litery alfabetu podane są w obrębie tej litery (grupy liter) w kolejności, wynikającej z ostatnich dwóch cyfr roku opublikowania tych artykułów/monografii.

Autor składa serdeczne podziękowania Recenzentowi, prof. dr hab. Inż. Ryszardowi Białeckiemu, za uwagi i sugestie, które przyczyniły się do wzbogacenia treści tej monografii.

2. Zagadnienia odwrotne i zagadnienia źle postawione

2.1. ZAGADNIENIA DOBRZE POSTAWIONE I ZAGADNIENIA ŹLE POSTAWIONE

Problemy inżynierskie czy zjawiska fizyczne są modelowane matematycznie przez określenie równań różniczkowych (zwyczajnych lub cząstkowych) lub całkowych „rządzących” problemem, przez określenie kształtu, rodzaju (obszar jednorodny, wielorodny) i wielkości obszaru, warunków początkowych i brzegowych, własności materiału mediów zawartych w obszarze, a także przez wewnętrzne źródła i zewnętrzne siły albo przyczyny, powodujące stan czy proces rozważany w modelowanym problemie. Jeżeli wszystkie informacje dotyczące matematycznego modelu tego problemu są znane, mamy do czynienia z zagadnieniem analizy (albo z zagadnieniem bezpośrednim, często nazywanym prostym, ang. *direct problem*) i ogólnie rozważamy je jako dobrze postawione (ang. *well-posed*).

Pojęcie „problem dobrze postawiony” wprowadził Jacques Hadamard [H02], wg którego dobrze postawiony model matematyczny zjawiska fizycznego powinien mieć następujące właściwości:

Definicja 2.1.1. Problem jest nazywany dobrze postawionym, jeżeli:

- 1) istnieje jego rozwiązanie (istnienie),
- 2) jest ono jedyne (jednoznaczność),
- 3) rozwiązanie zależy w sposób ciągły od danych wejściowych (stabilność).

Typowe problemy dobrze postawione to np. zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace’a czy równanie przewodnictwa cieplnego z określonym warunkiem początkowym i warunkami brzegowymi.

Przy rozważaniu, czy zagadnienie jest dobrze postawione, szczególnie ważne jest zrozumienie warunków jednoznaczności. Definiuje się je osobno dla różnego typu modeli matematycznych opisujących zjawiska fizyczne. Z uwagi na to, że w niniejszej monografii – poza niektórymi przykładami przedstawionymi w rozdziale drugim – omawiane są zagadnienia opisane równaniami różniczkowymi liniowymi, warunki jednoznaczności rozwiązania można określić następująco:

- znany jest model matematyczny (równanie różniczkowe opisujące badane zjawisko),
- znany jest obszar, w którym zachodzi (ma miejsce) badane zjawisko,
- znane są parametry fizyczne, wchodzące w skład współczynników w tym modelu matematycznym (tzn. znana jest postać funkcji opisujących te współczynniki dla rozważanego zakresu zmiennych przestrzennych i czasowych oraz dla rozważanego zakresu zmienności poszukiwanej funkcji),
- znane są tzw. wymuszenia, zwykle zapisywane po prawej stronie równań (nazywane źródłami, siłami masowymi lub skupionymi, ...),
- znane są warunki panujące na całym brzegu obszaru, w którym rozważany jest model matematyczny badanego zjawiska, przy czym wśród tych warunków przynajmniej na części brzegu musi być sformułowany warunek Dirichleta (określający wartość funkcji na brzegu) lub warunek Robina (określający zależność pomiędzy funkcją a jej pochodną normalną na brzegu),
- gdy rozważane zagadnienie jest niestacjonarne, znane muszą być warunki początkowe dla funkcji i jej pochodnych względem czasu do stopnia $k - 1$, gdzie k jest stopniem najwyższej pochodnej po czasie w równaniu różniczkowym (równaniach różniczkowych), opisującym badane zjawisko.

Jeżeli któryś ze wspomnianych w definicji 2.1.1 warunków jest nieznany albo niedostępny, lub informacja np. o warunkach brzegowych jest niekompletna (na części brzegu warunek jest nieznany), wówczas mówimy o zagadnieniu odwrotnym (ang. *indirect* albo *inverse problem*). Takie problemy uważane są za źle postawione (ang. *ill-posed*) i często są nierozwiązywalne. W ogólności mogą mieć one więcej niż jedno rozwiązanie, w którym/których zależność od danych wejściowych jest nieciągła.

Jednoznaczność rozwiązania zagadnienia odwrotnego często jest niełatwa do wykazania. Jest to ważna sprawa. Jeżeli jednoznaczność nie jest zagwarantowana przez dane wejściowe, to albo potrzebne są dodatkowe dane, albo zbiór dopuszczalnych rozwiązań musi zostać ograniczony przy użyciu z góry zadanych informacji o rozwiązaniu. Innymi słowy, remedium na niejednoznaczność może być przeformułowanie problemu.

Wśród wspomnianych trzech kryteriów Hadamarda najbardziej delikatnym i najtrudniejszym do spełnienia lub wykazania jest kryterium trzecie. Nieunikniony podczas pomiarów błąd zaokrągleń może bowiem zostać podczas obliczeń numerycznych silnie wzmocniony, a ich wyniki mogą okazać się całkowicie bezsensowne.

Aż do początku XX wieku wierzono, że dla problemów „naturalnych” rozwiązanie będzie zawsze zależało w sposób ciągły od danych wejściowych (*Natura nie czyni skoków*. Arystoteles). Jeśli tak nie było, matematyczny model problemu był uważany za nieadekwatny. To z tego powodu takie problemy były nazywane źle postawionymi (*ill-posed* albo *badly posed*).

Dopiero w drugiej połowie XX wieku zdano sobie sprawę z tego, że olbrzymia liczba problemów pojawiających się w naukach ścisłych i w technice to zagadnienia źle postawione. To stało się przyczyną badań i poszukiwań stabilnych, a także wystarczająco dokładnych metod numerycznego rozwiązywania tych zagadnień. Dzisiaj odwrotne i źle postawione zagadnienia są wciąż obszarem aktywnych badań. Znajduje to odbicie w dużej liczbie naukowych periodyków, np. "Inverse Problems", "International Journal of Inverse and Ill-Posed Problems", "Inverse Problems in Science and Engineering" i monografii, [L67, TA77, G83, G84, BBS85, H86, B87, L89, M93, A94, BG95, T95, KN95, K96, D98, I98, D99, EHN00, OO00, POV00, P01, LALP03, R04, ATB05] oraz w wielu innych publikacjach. O roli funkcji Trefftza w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych wydano – jak dotąd – jedną monografię; zakres omawianych tam zagadnień ograniczony został do zagadnień mechaniki, [M09].

Tak więc potrzeba studiowania i szukania metod rozwiązywania zagadnień źle postawionych i zagadnień odwrotnych wywodzi się z konieczności uzyskania wiarygodnych wyników obliczeń bazujących na danych pomiarowych, równaniach modelujących badany proces czy parametrach fizycznych, użytych do obliczeń, a obarczonych błędem.

Zagadnienia odwrotne mogą zostać sklasyfikowane następująco [DMD99, T99]:

1. Zagadnienia określania kształtu obszaru.
2. Zagadnienia identyfikacji wartości brzegowych/początkowych.
3. Zagadnienia identyfikacji źródeł, sił i wymuszeń.
4. Zagadnienia identyfikacji własności materiałów (zagadnienia współczynnikowe).
5. Zagadnienia określania równań(nia) rządzących(cego).

Zagadnienia odwrotne są możliwe do rozwiązania, jeżeli dostarczona jest dodatkowa informacja i jeżeli zastosowane są odpowiednie algorytmy numeryczne. Jeśli przestrzeń danych jest zdefiniowana jako zbiór rozwiązań zagadnienia prostego, istnienie rozwiązania zagadnienia odwrotnego jest oczywiste. Jednakże rozwiązanie może nie istnieć, jeżeli te dane są zaburzone. Do takiego problemu odniesiemy się w dalszej części tekstu.

Ogólnie można powiedzieć, że zagadnienia odwrotne to problemy, które wiążą pomiary, metody matematyczne i numeryczne oraz inżynierskie wyczucie, [GC80]. Pomiarów zwykle dokonuje się w miejscach łatwo dostępnych, zaś zastosowane algorytmy obliczeniowe mają na celu wyeliminowanie lub zminimalizowanie wpływu błędu pomiaru czy błędu metody matematycznej na wyniki.

2.2. NAJPROSTSZE PROBLEMY ŹLE POSTAWIONE

Parametry rozważanego procesu czy obiektu technicznego, którego zachowanie się bada, nigdy nie są absolutnie niezależne od procesu czy od czasu. Podle-

gają one niekontrolowanym zmianom, często bardzo niewielkim, lecz ważnym z punktu widzenia obliczeń. Rozważając matematyczny model jakiegoś procesu fizycznego, należy rozróżnić dwa rodzaje wartości współczynników, używanych w obliczeniach, a mianowicie wartości nominalne (używane do obliczeń; oznaczmy je a_{in}) i wartości rzeczywiste (realne, „prawdziwe”, dokładne, których tak naprawdę nigdy nie znamy); oznaczmy je a_{ir} . Można jedynie stwierdzić, że ich wartość mieści się w pewnych granicach [PS05]:

$$(1 - \varepsilon)a_{in} \leq a_{ir} \leq (1 + \varepsilon)a_{in}. \quad (2.1)$$

Tutaj $\varepsilon \ll 1$ i $\varepsilon > 0$. Tak więc dla rzeczywistych wartości współczynników znane są jedynie oszacowania wynikające z dokładności przyrządów i metod, jakimi je wyznaczano, a wielkość $\pm \varepsilon a_{in}$ przedstawia błąd wartości nominalnej współczynników.

Na ile jest to istotne, pokazują podane dalej przykłady.

PRZYKŁAD 2.2.1

Rozważmy wielomian drugiego stopnia:

$$x^2 - 2x + 1.$$

Jak wiadomo, ten wielomian ma jedno podwójne miejsce zerowe $x_1 = x_2 = 1$.

Przyjmijmy teraz, że ten sam wielomian opisuje stan jakiegoś układu fizycznego, przy czym wyraz wolny jest uzyskany na podstawie pomiarów, czyli jest reprezentowany przez wartość nominalną. Jeśli wartość rzeczywista tego współczynnika jest na przykład równa $1 + \varepsilon$, co będzie zgodne z dokładnością wynikającą z określających go pomiarów, to poszukiwanie miejsca zerowego prowadzi – dla dowolnie małego dodatniego ε do wyniku:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - (1 + \varepsilon)} = -1 \pm \sqrt{-\varepsilon}.$$

Jeśli rozważania mają dotyczyć jedynie rozwiązań rzeczywistych, to widoczne jest, że dla dowolnie małego dodatniego ε rozwiązanie nie istnieje. Skoro tak, to problem znalezienia miejsc zerowych wielomianu, stanowiącego matematyczny model jakiegoś stanu fizycznego, w którym wyraz wolny jest uzyskany w wyniku pomiarów, nie zależy w sposób ciągły od danych wejściowych, czyli nie jest spełniony warunek stabilności. Tak więc problem okazuje się być źle postawiony w sensie Hadamarda.

PRZYKŁAD 2.2.2

Rozważmy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi x i y :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Na płaszczyźnie OXY ten układ równań określa albo dwie proste równoległe, albo jedną prostą, albo punkt, leżący na przecięciu dwóch prostych nierównoległych. Niech współczynnik a_{21} określony będzie w wyniku pomiarów z dokładnością ε taką, że $|\varepsilon| \leq 1$. Niech powyższy układ ma – przy konkretnych wartościach współczynników – postać:

$$\begin{cases} 1,1x + y = 1,1 \\ (1 + \varepsilon)x + y = 1 \end{cases}$$

Wyznacznik główny tego układu równań jest równy $0,1 - \varepsilon$, a rozwiązanie ma postać

$$\begin{aligned} x &= 1/(1 - 10\varepsilon), \\ y &= -11\varepsilon/(1 - 10\varepsilon). \end{aligned}$$

Wartości x i y w zależności od ε układają się następująco:

$$\text{jeżeli } |\varepsilon| \leq 0,001, \text{ to } 0,99 \leq x \leq 1,01, \quad -0,0111 \leq y \leq 0,01089,$$

$$\text{jeżeli } |\varepsilon| \leq 0,01, \text{ to } 0,909 \leq x \leq 1,1, \quad -0,1222 \leq y \leq 0,1,$$

$$\text{jeżeli } |\varepsilon| \leq 0,1, \text{ to } 0,5 \leq x \leq \infty, \quad -\infty \leq y \leq 0,55.$$

Błąd rozwiązania rośnie szybciej niż błąd współczynnika. Co więcej, wartości bezwzględne rozwiązania rosną ze wzrostem ε , są one dowolnie duże, gdy ε jest dowolnie bliskie 0,1.

Wynika to z faktu, iż wyznacznik główny staje się wtedy dowolnie mały. Taki układ równań nazywa się często źle uwarunkowanym (ang. *ill-conditioned*).

Z nierówności (2.1) wynika, że jeśli wartość nominalna współczynnika jest równa zero, jego wartość rzeczywista także jest równa zero. Oznacza to, że jeśli rozważa się pytanie czy problem jest dobrze postawiony, czy źle postawiony, bierze się pod uwagę jedynie względną zmienność współczynnika, wynikającą z jego wartości nominalnej. Wykluczenie to jest oczywiste; w przeciwnym wypadku bardzo wiele zagadnień weszłoby do kategorii zagadnień źle postawionych. Dla przykładu równanie

$a_1x + a_0 = 0$ można by rozważać jako równanie $0 \cdot x^2 + a_1x + a_0 = 0$, tzn. jako równanie $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ ze współczynnikiem $a_2 = 0$. Wówczas przy wartości współczynnika a_2 równej ε pojawiają się dwa pierwiastki równania kwadratowego, w ogólnym przypadku nieleżące blisko siebie. W takiej sytuacji zagadnienie znalezienia rozwiązania równania liniowego należałoby traktować jak problem źle postawiony. To samo dotyczyłoby zagadnienia szukania miejsc zerowych dowolnego wielomianu.

PRZYKŁAD 2.2.3

Rozważmy następujący problem brzegowy dla równania różniczkowego zwyczajnego:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0,$$

$$y(0) = 0,$$

$$y(a) = b.$$

Rozwiązanie tego problemu ma postać:

$$y(x) = b \frac{\sin x}{\sin a}.$$

Jeżeli wartość funkcji na brzegu jest zmierzona w punkcie o współrzędnej $x = a + \varepsilon$ (drobne błędy w określeniu warunków brzegowych zdarzają się), to rozwiązanie problemu będzie miało postać:

$$y_1(x) = b \frac{\sin x}{\sin(a + \varepsilon)}.$$

Jeśli teraz, na przykład, $a = \pi - \varepsilon$, to wartość bezwzględna różnicy obu rozwiązań może być dowolnie duża dla dowolnie małego ε .

Warto tu dodać, że w odróżnieniu od rozważanego przypadku problemu brzegowego, problem Cauchy'ego jest zawsze dobrze postawiony.

PRZYKŁAD 2.2.4 (różniczkowanie numeryczne)

Różniczkowanie i całkowanie są dwoma zagadnieniami odwrotnymi względem siebie. Chociaż symboliczne różniczkowanie jest dużo prostsze niż symboliczne całkowanie, nazwiemy różniczkowanie zagadnieniem odwrotnym, jako że jest ono źle postawione w sensie przedstawionym niżej. Z tego powodu różniczkowanie okazuje się być bardziej delikatnym problemem z numerycznego punktu widzenia.

Zagadnienie proste określimy jako wyliczenie całki:

$$(T_D \varphi)(x) := \int_0^x \varphi(t) dt \quad \text{dla } x \in [0,1]$$

dla danej funkcji $\varphi \in C([0,1])$.

Zagadnienie odwrotne jest więc zagadnieniem rozwiązywania równania:

$$T_D \varphi = g \tag{2.2}$$

dla danej funkcji $g \in C([0,1])$, spełniającej warunek $g(0) = 0$, albo równoważny $\varphi = g'$. Oczywiście równanie $T_D \varphi = g$ ma rozwiązanie φ w $C([0,1])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \in C^1([0,1])$. Zagadnienie (2.2) byłoby więc dobrze postawione, gdyby funkcja g była mierzalna przy pomocy normy przestrzeni $C^1([0,1])$. Chociaż jest to naturalny warunek, nie ma on zastosowania, jeśli dana funkcja wynika z pomiaru lub zawiera błędy zaokrągleń, które mogą być oszacowane tylko przy pomocy normy supremum¹.

Założmy, że dana jest funkcja zaburzona $g^\delta \in C([0,1])$, spełniająca nierówność:

$$\|g^\delta - g\|_\infty \leq \delta,$$

przy czym poziom zaburzeń określony jest jako $0 < \delta < 1$. Funkcje:

$$g_n^\delta(x) := g(x) + \delta \sin \frac{nx}{\delta}, \quad x \in [0,1],$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ spełniają ograniczenia nałożone na zaburzenia. Ich pochodne mają postać:

$$(g_n^\delta)'(x) = g'(x) + n \cos \frac{nx}{\delta}, \quad x \in [0,1],$$

skąd znajdujemy, że

$$\|(g_n^\delta)' - g'\|_\infty = n.$$

¹ W przestrzeni wektorowej $C([0,1]; \mathbf{R})$ funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ dla każdej funkcji $f \in C([0,1], \mathbf{R})$ definiuje się **normę supremum** jako $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

Zatem gdy $n \rightarrow \infty$, błąd rozwiązywania może być dowolnie duży, chociaż zaburzenie danych jest ograniczone przez δ . To pokazuje, że zadanie określone związkiem (2.2) jest źle postawionym zagadnieniem w odniesieniu do normy supremum.

Spójrzmy na przybliżone rozwiązanie problemu (2.2) z punktu widzenia ułamka opisującego centralną różnicę:

$$(R_h g)(x) := \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h}, \quad x \in [0,1],$$

dla $h > 0$. Aby operator $(R_h g)(x)$ był dobrze określony dla x bliskich brzegom, założymy dla uproszczenia, że g jest okresowa z okresem równym 1. Rozwinięcie Taylora funkcji g pokazuje, że:

$$\|g' - R_h g\|_\infty \leq \frac{h}{2} \|g''\|_\infty, \quad \text{jeżeli } g \in C^2([0,1]),$$

$$\|g' - R_h g\|_\infty \leq \frac{h^2}{6} \|g'''\|_\infty, \quad \text{jeżeli } g \in C^3([0,1]).$$

Dla danych zaburzonych, jeżeli $g \in C^2([0,1])$, całkowity błąd może być oszacowany następująco:

$$\|g' - R_h g^\delta\|_\infty \leq \|g' - R_h g\|_\infty + \|R_h g - R_h g^\delta\|_\infty \leq \frac{h}{2} \|g''\|_\infty + \frac{\delta}{h}.$$

W tym oszacowaniu rozdzielony został całkowity błąd na błąd aproksymacji $\|g' - R_h g\|_\infty$, który dąży do zera, gdy $h \rightarrow \infty$, oraz na błąd zaburzenia danych, $R_h g^\delta - R_h g$, który zwiększa się do nieskończoności, gdy $h \rightarrow 0$, gdyż dla $\|g^\delta - g\|_\infty \leq \delta$ mamy:

$$\|R_h g - R_h g^\delta\|_\infty \leq \frac{\delta}{h}.$$

Aby dostać dobre oszacowanie, musimy zachować równowagę pomiędzy tymi dwoma członami opisującymi błędy przez dobry wybór parametru dyskretyzacji h . Wartość minimalna prawej strony oszacowania błędu jest osiągnięta dla $h = \sqrt{\frac{2\delta}{\|g''\|_\infty}}$.

Przy takim wyborze h całkowity błąd jest rzędu:

$$\|g' - R_h g\|_\infty = O(\delta^{1/2}). \quad (2.3)$$

Jeżeli $g \in C^3([0,1])$, podobne obliczenia pokazują, że dla $h = (3\delta / \|g'''\|)^{1/3}$ otrzymujemy lepszy poziom zbieżności:

$$\|g' - R_h g\|_\infty = O(\delta^{2/3}). \quad (2.4)$$

Większa regularność funkcji g nie poprawia poziomu zbieżności pokazanego w (2.4) dla centralnej różnicy R_h . Można pokazać, że nawet dla schematów zawierających pochodne wyższych rzędów poziom zbieżności jest zawsze mniejszy niż $O(\delta)$. Taki rząd zbieżności może być osiągnięty tylko dla zagadnień dobrze postawionych.

Poziom zbieżności (2.4) odzwierciedla fakt, że stabilność zagadnienia odwrotnego może być określona, jeżeli dana jest informacja apriori:

$$\|g''\|_\infty \leq E.$$

Innymi słowy, ograniczenie operatora różniczkowego do zbioru $W_E := \{g : \|g''\| \leq E\}$ jest ciągle względem normy supremum. Wynika to z oszacowania:

$$\begin{aligned} \|g'_1 - g'_2\|_\infty &\leq \left\| \left(\frac{d}{dx} - R_h \right) (g_1 - g_2) \right\|_\infty + \|R_h (g_1 - g_2)\|_\infty \leq \\ &\leq \frac{h}{2} \|g''_1 - g''_2\|_\infty + \frac{\|g_1 - g_2\|_\infty}{h} \leq 2\sqrt{E\|g_1 - g_2\|_\infty}, \end{aligned}$$

które jest prawdziwe dla $g_1, g_2 \in W_E$ z wyborem $h = \sqrt{\|g_1 - g_2\|_\infty / E}$.

Podczas rozważania przykładu 2.2.4 można było zauważyć wiele właściwości typowych dla problemów źle postawionych [H02]:

- wzmocnienie błędów o wysokiej częstotliwości,
- zależność źle postawionych problemów od wyboru normy, która jest często określana przez potrzeby praktyczne,
- ustalenie stabilności przez informację apriori,
- ustępstwo dokładności na rzecz stabilności przy wyborze parametru dyskretyzacji,
- zależność optymalnego wyboru parametru dyskretyzacji i poziomu zbieżności od gładkości rozwiązania.

2.3. PRZYKŁADY ZAGADNIEŃ ODWROTNYCH

W wielu sytuacjach wielkości, które trzeba określić są różne od tych, które można zmierzyć bezpośrednio. Jeśli zmierzone dane zależą w jakiś sposób od wielko-

ści, które chcemy określić, wówczas dane te zawierają pewną informację o tych wielkościach. Jeśli wychodzimy od danych, które mogliśmy zmierzyć, próbując na ich podstawie oszacować potrzebne wielkości, wówczas mówimy o zagadnieniu odwrotnym. Czasami zagadnienia odwrotne określa się jako szukanie przyczyn, gdy znane są ich skutki.

Poniżej podano kilka typowych zagadnień odwrotnych.

2.3.1. Analiza obrazu

Problem automatycznego obliczenia liczby gwiazd na fotografii nieba czy liczby czerwonych krwinek w próbce krwi staje się wyzwaniem wobec faktu, że gwiazdy, czy również krwinki mogą się nakładać jedna na drugą, lub mogą mieć różne kształty i rozmiary. W takim przypadku dane – to obraz zawierający obiekty do policzenia, zagadnienie (odwrotne) polega na wyznaczeniu ich liczby. Zagadnienie proste to rozrzucenie znanej liczby obiektów na obszar, który następnie zostanie sfotografowany.

2.3.2. Tomografia komputerowa

W medycznej tomografii używającej promieni Roentgena próbuje się określić gęstość φ dwuwymiarowego przekroju ciała ludzkiego przez zmierzenie tłumienia (częściowego pochłaniania) promieni Roentgena. Zagadnienie proste polega na obliczeniu transformacji Radona R , gdy znana jest gęstość φ dwuwymiarowego przekroju ciała ludzkiego. Zagadnienie odwrotne polega na określeniu gęstości φ przy danej jej transformacji Radona, [N99].

Aby mieć obraz wewnętrznych organów pacjenta, chcemy uzyskać obraz poprzecznych przekrojów jego ciała bez naruszania tego ciała, plasterki po plasterku. W tym celu promienie Roentgena są kierowane na ciało z różnych kierunków w celu utworzenia obrazów przekrojowych, do których wykorzystuje się złożenie wykonanych projekcji ciała.

Jednakże jedyne pomiary, jakie można zrobić nieinwazyjnie, to pomiary całkowitego pochłaniania promieniowania wzdłuż linii przechodzących przez ciało. W wyniku prześwietlania otrzymuje się więc zbiór informacji o pochłanianym promieniowaniu wzdłuż tych linii (czyli zbiór całek z funkcji pochłaniania promieniowania przez poszczególne punkty ciała). Jest to zbiór „danych”. Na ich podstawie trzeba zrekonstruować funkcje opisując pochłanianie promieniowania w poszczególnych punktach ciała.

Jest to zagadnienie odwrotne określania struktury badanego materiału, a w istocie swej zagadnienie identyfikacji miejsc pochłaniania promieniowania. Zagadnienie to rozwiązuje się – jak wspomniano wyżej – przy wykorzystaniu transformacji Radona. Problem redukuje się do równania całkowitego Abela z operatorem całkowym typu Volterra, [M06].

2.3.3. Geofizyka

Zagadnienia odwrotne odgrywają ważną rolę w geofizyce, jako że wewnątrz Ziemi nie może być obserwowane bezpośrednio. Mierzalne są jednakże zaobserwowane na powierzchni skutki fal, które propagują się przez wewnątrz Ziemi. Wykorzystując pomiary fal sejsmicznych określa się położenie epicentrum trzęsienia ziemi czy gęstość skał, przez które fale się propagują. Przy wywołaniu fali sejsmicznej w sposób sztuczny (przez kontrolowany wybuch na dużej głębokości) można w ten sposób niejako „przeświecić” duży obszar, a dokonując w wielu miejscach pomiarów sygnału sejsmicznego, można otrzymać informację o pokładach geologicznych, przez które fala ta się propagowała. Jak w wielu przypadkach zagadnień odwrotnych, jest tu badany tzw. odwrotny problem wartości własnych, [D95, CG01].

2.3.4. Problemy nawigacji

Podczas jazdy samochodem często pojawia się zagadnienie proste: jestem w tej chwili w takim a takim miejscu, w związku z czym moja średnia prędkość jest łatwa do obliczenia, a osiągnięty punkt na trasie pokazuje, czy jedziemy właściwą trasą.

Natomiast podczas rejsu statkiem czy łodzią, a także podczas lotu samolotem dobrze jest umieć określić swoją pozycję w chwili czasu możliwie bliskiej rzeczywistości czasowi. Uzyskuje się to często przez wykonanie różnych pomiarów. Mogą to być takie pomiary, jak np. położenie względem naziemnych czy nawodnych punktów orientacyjnych, pozycja względem gwiazd lub satelitów czy też wzięcie pod uwagę poprzedniej pozycji i wykorzystanie informacji o prędkości własnej, prędkości wiatru i prądów wodnych oraz o kursie.

W opisanym przypadku mamy do czynienia z zagadnieniem odwrotnym, a mianowicie, jak użyć opisanych wyżej informacji, aby uzyskać spójny opis pozycji statku czy samolotu.

W dobie GPS-ów takie zadanie wydaje się trywialne, ale jeszcze nie tak dawno GPS-ów nie było...

2.3.5. Dopasowanie modelu do danych

W pewnych modelach teoretycznych wartość jednej zmiennej, np. y , zależy od wartości drugiej, np. od x , poprzez równanie typu:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Wielomian po prawej stronie równania może być innego stopnia, może też zależeć od więcej niż jednej zmiennej. Rozważając przedstawione równanie, można sformułować następujące zagadnienie:

Znany jest zbiór punktów (x_i, y_i) , a określić trzeba wartości współczynników a, b, c i d .

Jest to zagadnienie odwrotne. Zagadnienie proste polega w tym przypadku na obliczeniu współrzędnych punktów (x_i, y_i) na krzywej określonej równaniem o zadanych współczynnikach a, b, c i d .

Oczywiście model może być bardziej skomplikowany i może zależeć od danych wejściowych nieliniowo, [E07].

Przykładem takiego problemu może być określenie czasu rozpadu połowicznego substancji radioaktywnej na podstawie pomiarów czasów, w których skutki rozpadu próbki przyjmują określone wartości. Innym przykładem może być dopasowanie zmian temperatury na odcinku krzywej w określonym przedziale czasu na podstawie pomiarów dokonanych w pewnych punktach tej krzywej i w pewnych chwilach czasu.

2.3.6. Odtwarzanie niewyraźnego obrazu (odseparowanie zakłóceń)

We wczesnych latach dziewięćdziesiątych XX wieku teleskop Hubble'a został wystrzelony na niską orbitę okołozemską poza rozpraszającą sygnały atmosferę, aby dostarczyć obrazy o niespotykanej rozdzielczości. Niestety, wkrótce po wystrzeleniu wykryto błąd wykonania głównego lustra, powodujący poważne sferyczne aberracje obrazu. Dlatego, zanim wahadłowiec Endeavour odwiedził teleskop w 1993 roku, aby usunąć ten błąd, astronomowie wykorzystali techniki zagadnień odwrotnych do poprawienia tych zaplamionych obrazów, [A95, LB91].

Problem odtworzenia niewyraźnej fotografii, przesłanego elektronicznie obrazu, który uległ zniekształceniu w trakcie transmisji, czy sygnału, który przeszedł po drodze do odbiorcy przez ośrodek działający jak filtr, to kolejny przykład zagadnienia odwrotnego. Odpowiednim zagadnieniem prostym jest utworzenie takich zakłóconych informacji graficznych czy elektronicznych.

Ten rodzaj zagadnień odwrotnych jest bardzo istotny w projektowaniu np. modemów komputerowych, gdyż sygnał przesyłany przez linie telefoniczne często ulega zniekształceniu, które powinno zostać odseparowane, aby odzyskać oryginalny sygnał. Prawdziwy obraz, φ , i zaplamiony obraz, g , są związane równaniem całkowym pierwszego rodzaju:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(x, y; x', y') \varphi(x', y') dx' dy' = g(x, y),$$

gdzie k jest funkcją zakłócającą. Funkcja $k(\cdot; x_0, y_0)$ opisuje zaplamiony obraz przez źródło punktowe umieszczone w punkcie (x_0, y_0) . Zwykle zakłada się, że funkcja k jest przestrzennie niezmienna, tzn. że:

$$k(x, y; x', y') = h(x - x', y - y'), \quad x, x', y, y' \in \mathbb{R}$$

Funkcja h jest nazywana *funkcją punktowego rozproszenia*.

Przy takim założeniu zagadnienie proste, jakim jest utworzenie sygnału zakłóconego przy znanym sygnale niezakłóconym i znanej funkcji punktowego rozproszenia, jest opisane operatorem splotowym:

$$(T_{DB}\varphi)(x, y) := \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x - x', y - y') \varphi(x', y') dx' dy' = g(x, y). \quad (2.5)$$

Przy rozwiązywaniu zagadnienia odwrotnego wielkością znaną jest sygnał zakłócony g , a poszukiwany jest sygnał prawdziwy φ . Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego $T_{DB}\varphi = g$ może być wyznaczone przy pomocy transformacji Fouriera.

W wielu zastosowaniach związanych z odzyskiwaniem obrazu, kluczowym problemem jest znalezienie funkcji punktowego rozproszenia.

2.3.7. Obiekty w Kosmosie

Rozważmy ciało w Kosmosie, zajmujące ograniczony obszar Ω . Gęstość masy tego obiektu niech będzie opisana funkcją $\rho(x, y, z)$. Takie ciało wytwarza w przestrzeni pole grawitacyjne. Przy znanym obszarze Ω i funkcji $\rho(x, y, z)$ potencjał tego obiektu w dowolnym punkcie (x, y, z) jest określony wzorem:

$$u(x, y, z) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}}.$$

Tak sformułowane jest zagadnienie proste. Zagadnienie odwrotne brzmi następująco:

Obszar Ω i funkcja $\rho(x, y, z)$ są nieznane. W pewnym obszarze Ω_1 takim, że $\Omega_1 \cap \Omega = \emptyset$, potencjał $u(x, y, z)$ jest znany. Należy określić obszar Ω i funkcję $\rho(x, y, z)$, [D99].

2.3.8. Odwrotny problem rozpraszania (ang. *inverse scattering problem*)

Inną, szczególnie ważną klasą zagadnień odwrotnych, jest zagadnienie odwrotne rozpraszania. Takie zagadnienia pojawiają się w akustyce, elektromagnetyzmie, sprężystości i teorii kwantów. Celem jest tu identyfikacja właściwości niedostępnych obiektów poprzez zmierzenie rozpraszania przez nie fal. Dla uproszczenia rozważmy tylko fale akustyczne, [LTP09].

Niech D będzie ograniczonym, spójnym obszarem na płaszczyźnie o brzegu ∂D . Niech $U(x, t) = \operatorname{Re}(u(x)e^{-i\omega t})$ opisuje potencjał prędkości propagującej fali harmonicznnej o częstotliwości ω i amplitudzie zależnej od zmiennej przestrzennej, $u(x)$, przez ośrodek jednorodny. Wtedy równanie falowe:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta U$$

redukuje się do równania Helmholtza:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{w } R^2 \setminus \overline{D}.$$

Tutaj $k = \omega/c$ jest liczbą falową, a D opisuje nieprzenikliwą, gładką, ograniczoną przeszkodę. Warunek brzegowy na powierzchni ∂D zależy od właściwości tej powierzchni. Dla pochłaniających dźwięk przeszkód mamy warunek Dirichleta:

$$u = 0 \quad \text{na } \partial D.$$

Zakładamy, że całkowite pole $u = u_i + u_s$ jest superpozycją znanych przypadkowych pól $u_i(x) = e^{ikx \cdot d}$ o kierunku d (ustalony wektor jednostkowy) i rozproszonego pola u_s . Rozproszone pole spełnia *warunek wypromieniowania Sommerfelda*:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s \right) = 0, \quad r = |x|,$$

jednolicie we wszystkich kierunkach $\hat{x} = x/r$, który gwarantuje, że asymptotycznie energia jest transportowana daleko od punktu wyjściowego. Ponadto ten warunek powoduje, że rozproszone pole zachowuje się asymptotycznie jak fala wychodząca postaci:

$$u_s(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \left(u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Funkcja u_∞ jest nazywana *wzorem dalekiego pola* albo *rozproszoną amplitudą* u_s .

Zagadnienie proste: dana jest przeszkoda o gładkim brzegu, D , i fala przypadkowa u_i ; znaleźć *wzór dalekiego pola* u_∞ . Zagadnienie odwrotne: dany jest *wzór dalekiego pola* u_∞ i fala przypadkowa u_i ; znaleźć przeszkodę D (np. parametryzację jej brzegu ∂D).

Więcej informacji o odwrotnych problemach rozpraszania można znaleźć w monografiach [CK97, P01] czy w pracy [LTP09].

2.3.9. Problemy przewodnictwa cieplnego

Zagadnienie początkowo-brzegowe przewodzenia ciepła w przypadku stałych współczynników termofizycznych w pręcie jednorodnym z boczną wymianą ciepła (w żebrze) można opisać następująco:

- równanie przewodnictwa cieplnego:

$$c\rho u_t = (\lambda u_x)_x - hu + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

- warunek początkowy:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

- warunki brzegowe:

$$u_x(0, t) = \beta_1(u(0, t) - \mu_1(t)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u_x(l, t) = \beta_2(u(l, t) - \mu_2(t)), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Jest to matematyczny model fizycznego procesu, w którym u – to funkcja opisująca temperaturę w dowolnym punkcie pręta w chwili czasu t , λ – opisuje współczynnik przewodnictwa cieplnego (który może być funkcją temperatury lub zmiennych przestrzennych), h – jest współczynnikiem wnikania ciepła (nazywanym czasami współczynnikiem przewodnictwa zewnętrznego), β_1 i β_2 są bezwymiarowymi współczynnikami przejmowania ciepła (liczbami Biota), c – to ciepło właściwe ośrodka, zaś ρ – to jego gęstość. Gdy wszystkie stałe termofizyczne są znane, a funkcje opisujące warunek początkowy, $\varphi(x)$, temperatura płynu na obu końcach żebra, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, i źródło ciepła, $f(x, t)$ są dane, rozwiązanie takiego problemu opisuje nadwyżkę temperatury ponad temperaturę płynu w każdym punkcie x żebra w chwili t z przedziału $(0, T)$; jest to zagadnienie proste.

Jednak w wielu fizycznych procesach nie są znane niektóre współczynniki lub funkcje, natomiast z eksperymentu można otrzymać dodatkowe informacje o temperaturze. Dla przykładu, jeśli nie jest znany współczynnik przewodnictwa cieplnego λ , a z eksperymentu znana jest funkcja $g(t) = u(x_0, t)$, opisująca temperaturę w pewnym wewnętrznym punkcie pręta jako funkcję czasu, powstaje problem wyznaczenia tego współczynnika. Jest to zagadnienie odwrotne.

Rozważmy $\lambda = \text{const}$, $f(x, t) = 0$, $h = 0$ oraz warunek Dirichleta na brzegu $x = 0$, i warunek Neumanna na brzegu $x = l$. Rozwiązanie takiego zagadnienia w postaci bezwymiarowej ma postać, [CG10]:

$$\mathcal{G}(\xi, \tau) = \mathcal{G}'_f(\tau) + (\mathcal{G}_f(0) - \mathcal{G}_0)\delta(\tau) * F(\xi, \tau) + (g'(\tau) + g(0)\delta(\tau)) * H(\xi, \tau) + \eta(\tau)\mathcal{G}_0,$$

gdzie $*$ oznacza splot, $\delta(\tau)$ opisuje dystrybucję Diraca, [O72], $\eta(\tau)$ jest funkcją Heaviside'a, $\mathcal{G}$ to bezwymiarowa temperatura, $g(\tau)$ opisuje strumień ciepła na brzegu $x=l$ (bezwymiarowo $\xi=1$), zaś $\mathcal{G}_f$ jest temperaturą na brzegu $x=0$ ($\xi=0$). F i H to pewne funkcje, opisane w pracy [CG10].

Jeśli nie jest znana funkcja $g(\tau)$, a znane są zmiany temperatury w czasie w pewnym wewnętrznym punkcie rozważanego obszaru, $\mathcal{G}(\xi^*, \tau)$, wówczas mamy do czynienia z zagadnieniem odwrotnym. Przedstawiony wyżej związek przyjmuje postać równania splotowego, które można zapisać jako $Tg = \mathcal{G}$, gdzie T jest operatorem, którego postać wynika z przedstawionego wyżej związku.

Oczywiście na bazie zagadnienia prostego można określić różne zagadnienia odwrotne. Może to być zagadnienie identyfikacji funkcji źródła; warunku początkowego czy którejś – lub obu – funkcji opisującej warunki na brzegach. Ta różnorodność zagadnień odwrotnych jest określona nie tylko przez nieznane funkcje czy współczynniki, ale także przez różne drogi pozyskiwania dodatkowych informacji (różnych eksperymentów lub założeń określających temperaturę lub strumień ciepła w wybranym/wybranych punktach ciała bądź w wybranych chwilach czasu), [A94, KN95].

Bardzo wiele problemów odwrotnych można opisać przy pomocy pewnego ogólnego przedstawienia. Oznaczmy przez z nieznaną charakterystykę matematycznego modelu stanu obiektu czy procesu w nim zachodzącego oraz przez A operator, który przekształca z (nieznaną przyczynę) w u (skutek), znane jako wynik eksperymentu i obarczone błędem wynikającym z metody pomiaru i dokładności urządzenia pomiarowego. Wtedy zagadnienie odwrotne sprowadza się do rozwiązania równania [TA77]:

$$Az = u,$$

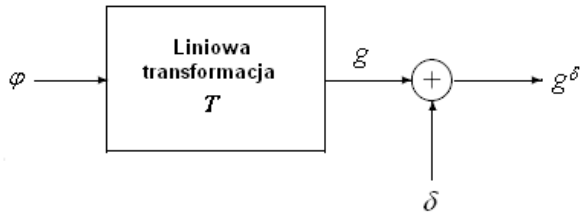
gdzie operator A i prawa strona równania u są dane, a wyznaczyć należy z . Przykładowo, w zagadnieniu tomografii komputerowej nieznaną przyczyną jest funkcją znajdującą się pod całką (operatorem A) w równaniu (2.5), przy czym w zagadnieniu odtwarzania obrazu jest to funkcja φ , a w zagadnieniach odtwarzania niewyraźnego obrazu czy zagadnieniach geofizyki przy podobnym rodzaju operatora jest to funkcja $k(x, y; x', y')$ lub $h(x - x', y - y')$.

Wśród wielu innych obszarów badawczych mających charakter zagadnień odwrotnych można wymienić problem identyfikacji wydajności źródeł, także ruchomych, [ARR05], przewidywania pogody, [BCL96], ustalania kształtu obszaru zajmowanego przez badane ciało, [NPT09], projektowania aerodynamicznych kształtów, [DDY04], identyfikacji sprężysto-plastycznych właściwości materiałów, [H07], i inne.

Ważną cechą zagadnień odwrotnych, w których dane wejściowe pochodzą z eksperymentu, jest fakt, iż dane te znane są tylko w przybliżeniu. Wynika to, jak wspomniano wyżej, z metody pomiaru i dokładności urządzenia pomiarowego. Z tego względu metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych muszą charakteryzować się pewną stabilnością względem małych zmian danych wejściowych.

2.4. WYBRANE METODY ROZWIĄZYWANIA LINIOWYCH ZAGADNIEŃ ODWROTNYCH

Wszystkie liniowe zagadnienia odwrotne można w uproszczeniu przedstawić w postaci schematu blokowego (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Schematyczna postać liniowych zagadnień odwrotnych

Na rysunku 2.1 $T: X \rightarrow Y$ jest ograniczonym liniowym operatorem pomiędzy przestrzeniami Hilberta X i Y , δ to addytywny szum, g – rozwiązanie ściśle problemu, g^δ – rozwiązanie z zaburzonymi danymi wejściowymi. Tak więc związek pomiędzy tymi wielkościami można zapisać w postaci:

$$T\varphi = g^\delta, \quad g^\delta = g + \delta \quad \text{lub} \quad T\varphi = g + \delta.$$

Rozważmy opis zbioru punktów przy pomocy linii prostej, tzw. *problem dopasowania modelu*. Z uwagi na użyte w tym opisie macierze operator oznaczmy literą A . Niech zbiór $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ opisuje zmierzone współrzędne tych punktów na prostej. Szukamy opisu tej prostej w postaci $y = \varphi_0 + \varphi_1 x$. Zagadnienie jest rozwiązywane w dwóch wymiarach, lecz przestrzeń danych jest m -wymiarowa. Jeśli macierz $\delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m]^T$ opisuje błędy pomiarów, zagadnienie dopasowania danych pomiarowych do punktów można opisać związkiem $A\varphi = g + \delta$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix}^T, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad g = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m]^T.$$

W tym przypadku $A \in R^{m \times 2}$.

Jeśli do opisu zbioru punktów przyjąć wielomian stopnia $n-1$, lub – w bardziej ogólnym przypadku – zbiór n funkcji $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)\}$, to macierz A będzie macierzą stopnia $m \times n$ oraz $A \in R^{m \times n}$.

Gdy liczba danych pomiarowych znacznie przekracza liczbę współczynników w modelu matematycznym, mówimy o zagadnieniu dopasowania modelu do danych. Zazwyczaj w celu uzyskania rozwiązania stosuje się w takim przypadku metodę najmniejszych kwadratów lub podobną.

Gdy A jest macierzą prostokątną, wówczas jedyną drogą szukania rozwiązania równania $A\varphi = g^\delta$ jest rozważenie operatora $A^T A$ lub AA^T . Jedną z metod rozważenia takiego problemu jest metoda nazywana rozkładem według wartości osobliwych (ang. **Singular Value Decomposition**) lub w skrócie **metodą SVD**.

2.4.1. Metoda SVD a zagadnienia odwrotne

Założmy, że $A \in R^{m \times n}$ jest rzeczywistą macierzą prostokątną przekształcającą wektory z przestrzeni R^m na wektory z R^n . Znajomość macierzy (operatora) A pozwala na zbudowanie dwóch macierzy kwadratowych symetrycznych $A^T A$ o wymiarze $n \times n$ oraz AA^T o wymiarze $m \times m$. Każda z tych macierzy jest dodatnio półokreślona, co oznacza, że wszystkie ich wartości własne są nieujemne. Wektory własne tych macierzy można unormować i otrzymać w ten sposób ortonormalne bazy w R^n oraz w R^m .

Oznaczmy zbiór unormowanych wektorów własnych macierzy $A^T A$ jako $\{v_i\}_{i=1}^n$, mających odpowiadające im wartości własne $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$.

Podobnie, zbiór unormowanych wektorów własnych macierzy AA^T oznaczmy jako $\{u_i\}_{i=1}^m$, a odpowiadające im wartości własne jako $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m \geq 0$.

Łatwo można pokazać, że jeśli v_i jest niezerowym wektorem własnym macierzy $A^T A$, to Av_i jest wektorem własnym macierzy AA^T :

$$(AA^T)(Av_i) = A(A^T A)v_i = A(\lambda_i v_i) = \lambda_i (Av_i).$$

Podobnie, jeśli u_j jest niezerowym wektorem własnym macierzy AA^T , to $A^T u_j$ jest wektorem własnym macierzy $A^T A$. Ponadto, każda niezerowa wartość własna λ_i macierzy $A^T A$ jest jednocześnie wartością własną μ_i macierzy AA^T . Tak więc, jeśli obie macierze mają r niezerowych wartości własnych, gdzie oczywiście $r \leq n$ i $r \leq m$, to $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_r = \mu_r$ oraz $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$ oraz $\mu_{r+1} = \dots = \mu_m = 0$. Ponieważ $\lambda_k = \mu_k > 0$, $k = 1, \dots, r$, więc można zdefiniować zbiór wielkości $\{\sigma_k\}_{k=1}^r$,

będących pierwiastkami kwadratowymi z niezerowych wartości własnych macierzy $A^T A$ (i także macierzy AA^T). Można pokazać, że:

$$Av_k = \sigma_k u_k \quad \text{oraz} \quad A^T u_k = \sigma_k v_k, \quad (2.6)$$

gdzie powtórzony wskaźnik k po prawej stronie nie oznacza umowy sumacyjnej, lecz tylko mnożenie wektora przez liczbę. Same operacje mają prostą interpretację. Pierwsza oznacza liniową transformację A wektora $v_k \in R^n$ na wektor $\sigma_k u_k \in R^m$ o długości σ_k w kierunku jednostkowego wektora $u_k \in R^m$, zaś druga – liniową transformację A^T wektora $u_k \in R^m$ na wektor $\sigma_k v_k \in R^n$ o długości σ_k w kierunku jednostkowego wektora $v_k \in R^n$.

Z drugiej strony dla $k > r$ wartości własne macierzy $A^T A$, stowarzyszone z wektorami własnymi v_k , znikają, i podobnie rzecz się ma z wartościami własnymi macierzy AA^T , z czego wynikają związki:

$$Av_k = 0 \quad \text{dla} \quad k = r+1, \dots, n \quad \text{oraz} \quad A^T u_k = 0 \quad \text{dla} \quad k = r+1, \dots, m. \quad (2.7)$$

Na podstawie związków (2.6) i (2.7) dowodzi się, że:

$$A = \sum_{k=1}^r \sigma_k u_k v_k^T \quad \text{oraz} \quad A^T = \sum_{k=1}^r \sigma_k v_k u_k^T. \quad (2.8)$$

Ortonormalność baz $\{v_i\}_{i=1}^r$ oraz $\{u_i\}_{i=1}^r$ pozwala łatwo udowodnić powyższe równości. Wektory $\{v_i\}_{i=1}^r$ nazywane są *prawymi wektorami osobliwymi* (ang. *right singular vectors*), wektory $\{u_i\}_{i=1}^r$ – *lewymi wektorami osobliwymi* (ang. *left singular vectors*), zaś skalary $\{\sigma_k\}_{k=1}^r$ – *wartościami osobliwymi* (ang. *singular values*) macierzy A .

Ustawiając wektory u_i jako kolumny pewnej macierzy kwadratowej U o wymiarze $m \times m$, a wektory v_k jako kolumny pewnej macierzy kwadratowej V o wymiarze $n \times n$ można zapisać związek (2.8)₁ w postaci macierzowej:

$$A = USV^T, \quad (2.9)$$

gdzie S jest macierzą prostokątną o wymiarach $m \times n$, mającą niezerowe elementy tylko na diagonalu i tylko w pierwszych r kolumnach, tzn. $s_{kk} = \sigma_k$ dla $k = 1, \dots, r$. Rozkład (2.9) nazywany jest **rozkładem według wartości osobliwych**.

Znajomość macierzy U , V oraz S pozwala szybko wyznaczyć uogólnione odwrócenie macierzy A . Oznaczając primem uogólnione odwrócenie, mamy:

$$A' = US'V^T,$$

gdzie elementami macierzy S' są w pierwszych r kolumnach odwrotności wartości osobiwych, a w następnych – zera, [GL96, S98].

Rozważmy teraz przedstawiony na początku części 2.4 *problem dopasowania modelu*. Zbiór $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ opisuje zmierzone współrzędne punktów na pewnej $(n-1)$ -wymiarowej powierzchni. Jeśli do opisu zbioru punktów przyjąć zbiór n funkcji $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)\}$, to macierz A będzie macierzą o wymiarze $m \times n$, tzn. $A \in R^{m \times n}$. Przestrzeń niewiadomych (dalej nazywana *przestrzenią obrazu*) jest n -wymiarowa, przestrzeń danych jest m -wymiarowa. Macierz $\delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m]^T$ opisuje błędy pomiarów.

Dla większości danych pomiarowych punkty nie leżą na wspomnianej powierzchni, wobec czego wektor obarczonych błędami pomiarów danych, $g^\delta = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]^T$, nie należy do przestrzeni obrazu. Stosując metodę najmniejszych kwadratów wybiera się rozwiązanie $\hat{\varphi}$ możliwie jak najbliższe rozwiązaniu dokładnemu φ (otrzymanemu dla przypadku braku błędów pomiarowych).

Zastosujmy metodę SVD. Bazy przestrzeni R^n oraz R^m oznaczmy podobnie jak wyżej, tzn. $\{v_i\}_{i=1}^n$ oraz $\{u_i\}_{i=1}^m$. Zapiszemy macierz $g^\delta = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]^T$ w bazie $\{u_i\}_{i=1}^m$:

$$g^\delta = \sum_{k=1}^m u_k (u_k^T g^\delta).$$

Wówczas dla dowolnego φ mamy

$$\begin{aligned} \|g^\delta - A\varphi\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^m u_k (u_k^T g^\delta) - \sum_{k=1}^r \sigma_k u_k (v_k^T \varphi) \right\|^2 = \\ &= \left\| \sum_{k=1}^r u_k \{u_k^T g^\delta - \sigma_k (v_k^T \varphi)\} + \sum_{k=r+1}^m u_k (u_k^T g^\delta) \right\|^2. \end{aligned}$$

Ponieważ wektory $\{u_i\}_{i=1}^m$ tworzą układ ortogonalny, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$\|g^\delta - A\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^r |u_k^T g^\delta - \sigma_k (v_k^T \varphi)|^2 + \sum_{k=r+1}^m |u_k^T g^\delta|^2.$$

Wybór funkcji $\hat{\varphi}$ jest teraz oczywisty. Drugi człon po prawej stronie nie ma wpływu na wynik, a z pierwszego otrzymujemy:

$$v_k^T \hat{\varphi} = \frac{u_k^T g^\delta}{\sigma_k} \quad \text{dla } k = 1, \dots, r.$$

Dla $r = n$ oraz dla $r < n$ funkcja $\hat{\varphi}$ jest zatem jednoznacznie określona. W przypadku $r = n$ rozwiązanie ma wtedy postać:

$$\hat{\varphi} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{v_k u_k^T}{\sigma_k} \right) g^\delta. \quad (2.10)$$

Tak więc „najlepsza” funkcja opisująca wspomnianą powierzchnię to ta, która minimalizuje $\|g^\delta - A\hat{\varphi}\|^2$, tzn.:

$$\|g^\delta - A\hat{\varphi}\|^2 = \min_{\hat{\varphi} \in R^n} \|g^\delta - A\hat{\varphi}\|^2 = r_{\min}^2,$$

gdzie $r_{\min}^2$ jest odległością pomiędzy danymi, g^δ , a obrazem funkcji φ po przetransformowaniu jej operatorem A . Gdyby dane były dokładne, tzn. gdyby $\delta = 0$, wówczas ta odległość $r_{\min}^2$ byłaby równa zero, gdyż dane leżałyby w przestrzeni obrazu. Wartość $r_{\min}^2$ pozwala oszacować wielkość szumu w danych.

Na koniec rozważmy jeszcze, jak na rozwiązanie zagadnienia odwrotnego wpływają wartości osobliwe w przypadku, gdy wśród nich występują bardzo małe wartości. Wykorzystując metodę SVD można równanie $A\varphi = g + \delta$ zapisać w bazach $\{v_i\}_{i=1}^n$ oraz $\{u_i\}_{i=1}^m$ w postaci:

$$g^\delta = \left(\sum_{k=1}^n \sigma_k u_k v_k^T \right) \varphi + \delta.$$

Rozwiązanie $\hat{\varphi}$ równania $A\hat{\varphi} = g^\delta$ ma postać, przedstawioną związkiem (2.10).

Podstawienie g^δ do związku (2.10) prowadzi do następującego wyniku:

$$\hat{\varphi} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{v_k u_k^T}{\sigma_k} \right) \left(\sum_{l=1}^n \sigma_l u_l v_l^T \varphi + \delta \right) = \sum_{k=1}^n \left(v_k \delta_{kl} u_l^T \varphi + \frac{v_k u_k^T}{\sigma_k} \delta \right) = \varphi + \sum_{k=1}^n \frac{u_k^T \delta}{\sigma_k} v_k.$$

Jak widać, odtworzenie obrazu jest sumą prawdziwego obrazu φ oraz członu wynikającego z zakłóceń danych pomiarowych (szumu). Składowa zakłócenia w kierunku wektora v_k w przestrzeni obrazu wynika ze składowej zakłócenia w kierunku wektora u_k w przestrzeni danych, podzielonego przez wartość osobliwą σ_k .

Tak więc, jeśli wartość osobliwa σ_k jest mała, ten składnik wniesie bardzo duży błąd przypadkowy, kompletnie wypaczający składową obrazu w kierunku v_k . Z tego powodu przy bardzo małych wartościach osobliwych metoda najmniejszych kwadratów może prowadzić do bardzo wypaczonego wyniku. W takim przypadku korzystniej jest przyjąć wartość zero, zamiast bardzo małej wartości osobliwej. Oczywiście określenie, czy wartość osobliwa jest mała czy nie, może być rozważane tylko przy znajomości wszystkich wartości osobliwych.

2.4.2. Regularyzacja Tichonowa

Rozważmy źle postawione liniowe równanie operatorowe (np. typu (2.2) lub (2.5)) w ogólnej postaci:

$$T\varphi = g. \quad (2.11)$$

Tutaj $T: X \rightarrow Y$ jest ograniczonym liniowym iniektywnym operatorem pomiędzy przestrzeniami Hilberta X i Y , zaś $g \in R(T) \subset Y$. Algorytmy, które zostaną przedstawione poniżej, uwzględniają fakt, że rozwiązanie równania (2.11) nie zależy w sposób ciągły od danych wejściowych i że dane wejściowe mogą być zaburzone przez szum. Zakładamy, że mamy do dyspozycji tylko dane zaburzone g^δ i że:

$$\|g^\delta - g\| \leq \delta. \quad (2.12)$$

Problem rozwiązania równania (2.11) z zaburzonymi danymi wejściowymi g^δ można sformułować równoważnie jako znalezienie minimum funkcjonału $J: \varphi \mapsto \|T\varphi - g^\delta\|^2$ w X .

Oczywiście rozwiązanie tego problem minimalizacji także nie zależy w sposób ciągły od danych. Jedną z możliwości przywrócenia stabilności jest dodanie do tego funkcjonału funkcji kary zawierającej odległość od φ do pewnego początkowego wyboru φ_0 :

$$J_\alpha(\varphi) := \|T\varphi - g^\delta\|^2 + \alpha \|\varphi - \varphi_0\|^2.$$

Funkcjonał $J_\alpha(\varphi)$ nazywany jest *funkcjonałem Tichonowa*, a parametr $\alpha > 0$ jest nazywany *parametrem regularyzacji*. Jeżeli żaden początkowy wybór dla φ nie jest znany, kładziemy $\varphi_0 = 0$.

Prawdziwe jest następujące **twierdzenie**:

Funkcjonał Tichonowa J_α ma dokładnie jedno minimum φ_α^δ w X dla wszystkich $\alpha > 0$, $g^\delta \in Y$ i $\varphi_0 \in X$. To minimum dane jest wzorem:

$$\varphi_\alpha^\delta = (T^*T + \alpha I)^{-1} (T^* g^\delta + \alpha \varphi_0),$$

gdzie T^* jest operatorem sprzężonym do operatora T .

Operator $T^*T + \alpha I$ jest odwracalny i ograniczony, tak więc φ_α^δ zależy w sposób ciągły od g^δ .

Gdy już zostało znalezione rozwiązanie φ_α^δ , możemy poszukać lepszego przybliżenia przez zastosowanie regularyzacji Tichonowa ponownie, używając φ_α^δ jako wartości początkowej (startowej) φ_0 . To prowadzi do iteracyjnej regularyzacji Tichonowa:

$$\varphi_{\alpha,0}^\delta := 0,$$

$$\varphi_{\alpha,n+1}^\delta := (T^*T + \alpha I)^{-1} (T^* g^\delta + \alpha \varphi_{\alpha,n}^\delta), \quad n \geq 0.$$

Zauważmy, że należy odwrócić tylko jeden operator, $T^*T + \alpha I$, aby obliczyć $\varphi_{\alpha,n}^\delta$ dla dowolnego $n \in N$. Na wyrażenie $\varphi_{\alpha,n}^\delta$ można metodą indukcji wyprowadzić następujący wzór:

$$\varphi_{\alpha,n}^\delta := (\alpha I + T^*T)^{-n} (T^*T)^{-1} ((\alpha I + T^*T)^n - \alpha^n I) T^* g^\delta.$$

W iterowanej regularyzacji Tichonowa n jest ustalone, a wybór parametru regularyzacji α jest określony przez jakąś zasadę wyboru (np. przez podaną niżej zasadę niezgodności Morozowa). Można jednak ustalić wartość parametru regularyzacji, a metodę traktować jako metodę iteracyjną. W takim przypadku mówi się o metodzie Lardy'ego, [HG98].

Szerszy opis metody regularyzacji Tichonowa można znaleźć w wielu pozycjach książkowych i artykułach naukowych, np. [T63, TA77, BHTY06], i innych.

2.4.3. Iteracja Landwebera

Inny sposób rozwiązania równania (2.11) z zaburzonymi danymi wejściowymi g^δ to minimalizacja funkcjonau $J_0(\varphi) = \|T\varphi - g^\delta\|^2$ metodą największego spadku. Można udowodnić, [H02], że kierunek największego spadku to $h = -T^*(T\varphi - g^\delta)$. To prowadzi do wzoru rekurencyjnego:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n - \mu T^*(T\varphi_n - g^\delta), \quad n \geq 0, \quad (2.13)$$

znanego jako iteracja Landwebera. Parametr określający wielkość kroku, μ , musi być wybrany tak, że $\mu \|T^*T\| \leq 1$. Można pokazać metodą indukcji, że n -ta iteracja Landwebera jest dana wzorem:

$$\varphi_n = \sum_{j=0}^{n-1} (I - \mu T^*T)^j \mu T^* g^\delta$$

Rzeczywiście, to równanie jest w sposób oczywisty prawdziwe dla $n = 0$, a jeżeli jest prawdziwe dla n , to:

$$\varphi_{n+1} = (I - \mu T^*T)\varphi_n + \mu T^* g^\delta = \sum_{j=0}^n (I - \mu T^*T)^j \mu T^* g^\delta.$$

Wskaźnik zatrzymujący iterację $n = N$ pełni rolę parametru regularyzacji. I o ile w regularyzacji Tichonowa poprawiający dokładność rozwiązania przybliżonego parametr regularyzacji α dąży do zera, o tyle w iteracji Landwebera parametr regularyzacji n dąży do nieskończoności. Problem wyboru parametru regularyzacji jest omówiony niżej.

Jeśli pewien początkowy wybór φ_0 jest znany, iteracja powinna wystartować od φ_0 . Ten przypadek można sprowadzić do (2.13) wprowadzając dane $\tilde{g}^\delta = g - T\varphi_0$. Iteracje Landwebera $\tilde{\varphi}_n$ odpowiadające tym danym są związane z φ_n związkiem $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n - \varphi_0$, $n \geq 0$.

Szerszy opis iteracji Landwebera można znaleźć w wielu monografiach i artykułach naukowych, np. [HNS95, EHN00, CELMR00] i in.

2.4.4. Wybór parametru regularyzacji – zasada niezgodności Morozowa

Kluczowym problemem dotyczącym regularyzacji Tichonowa, jak również innych metod regularyzacji, jest wybór parametru regularyzacji. Dla iteracji Landwebera rolę parametru regularyzacji odgrywa liczba iteracji. Dla regularyzacji Ticho-

nowa z początkowym wyborem $\varphi_0 = 0$ całkowity błąd $\varphi - \varphi_\alpha^\delta$ można – korzystając z tożsamości $(T^*T + \alpha I)^{-1}(T^*T + \alpha I)\varphi = \varphi$ – zdekomponować jak niżej:

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_\alpha^\delta &= \varphi - (T^*T + \alpha I)^{-1}T^*T\varphi + (T^*T + \alpha I)^{-1}T^*(g - g^\delta) = \\ &= \alpha(T^*T + \alpha I)^{-1}\varphi + (T^*T + \alpha I)^{-1}T^*(g - g^\delta).\end{aligned}$$

Pierwszy człon po prawej stronie, $\alpha(T^*T + \alpha I)^{-1}\varphi$, jest nazywany błędem aproksymacji, zaś drugi, $(T^*T + \alpha I)^{-1}T^*(g - g^\delta)$, błędem zaburzenia danych. Formalnie (przynajmniej w przypadku, gdy T jest niezerową wielokrotnością operatora tożsamościowego) błąd aproksymacji dąży do 0, gdy $\alpha \rightarrow 0$. Z drugiej strony, operator $(T^*T + \alpha I)^{-1}T^*$ formalnie dąży do nieograniczonego operatora T^{-1} , możemy więc oczekiwać, że propagowany błąd zaburzenia (drugi wyraz po prawej stronie) danych nagle wzrośnie, gdy $\alpha \rightarrow 0$. Należy więc przyjąć kompromis pomiędzy dokładnością i stabilnością: w przypadku gdy parametr regularyzacji α jest zbyt duży, otrzymuje się słabe przybliżenie dokładnego rozwiązania nawet dla dokładnych danych, a jeśli jest zbyt mały, procedura staje się niestabilna. Optymalna wartość α zależy zarówno od poziomu zaburzenia danych δ , jak i od dokładnego rozwiązania φ .

Istnieją różne strategie wyboru parametru regularyzacji. Najbardziej znana jest zasada niezgodności Morozowa, [M66, G83, M93]. Wynika z niej, że nie powinno się dążyć do spełnienia równania operatorowego dokładniej niż błąd zaburzenia danych. Bardziej precyzyjnie, bazuje ona na wybraniu największego parametru regularyzacji $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$ takiego, że pozostałość $\|T\varphi_\alpha^\delta - g^\delta\|$ jest mniejsza lub równa $\tau\delta$, gdzie $\tau \geq 1$ jest pewnym ustalonym parametrem:

$$\alpha(\delta, y^\delta) := \sup\{\alpha > 0 : \|T\varphi_\alpha^\delta - g^\delta\| \leq \tau\delta\}.$$

Zazwyczaj wystarczy określić parametr α przy pomocy nierówności:

$$\tau_1\delta \leq \|T\varphi_\alpha^\delta - g^\delta\| \leq \tau_2\delta,$$

gdzie $1 \leq \tau_1 < \tau_2$.

W przypadku metod iteracyjnych, takich jak iteracja Landwebera, zasada niezgodności stanowi kryterium zakończenia procesu iteracyjnego na pierwszym indeksie N , dla którego przy ustalonym $\tau \geq 1$:

$$\|T\varphi_N^\delta - g^\delta\| \leq \tau\delta < \|T\varphi_n^\delta - g^\delta\| \quad \text{dla wszystkich } n \leq N-1.$$

2.4.5. Metoda gradientów sprzężonych

Jedną z pośrednich metod rozwiązywania zagadnień odwrotnych jest metoda gradientów sprzężonych (MGS). Metoda ta została po raz pierwszy opublikowana w 1952 roku, [HS52]. Stosuje się ją do równania (2.11) zapisanego w postaci normalnej, tzn.:

$$T^*T\varphi = T^*g.$$

Metodę tę charakteryzuje warunek optymalności w postaci:

$$\|T\varphi_n^\delta - g^\delta\|^2 = \min_{\varphi \in K_n(T^*T, T^*g^\delta)} \|T\varphi - g^\delta\|,$$

gdzie $K_n\{T^*T, T^*g^\delta\} = \text{span}\{(T^*T)^j T^*g^\delta : j = 1, \dots, n\}$ jest podprzestrzenią Kryłowa.

Aby zilustrować MGS jako metodę iteracyjną, rozpatrzmy układ równań zapisany w postaci macierzowej:

$$A\varphi = g^\delta.$$

O macierzy A , $n \times n$, zakłada się, że jest symetryczna i dodatnio określona.

Rozwiązaniem tego równania jest pewien wektor z przestrzeni R^n . Wektor ten przedstawimy w bazie tej przestrzeni. Zauważmy, że rozwiązanie rozważanego równania minimalizuje następującą formę kwadratową:

$$f(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi^T A \varphi - g^\delta \varphi.$$

Zatem jako pierwszy wektor bazy wygodnie jest przyjąć gradient funkcji $f(\varphi)$ dla zerowego przybliżenia rozwiązania.

Przyjmijmy jako pierwsze przybliżenie $\varphi_0 = 0$. Wówczas gradient $f(\varphi)$ osiąga wartość $A\varphi_0 - g^\delta = -g^\delta$. Jako pierwszy wektor tej bazy przyjmijmy pierwszą resztę z działania operatorem A na przybliżenie zerowe, tzn. $p_0 = r_0 = g^\delta$ (gradient funkcji $f(\varphi)$ ze znakiem minus). Reszta z odjęcia od wektora p_0 rezultatu działania operatorem A na kombinację liniową do tej pory wyznaczonych wektorów bazy (tu – na wektor p_0) powinna być prostopadła do p_0 , co oznacza,

że $p_0^T(g^\delta - A\alpha_0 p_0) = 0$. Stąd $\alpha_0 = \frac{p_0^T g^\delta}{p_0^T A p_0}$. Tę resztę definiuje się jako

$r_1 = g^\delta - \alpha_0 A p_0$. Następne przybliżenie rozwiązania określa się jako $\varphi_1 = \varphi_0 + \alpha_0 p_0$. Określenie kolejnego wektora bazy prowadzi do sytuacji, w której

konieczne jest pamiętanie wszystkich poprzednich wektorów bazy i wszystkich poprzednich reszt, dlatego – rezygnując z monotoniczności w maleniu reszt – wprowadza się uproszczoną procedurę, w której pamiętane są tylko poprzedni kierunek i poprzednia reszta.

Algorytm, prowadzący do rozwiązania, ma postać następującą:

- dla $k = 0$:

$$r_0 := g^\delta - A\varphi_0,$$

$$p_0 := r_0,$$

- następnie w pętli od $k = 1$:

początek pętli:

$$\alpha_k := \frac{r_0^T r_0}{p_k^T A p_k},$$

$$\varphi_{k+1} := \varphi_k + \alpha_k p_k,$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k.$$

Gdy r_{k+1} jest dostatecznie małe, pętla zostaje zakończona, rozwiązaniem jest funkcja φ_{k+1} ; w przeciwnym wypadku:

$$\beta_k := \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k},$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k,$$

$$k := k + 1;$$

wracamy na początek pętli.

MGS stosuje się także do równania (2.11) zapisanego w postaci normalnej, tzn.:

$$T^* T \varphi = T^* g^\delta.$$

Metodę tę charakteryzuje warunek optymalności w postaci:

$$\|T\varphi_n^\delta - g^\delta\|^2 = \min_{\varphi \in K_n(T^* T, T^* g^\delta)} \|T\varphi - g^\delta\|,$$

gdzie $K_n(T^* T, T^* g^\delta) = \text{span}\{(T^* T)^j T^* g^\delta : j = 1, \dots, n\}$ jest podprzestrzenią Kryłowa.

Algorytm, prowadzący do najlepszej aproksymacji rozwiązania zagadnienia odwrotnego, jest na postaci normalnej równania określony nieco inaczej niż ten przedstawiony wyżej. Ma on postać następującą:

- dla $k = 0$:

$$\varphi_0^\delta = 0 \text{ – zerowa aproksymacja rozwiązania;}$$

ponadto dalej potrzebne są:

$$r_0 = g^\delta, \quad s_0 = p_1 = T^* r_0;$$

- dla $k = 1, 2, \dots$ aż do momentu, gdy s_{k-1} jest dostatecznie małe lub równe zero:

$$q_k = T p_k,$$

$$\alpha_k = \|s_{k-1}\|^2 / \|q_k\|^2,$$

$$\varphi_k^\delta = \varphi_{k-1}^\delta + \alpha_k q_k,$$

$$r_k = r_{k-1} - \alpha_k q_k,$$

$$s_k = T^* r_k,$$

$$\beta_k = \|s_k\|^2 / \|s_{k-1}\|^2,$$

$$p_{k+1} = s_k + \beta_k p_k.$$

Zauważmy, że φ_n^δ zależy nieliniowo od g^δ . Ponadto można pokazać, że przekształcenie $g^\delta \mapsto \varphi_n^\delta$ jest nieciągłe. Oba te fakty powodują, że analiza metodą gradientów sprzężonych jest trudniejsza niż analiza innymi metodami. Pewne zastosowania tej metody można znaleźć na przykład w pracach [B87a, HW99] czy [EYMM09].

2.4.6. Metoda Levenberga-Marquardta

Algorytm Levenberga-Marquardta jest jednym z najczęściej wykorzystywanych algorytmów optymalizacji nieliniowej, w szczególności w nieliniowym zadaniu najmniejszych kwadratów. Jest to algorytm iteracyjny, łączący w sobie cechy metody największego spadku i metody Gaussa-Newtona.

Podstawowym zastosowaniem algorytmu Levenberga-Marquardta jest rozwiązywanie metodą najmniejszych kwadratów zagadnienia dopasowania krzywej do układu punktów. Problem można sformułować następująco:

Dany jest układ m punktów, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$. Dla poszukiwanej krzywej $f(x, \beta)$ należy znaleźć wektor optymalnych parametrów $\beta^T = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, dla którego suma kwadratów odchyłeń wartości funkcji $f(x, \beta)$ w punktach x_i od wartości y_i , określona w postaci:

$$S(\beta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \beta)]^2 \quad (2.14)$$

jest najmniejsza. Mnożnik $\frac{1}{2}$ przed sumą dodano po to, by w pochodnych tej sumy unikać mnożnika 2.

Algorytm Levenberga-Marquardta jest procedurą iteracyjną. Aby rozpocząć algorytm minimalizacji, trzeba określić początkowy wybór wektora parametrów, β . W wielu przypadkach standardową wartością początkową tego wektora są same jedynki lub same zera, ale zdarzają się przypadki, gdy algorytm jest zbieżny, tylko jeżeli początkowa wartość wektora parametrów jest bliska rozwiązaniu końcowemu.

W każdym kroku iteracyjnym wektor parametrów, β , jest zastępowany przez nowe oszacowanie, $\beta + \delta$. Aby określić wektor poprawek, δ , funkcję $f(x_i, \beta + \delta)$ przybliża się jej zlinearyzowaną aproksymacją:

$$f(x_i, \beta + \delta) \approx f(x_i, \beta) + J_i \delta,$$

gdzie:

$$J_i = \frac{\partial f(x_i, \beta)}{\partial \beta} \quad \text{lub} \quad J_{ij} = \frac{\partial f(x_i, \beta)}{\partial \beta_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Warto zauważyć, że $J = [J_{ij}]$ jest jacobianem zbudowanym z pochodnych cząstkowych funkcji $f(x_i, \beta)$ (jest macierzą kwadratową stopnia m).

Dla optymalnego wektora parametrów, β_{opt} , gradient sumy kwadratów odchyłeń wartości funkcji $f(x, \beta)$ w punktach x_i od wartości y_i , $\nabla S(\beta)$, będzie równy zero. Na mocy przybliżenia funkcji $f(x_i, \beta + \delta)$ jej zlinearyzowaną aproksymacją, dla małych poprawek δ sumę $S(\beta + \delta)$ można zapisać w postaci (por. (2.14)):

$$S(\beta + \delta) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i, \beta) - J_i \delta)^2$$

lub w notacji wektorowej:

$$S(\beta + \delta) \approx \frac{1}{2} \|y - f(\beta) - J\delta\|^2.$$

Przyjęcie gradientu $\nabla S(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta})$ równego zero prowadzi do następującego związku:

$$\nabla S(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0} = -\mathbf{J}^T [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})] + (\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \boldsymbol{\delta} = \nabla S(\boldsymbol{\beta}) + (\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \boldsymbol{\delta}.$$

Stąd optymalny wektor poprawek, $\boldsymbol{\delta}$, jest równy:

$$\boldsymbol{\delta} = -(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \nabla S(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})].$$

Jeśli przyjąć, że $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\beta}_{i+1} - \boldsymbol{\beta}_i$, wówczas powyższa równość przyjmie postać:

$$\boldsymbol{\beta}_{i+1} = \boldsymbol{\beta}_i - (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \nabla S(\boldsymbol{\beta}). \quad (2.15)$$

Gdy zamiast $(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}$ podstawić stałą μ , powyższy wzór opisuje metodę największego spadku.

Postać (2.15) wzoru na wektor $\boldsymbol{\beta}_{i+1}$ jest charakterystyczna dla metody Gaussa-Newtona.

Wielkość $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ dla małych wartości poprawek, $\boldsymbol{\delta}$, (gdy funkcje $f(x_i, \boldsymbol{\beta})$ można w otoczeniu interesującego nas punktu aproksymować funkcjami liniowymi względem parametrów β_i , $i, = 1, 2, \dots, m$) staje się w przybliżeniu równa $\nabla^2 S(\boldsymbol{\beta})$, czyli hesjanowi $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})$ sumy kwadratów odchyłek:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) = [\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta})]^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}). \quad (2.16)$$

Levenberg, [L44], zauważył, że we wzorze (2.15) do macierzy $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ można dodać $\lambda \mathbf{I}$, gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową, a czynnik λ – liczbą rzeczywistą:

$$\boldsymbol{\beta}_{i+1} = \boldsymbol{\beta}_i - (\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \nabla S(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}_i + (\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^T [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})] \quad (2.17)$$

Dzięki takiemu zabiegowi współczynnik stojący przy $\nabla S(\boldsymbol{\beta})$ we wzorze (2.17) dla małych wartości λ przyjmuje wartość jak we wzorze (2.15), zaś dla dużych wartości, gdy można położyć $\mu = \frac{1}{\lambda}$, wzór (2.17) przyjmuje postać zbliżoną do metody największego spadku.

Algorytm dostosowuje się do tego, czy funkcja $S(\boldsymbol{\beta})$ zwiększa swoją wartość, czy zmniejsza. Intuicja podpowiada, że gdy błąd średniokwadratowy się zwiększa, powinno się zwiększyć λ , aby współczynnik stał się bliższy stosowanemu w metodzie największego spadku, zaś gdy błąd się zmniejsza, wówczas λ się zmniejsza, aby współczynnik stał się bliższy temu w metodzie Gaussa-Newtona (bliższy hesjanowi).

W algorytmie Levenberga niekorzystne jest to, że jeżeli wartość czynnika λ jest duża, odwrócenie macierzy $\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I}$ czy $\mathbf{H} + \lambda \mathbf{I}$ jest bardzo trudne. Marquardt, [M63], udoskonalił algorytm Levenberga i zastąpił macierz jednostkową $\mathbf{I}$ macierzą diagonalą $\text{diag}(\mathbf{J}^T \mathbf{J})$ (zawierającą na głównej przekątnej wyrażenia przekątne macierzy $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$), przekształcając wzór (2.17) do postaci:

$$\boldsymbol{\beta}_{i+1} = \boldsymbol{\beta}_i - (\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \text{diag}(\mathbf{J}^T \mathbf{J}))^{-1} \nabla S(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}_i + (\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \text{diag}(\mathbf{J}^T \mathbf{J}))^{-1} \mathbf{J}^T [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})] \quad (2.18)$$

W ten sposób uzyskuje się efekt dłuższych kroków w kierunku, w którym gradient jest mniejszy.

Algorytm Levenberga-Marquardta można by więc zapisać następująco:

1. Oblicz wartość $\boldsymbol{\beta}_{i+1}$ na podstawie $\boldsymbol{\beta}_i$ z równania (2.18).
2. Oblicz wartość błędu $S(\boldsymbol{\beta})$ dla $\boldsymbol{\beta}_{i+1}$ na podstawie wzoru (2.14).
3. Jeśli błąd wzrósł, wróć do wartości $\boldsymbol{\beta}_i$, zwiększ wartość λ k -krotnie i wróć do kroku 1 (przybliżenie liniowe minimalizowanej funkcji w otoczeniu $\boldsymbol{\beta}_i$ okazało się nie dość ściśle, więc zwiększa się "wpływ" metody największego spadku).
4. Jeśli błąd zmalał, zaakceptuj ten krok i zmniejsz wartość λ k -krotnie (założenie o liniowości minimalizowanej funkcji w otoczeniu $\boldsymbol{\beta}_i$ okazało się wystarczająco ściśle, więc zwiększa się "wpływ" metody Gaussa-Newtona).

Zazwyczaj przyjmuje się $k = 10$.

Największą zaletą algorytmu Levenberga-Marquardta jest jego szybka zbieżność w porównaniu z konkurencyjnymi metodami. Najkosztowniejszą operacją jest natomiast wyznaczenie macierzy odwrotnej, które w praktyce jest przeprowadzane w sposób przybliżony, na przykład przy użyciu metody SVD.

2.4.7. Regularyzacja przez dyskretyzację

Zagadnienia odwrotne mogą być regularyzowane przez dyskretyzację. Na ogół ograniczenie operatora T do jakiejkolwiek skończonej podprzestrzeni $X^n \subset X$ prowadzi do dobrze postawionego problemu, jako że liniowe operatory na skończone wymiarowych przestrzeniach są zawsze ograniczone. Jednakże liczba uwarunkowania (ang. *condition number*) skończenie wymiarowego problemu może być bardzo duża; zależy ona od wyboru X^n . Podczas gdy np. dla różniczkowania wiadomo, jak wybrać skończenie wymiarową podprzestrzeń w taki sposób, aby mieć kontrolę nad liczbą uwarunkowania, odpowiednie skończenie wymiarowe

podprzestrzenie dla wielu problemów nie zawsze są znane *apriori*, a obliczenia numeryczne w takich przestrzeniach są zwykle zbyt kosztowne.

W regularyzacji przez dyskretyzację rozmiar skończenie wymiarowej podprzestrzeni działa jak parametr regularyzacji. Dlatego asymptotyczne rozwiązanie staje się mniej wiarygodne, jeżeli dyskretyzacja staje się bardziej gęsta (ang. *gets finer*), [N77], [EHN00, podrozdz. 3.3], [K89, rozdz. 17].

2.4.8. Inne metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych

Wśród wielu metod rozwiązywania liniowych i nieliniowych zagadnień odwrotnych w wielu dziedzinach techniki, fizyki matematycznej, równań różniczkowych cząstkowych i innych, wyróżnić można takie jak:

- metoda przewidywania rozwiązania w postaci szeregu,
- metoda transformacji Laplace'a,
- metody transformacji całkowych,
- metody oparte na teorii potencjałów,
- metody iteracyjne,
- metody regularyzacji,
- metody źródeł pozornych,
- metoda rozwiązań podstawowych,
- metoda współczynników wrażliwości,
- metoda filtru Kalmana,
- metody stochastyczne i podejście probabilistyczne,
- metoda elementów skończonych i metoda elementów brzegowych,
- i wiele innych.

Metoda przewidywania rozwiązania zagadnienia odwrotnego w postaci szeregu została przedstawiona w pracy [B64], a także w pracach [D66, K67] i w wielu późniejszych publikacjach. Praca [B64] dotyczyła identyfikacji wartości brzegowych temperatury, a rozwiązanie było podane w postaci nieskończonego szeregu pochodnych temperatury i strumienia ciepła względem czasu. W późniejszych latach metoda ta była stosowana z powodzeniem do przedstawiania rozwiązań zagadnień odwrotnych w różnych obszarach zainteresowań z wykorzystaniem różnych postaci szeregów i wielomianów, [A97, H99, F99, G03 i in.].

Metoda transformacji Laplace'a była wykorzystywana do szukania przybliżonych rozwiązań zagadnień odwrotnych, szczególnie w okresie poprzedzającym powszechną dostępność komputerów. Można tu wspomnieć prace [CG80, GCK81, GK82, M00, MALMH03, CG10, i in.].

Specyfika różnych zagadnień odwrotnych wymuszała korzystanie z transformacji całkowych. Tak było np. w przypadku rozwiązywania zagadnień związanych z tomografią komputerową, [N99]. Podejście oparte na opisie rozwiązań przy wykorzystaniu

potencjałów, czy ich reprezentacji całkowitej, zaprezentowano m.in. w pracach [G89, SS02, AK04, JW06] i in.

Metody iteracyjne są szczególnie często wykorzystywane w różnego typu zagadnieniach odwrotnych, [VV86]. Oprócz wspomnianych już metod Landwebera czy Lardy'ego wielu autorów wprowadza własne metody iteracyjne, [YZ09, DS05, J05, JM02].

Wiele metod regularyzacji bazuje na regularyzacji Tichonowa. Są jednak rozmaite inne podejścia, np. hybrydowe [LCH06], oparte na produkcji entropii, [C05, LS06, CFG07], quasi-Tichonowa [CL08]; połączenie podejścia Tichonowa i opartego na entropii [M00a]; regularyzacja Fouriera [XFL06, FL09] i inne.

Metodę źródeł pozornych w zastosowaniu do zagadnień odwrotnych prezentowano m.in. w pracach [E90, KS01, VW04, JL08, TW07]. Metoda rozwiązań podstawowych często jest stosowana w połączeniu z innymi metodami, [JM07, CKS08, AM09, BIJL09]. Metoda współczynników wrażliwości, nazywana też metodą specyfikacji funkcji, została przedstawiona w monografii [BBC85], a następnie stosowana w wielu pracach, np. [B95, KS00, K01, KS01a, MMD03, MMS08], także w połączeniu z innymi metodami.

Metodę filtru Kalmana i podejście probabilistyczne zaprezentowano m.in. w pracach [AS97, E99, ANZ04, IKKKK07].

Prace, w których stosowane są metody elementów skończonych, elementów brzegowych, różnic skończonych oraz metod hybrydowych, bazujących na elementach skończonych, to m.in. [C00, DDY04, MEHILW04, NN05, RK06, MG08, GLM08, GL10].

Wśród wielu innych metod można jeszcze wymienić metodę gradientów sprzężonych, [PN98, HW99, PY00], wygładzania danych, [M93a, D94], metodę falek, [EBR99, FZQ03], algorytm genetyczny, [MEIL05, PB05, DMAU08], podejście bayesowskie, [WZ04, YZF09] i inne.

Nie sposób wymienić wszystkich metod stosowanych przy rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych. Jedna z nich, oparta na wykorzystaniu własności funkcji Trefftza, jest omówiona na kartach tej monografii.

3. Funkcje Trefftza i ich własności

3.1. METODA TREFFTZA

W swoim artykule z 1926 roku, [T26], Trefftz zaprezentował ideę przybliżania rozwiązania równania harmonicznego kombinacją liniową funkcji, spełniających równania Laplace'a (funkcji harmoniczných) jako alternatywę dla metody Ritza rozwiązywania zagadnień brzegowych. Od czasu tej pracy funkcje, spełniające tożsamościowo zadane równanie różniczkowe, nazywa się funkcjami Trefftza.

Oczywiście wyznaczenie jakiejś funkcji, spełniającej rozważane równanie różniczkowe, nie oznacza od razu, że jest ona funkcją Trefftza. Dla danego równania wyznacza się zbiór takich funkcji. Zgodnie z ideą przedstawioną w pracy [T26] funkcje te muszą mieć tę własność, że rozwiązanie ściśle rozważanego równania różniczkowego z zadanymi warunkami brzegowymi (gdy jedną ze zmiennych jest czas, to także z warunkami/warunkiem początkowymi/początkowym) można opisać w sposób przybliżony przy pomocy kombinacji liniowej tych funkcji. Wówczas warunki spełnione są w sposób przybliżony, zaś równanie w sposób ścisły.

Taka metoda rozwiązywania równań różniczkowych nosi nazwę metody Trefftza. Jest ona stosowana przy rozważaniu równań różniczkowych postaci:

$$T\varphi = g, \tag{3.1}$$

gdzie T jest operatorem różniczkowym, działającym na funkcje określone w pewnym obszarze $\tilde{\Omega}$, przy czym $\varphi \in C^N(\tilde{\Omega})$, gdzie N jest nie mniejsze niż rząd równania różniczkowego. Ponadto zakłada się, że $\varphi \in L^2(\tilde{\Omega})$; to założenie jest potrzebne ze względu na średniokwadratowe dopasowywanie przybliżonego rozwiązania równania (3.1) do warunków brzegowych i – gdy występuje zależność od czasu – początkowych. Gdy obszar $\tilde{\Omega}$ zawiera zmienną czasową, wygodnie jest zapisać, że $\tilde{\Omega} = \Omega \times (0, t)$, gdzie Ω jest obszarem zajmowanym przez rozważany ośrodek, zaś $(0, t)$ – przedziałem czasu. O brzegu obszaru Ω zakłada się, że jest kawałkami gładki.

Gdy zbiór tych funkcji jest zupełny, tzn. gdy stanowią one bazę przestrzeni rozwiązań rozważanego równania różniczkowego, wówczas nazywa się je T-funkcjami lub funkcjami T-kompletnymi, [H80].

Jeśli w równaniu (3.1) $g = 0$, wówczas mówimy, że jest ono jednorodne. W przypadku gdy $g \neq 0$, tzn. gdy rozważane jest równanie niejednorodne, zakłada się, że funkcja opisująca niejednorodność (nazywana też funkcją źródła bądź po prostu źródłem) jest dostatecznie wysokiej klasy ciągłości, aby można ją było opisać z dobrym przybliżeniem skończoną liczbą wyrazów szeregu Taylora, tzn.:

$$g(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_k) = g(x_1, \dots, x_n) + \frac{dg}{1!} + \frac{d^2g}{2!} + \dots + \frac{d^N g}{N!} + R_{N+1}, \quad (3.2)$$

gdzie:

$$d^n g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_k} \Delta x_k \right)^{(n)},$$

zaś R_{N+1} jest resztą szeregu, [F66].

Idea metody Trefftza polega zatem na znalezieniu układu funkcji spełniających w sposób ścisły rozważane równanie różniczkowe, a następnie przybliżeniu rozwiązania zagadnienia brzegowego (początkowo-brzegowego) dla tego równania kombinacją liniową tych funkcji. Wtedy to przybliżone rozwiązanie spełnia równanie różniczkowe, natomiast warunki początkowe i brzegowe spełnione są w sposób przybliżony.

Gwałtowny rozwój metody Trefftza rozpoczął się z końcem lat siedemdziesiątych dwudziestego wieku pracami Herrery i Jirouška [H77, J78, HS78, H80, H84, H84a]. J. Jiroušek przedstawił rezultaty stanowiące podstawy rozwoju metody „dużych elementów skończonych lokalnie spełniających wszystkie równania pola”. W pracy [JG86] po raz pierwszy autorzy użyli sformułowania *hybrid-Trefftz finite element*, wiążąc tym samym tę metodę z wynikami E. Trefftza. W wyniku badań stwierdzono, że z danym równaniem różniczkowym związane są dwa układy funkcji T-kompletnych, [Z89]: pierwszy dla obszarów ograniczonych oraz drugi dla obszarów nieograniczonych. W przypadku obszarów ograniczonych wymaga się od funkcji braku osobliwości wewnątrz obszaru. Dla obszarów nieograniczonych funkcje powinny dążyć do zera w nieskończoności (warunek wypromieniowania).

W pracy [HS78] pokazano, jak uzyskiwać funkcje T-kompletne. Dokonuje się tego przez całkowanie funkcji Greena z odpowiednią wagą. Wagami są ciągłe i liniowo niezależne funkcje. Są one inne dla obszarów ograniczonych i dla obszarów nieograniczonych. Prosty przykładem układu funkcji T-kompletnych dla obszarów ograniczonych i dla równania Laplace'a są funkcje harmoniczne. Szerszy przegląd funkcji tego typu znaleźć można w monografii [Z89].

Obok funkcji uzyskanych metodą podaną przez Herrerę (funkcje Herrery) należy wymienić systemy T-kompletnych funkcji Kupradze [K79]. Są to funkcje Greena o osobliwościach poza rozważanym obszarem.

Oprócz wspomnianych wcześniej autorów zajmujących się tą tematyką należy wymienić Jirouška i Leona [JL77], A. Wróblewskiego, [JW96], B. Szybińskiego, A.P. Zielińskiego, [SZ95], J.A. Kołodzieja, [K01a], O.C. Zienkiewicza, [ZZ85], A. Maciąga, [M09] i wielu innych, np. [JC95, BHP97, KFK98, PBH00, SSK02, KW03, CGML04, Q04, L08, LQW08]. Zakres tematów poruszanych w pracach wymienionych autorów jest szeroki – od zagadnień zginania grubych, cienkich i ortotropowych płyt [JCZ93, JG86, JN90, JWQH94, JWH95, JWS95] poprzez problemy elastoplastyczności i sprężystości, [Z88, BPF01, LQW08], analizę pęknięć, [SZ06], przepływu płynów, [PBH00], skręcania pręta, [KW03], aż do równań falowych, [M09]. Ogromną zasługą tych badaczy było zastosowanie funkcji Trefftza jako funkcji bazowych MES i MEB [H84a, ZZ85, JV90, J93, JW94, SZ95, WSSZ04] oraz w metodzie kollokacji brzegowej [FL98, FL99, K01a]. Obszerłą monografię poświęconą m.in. zastosowaniom funkcji Trefftza w metodzie kollokacji przedstawili Kołodziej i Zieliński, [KZ09].

Metodą Trefftza były badane głównie zagadnienia liniowe, jakkolwiek należy również wspomnieć, że metoda T-funkcji może być stosowana do rozwiązywania zagadnień nieliniowych [U08].

Czas w postaci ciągłej występował przez wiele lat w bardzo nielicznych pracach wykorzystujących funkcje Trefftza. Jest tak na przykład w pracy [BS87], w której rozwiązano problem drgań nieskończonej płyty sztywnej spoczywającej na sprężystej półprzestrzeni. Dopiero zwrócenie uwagi na ponowne „odkrycie” w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku pracy Rosenbloom i Widdera, [RW56], oraz powiązanej z nią pracy [YFK83] zapoczątkowało powstanie wielu artykułów, prezentujących nowe podejście do metody Trefftza, oparte na generowaniu wielomianów rozwiązujących. Można tu wspomnieć prace [D86, D90, HM92, T95a, C98, FH98, H99, CFH99, CFH99a, CFK01, CF02, CFS03] i inne. Zasadnicza idea pozostała taka sama jak w pracach wcześniejszych. Różnica uwidoczniła się w podejściu do czasu występującego w zagadnieniach niestacjonarnych: pozwala ona uwzględnić czas jako pełnoprawną zmienną, bez konieczności wprowadzania jego dyskretyzacji. Zakres zmiennej czasowej jest dzielony na przedziały, lecz otrzymane rozwiązania są w tych przedziałach ciągłe, często nawet klasy C^∞ ze względu na zmienną czasową. Warto także wspomnieć pracę [R97], w której, także bazując na pracy [RW56], podano wielomiany rozwiązujące dla pewnej klasy równań parabolicznych i udowodniono, że są one funkcjami Trefftza. Dla tych samych równań przedstawiono sposób ich wyprowadzenia oraz ich własności we wspomnianych wcześniej pracach, szerzej omówionych w dalszych rozdziałach.

Szybko okazało się, że w układach innych niż kartezjański, metodą stosowaną w wyżej wymienionych artykułach generuje się funkcje Trefftza, które nie są wielomianami, [FH98, F99, FGH99, HHS01].

Najbardziej znaczącą pozycją wśród publikacji prezentujących to podejście jest monografia [CF00]. Opisano w niej trzy sposoby generowania funkcji Trefftza.

Pierwszy – to wykorzystanie równania rządzącego procesem w rozwinięciu spełniającej to równanie funkcji w szereg Taylora. Drugi sposób polega na wykorzystaniu tzw. funkcji generującej, której postać zwykle otrzymuje się, rozwiązując analizowane równanie różniczkowe metodą rozdzielania zmiennych. Trzeci sposób polega na zastosowaniu operatorów odwrotnych (rozwój tej techniki został opisany m.in. w pracach [CF03, CF03a, CF03b, S04]).

Wymienione trzy metody znajdują zastosowanie przy generowaniu funkcji Trefftza dla liniowych równań różniczkowych cząstkowych. Dla dowolnych równań różniczkowych cząstkowych nie istnieje ogólna metoda generowania funkcji Trefftza.

We wspomnianej monografii [CF00] rozważono równanie niestacjonarnego przepływu ciepła, równanie harmoniczne, biharmoniczne, Poissona, Helmholtza oraz jednowymiarowe równanie falowe. Uzyskane funkcje, nazwane funkcjami rozwiązań, mogą być także wykorzystywane jako funkcje bazowe MES, [C99].

W dalszych pracach znaleziono zastosowania metody Trefftza w zagadnieniach falowych, [M04, M05, MW05, MW05a], w zagadnieniach elastokinetyki [M07], i w wielu innych problemach.

W następnych podrozdziałach zostaną przedstawione wzory, opisujące funkcje Trefftza dla różnych typów równań różniczkowych. Zostaną one wygenerowane przy wykorzystaniu pierwszych dwóch z wyżej omówionych sposobów.

3.2. FUNKCJE TREFFTZA DLA RÓWNANIA LAPLACE'A

Rozważane jest równanie Laplace'a w kartezjańskim układzie współrzędnych w ograniczonym obszarze $\Omega \subset R^n$:

$$\nabla^2 u = 0, \quad (3.3)$$

gdzie $\nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Gdy $n = 2$, to obszar Ω jest dwuwymiarowy i często przyjmuje się $x_1 = x, x_2 = y$. Gdy $n = 3$, to obszar Ω jest trójwymiarowy (wówczas $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$). Ponieważ w każdym z tych przypadków funkcje Trefftza (nazywane funkcjami harmonicznymi) mają inną postać, zostaną one rozważone oddzielnie.

3.2.1. Równanie Laplace'a w przestrzeni dwuwymiarowej

Równanie (3.3) przyjmuje tu postać:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2. \quad (3.4)$$

Ponieważ rozważany obszar Ω może być zajęty przez jakiś ośrodek (ciało stałe, płyn), więc zakładamy, że jest on ograniczony.

Przy wyprowadzaniu postaci T-funkcji (funkcji harmonicznych) wykorzystana zostanie metoda funkcji generującej. Uzyskuje się ją, rozwiązując równanie (3.4) metodą rozdzielania zmiennych, tzn. zakładając, że $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Dla dwuwymiarowego równania Laplace'a funkcja generująca $\Gamma_{L2}(x, y; p)$ ma postać:

$$\Gamma_{L2}(x, y; p) = e^{p(x+iy)}, \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2, \quad (3.5)$$

gdzie p jest dowolnym parametrem rzeczywistym, tzn. $p \in R$. Funkcja $\Gamma_{L2}(x, y; p)$ jest funkcją generującą dla T-funkcji dla dwuwymiarowego równania Laplace'a. Jest to funkcja harmoniczna ze względu na zmienne (x, y) .

Rozwijając funkcję $\Gamma_{L2}(x, y; p)$ w szereg Taylora względem parametru $p \in R$, $p \neq 0$, otrzymuje się:

$$\Gamma_{L2}(x, y; p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} p^n = \sum_{n=0}^{\infty} [F_n(x, y) + iG_n(x, y)] p^n,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} F_n(x, y) &= \operatorname{Re} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum_{k=0, 2, \dots}^{n \geq k} (-1)^{k/2} \frac{x^{n-k} y^k}{(n-k)! k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{x^{n-2k} y^{2k}}{(n-2k)! (2k)!}, \\ G_n(x, y) &= \operatorname{Im} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum_{k=1, 3, \dots}^{n \geq k} (-1)^{(k-1)/2} \frac{x^{n-k} y^k}{(n-k)! k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{x^{n-2k-1} y^{2k+1}}{(n-2k-1)! (2k+1)!} \end{aligned} \quad (3.6)$$

dla $n = 0, 1, \dots$, przy czym $G_0(x, y) = 0$.

Kilka kolejnych funkcji $F_n(x, y)$ i $G_n(x, y)$ ma postać następującą:

$$\begin{aligned}
 F_0(x, y) &= 1, & G_0(x, y) &= 0, \\
 F_1(x, y) &= x, & G_1(x, y) &= y, \\
 F_2(x, y) &= \frac{x^2}{2!} - \frac{y^2}{2!}, & G_2(x, y) &= xy, \\
 F_3(x, y) &= \frac{x^3}{3!} - \frac{xy^2}{2!}, & G_3(x, y) &= \frac{x^2y}{2!} - \frac{y^3}{3!}, \\
 F_4(x, y) &= \frac{x^4}{4!} - \frac{x^2y^2}{2!2!} + \frac{y^4}{4!}, & G_4(x, y) &= \frac{x^3y}{3!} - \frac{xy^3}{3!}, \\
 F_5(x, y) &= \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3y^2}{3!2!} + \frac{xy^4}{4!}, & G_5(x, y) &= \frac{x^4y}{4!} - \frac{x^2y^3}{2!3!} + \frac{y^5}{5!}.
 \end{aligned}$$

W przypadku gdy wskaźnik funkcji Trefftza ma wartość ujemną, funkcja przyjmuje wartość zero.

Ponieważ funkcja generująca $\Gamma_{L_2}(x, y; p)$ jest funkcją harmoniczną ze względu na zmienne (x, y) , więc także funkcje $F_n(x, y)$ i $G_n(x, y)$ są funkcjami harmonicznymi.

Pomiędzy funkcjami $F_n(x, y)$ i $G_n(x, y)$ zachodzą, łatwe do udowodnienia, następujące związki dla $n = 0, 1, \dots$, [CF00]:

$$\begin{aligned}
 F_{n+1}(x, y) &= \frac{x}{n+1} F_n(x, y) - \frac{y}{n+1} G_n(x, y), \\
 G_{n+1}(x, y) &= \frac{x}{n+1} G_n(x, y) + \frac{y}{n+1} F_n(x, y).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ze wzorów (3.7) wynikają następujące nierówności (argumenty funkcji to (x, y)):

$$\begin{aligned}
 |F_{n+1}| &\leq \frac{1}{n+1} (|x| |F_n| + |y| |G_n|), \\
 |G_{n+1}| &\leq \frac{1}{n+1} (|x| |G_n| + |y| |F_n|).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dodając nierówności (3.8) stronami i oznaczając:

$$s = |x| + |y|, \quad H_n = |F_n| + |G_n|, \quad H_0 = |F_0| + |G_0| = 1$$

otrzymujemy:

$$H_{n+1} \leq \frac{s}{n+1} H_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Stąd, dla kolejnych wskaźników $n = 0, 1, \dots$, mamy:

$$H_1 \leq s, \quad H_2 \leq \frac{s^2}{2!}, \quad H_3 \leq \frac{s^3}{3!}, \quad \dots, \quad H_n \leq \frac{s^n}{n!}, \quad \dots \quad (3.9)$$

Stąd wynika, że:

$$|F_{n+1}| + |G_{n+1}| < e^{|x|+|y|}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Powyższa nierówność dowodzi ograniczoności funkcji $F_n(x, y)$ i $G_n(x, y)$ dla skończonych wartości argumentu (x, y) i dowolnych wskaźników $n = 0, 1, \dots$.

Z oszacowania (3.9) wynika, że w granicy, dla $s < \infty$ i $n \rightarrow \infty$, otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|F_n| + |G_n|) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s^n}{n!} = 0.$$

$$\text{Stąd } \lim_{n \rightarrow \infty} |F_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |G_n| = 0.$$

Dla pochodnych funkcji $F_n(x, y)$ i $G_n(x, y)$ względem zmiennej x zachodzą dla $n = 0, 1, \dots$ następujące zależności, [CF00]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial x} &= 0 = \frac{\partial G_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_{n+1}}{\partial x} &= F_n, \quad \frac{\partial G_{n+1}}{\partial x} = G_n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Podobne związki zachodzą dla pochodnych funkcji $F_n(x, y)$ i $G_n(x, y)$ względem zmiennej y dla $n = 0, 1, \dots$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial y} &= 0 = \frac{\partial G_0}{\partial y}, \\ \frac{\partial F_{n+1}}{\partial y} &= -G_n, \quad \frac{\partial G_{n+1}}{\partial y} = F_n. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Iloczyn skalarny gradientów funkcji $F_n(x, y)$ i $G_n(x, y)$ znika, z czego wnioskujemy się, że te gradienty są wektorami prostopadłymi. Oznacza to także, że funkcje $F_n(x, y)$ i $G_n(x, y)$, stanowiące części rzeczywistą i urojoną funkcji $H_n = F_n + iG_n$, spełniają równania Cauchy-Riemanna, [K79a].

Funkcje $F_n(x, y)$ i $G_n(x, y)$ stanowią T-kompletny układ funkcji dla obszarów ograniczonych, [CF00].

Dla argumentów (x, y) takich, że $|x| + |y| \leq 1$ funkcje $F_n(x, y)$ i $G_n(x, y)$ bardzo szybko maleją ze wzrostem wartości n . Na podstawie nierówności (3.9) można pokazać, że warunki $|F_n| \leq \varepsilon$ i $|G_n| \leq \varepsilon$ są spełnione dla $\varepsilon = 10^{-15}$ już dla $n = 18$, [CF00]. Z tego względu wygodniejsze może być rozważanie funkcji $F_n^* = n!F_n$ i $G_n^* = n!G_n$. Wzory rekurencyjne (3.7) przyjmą wówczas dla $n = 0, 1, \dots$ postać:

$$\begin{aligned} F_{n+1}^*(x, y) &= xF_n^*(x, y) - yG_n^*(x, y), \\ G_{n+1}^*(x, y) &= xG_n^*(x, y) + yF_n^*(x, y). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Traktując związki rekurencyjne (3.12) jak układ równań różnicowych można – eliminując z nich np. G_n^* – sprowadzić je do równania różnicowego drugiego rzędu:

$$F_{n+2}^* - 2xF_{n+1}^* + (x^2 + y^2)F_n^* = 0.$$

Równanie charakterystyczne tego równania, [C94], ma pierwiastki $s_{1,2} = x \pm iy$. Zatem rozwiązanie tego równania z warunkami początkowymi $F_0^*(x, y) = 1$, $F_1^*(x, y) = x$ ma postać:

$$F_n^*(x, y) = \frac{1}{2}(x - iy)^n + \frac{1}{2}(x + iy)^n = r^n \cos n\varphi, \quad (3.13a)$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$.

Podobnie można pokazać, że:

$$G_n^*(x, y) = \frac{1}{2}(x - iy)^n - \frac{1}{2}(x + iy)^n = r^n \sin n\varphi. \quad (3.13b)$$

Dla równania różnicowego na funkcję G_n^* warunki początkowe mają postać $G_0^*(x, y) = 0$, $G_1^*(x, y) = y$. Dla obu równań różnicowych warunki początkowe są

konsekwencją wzorów (3.6) i podstawienia $F_n^* = n!F_n$, $G_n^* = n!G_n$. Jak łatwo zauważyć, funkcje $F_n^*(x, y) = r^n \cos n\varphi$ i $G_n^*(x, y) = r^n \sin n\varphi$ są funkcjami harmonicznymi w biegunowym układzie współrzędnych r, φ . Wówczas w równaniu (3.3)

$$\text{mamy } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Układ funkcji Trefftza dla układu biegunowego w postaci wzorów (3.13) został także przedstawiony w monografiach [H84, ZZ85, Q00].

3.2.2. Równanie Laplace'a w przestrzeni trójwymiarowej

Dla trójwymiarowego równania Laplace'a, tzn. dla równania:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = 0,$$

funkcja generująca $\Gamma_{L3}(x, y, z; p, q)$ ma postać:

$$\Gamma_{L3}(x, y, z; p, q) = e^{px+qy+iz\sqrt{p^2+q^2}}, \quad (x, y, z) \in \Omega \subset R^3, \quad (3.14)$$

gdzie p, q są dowolnymi parametrami rzeczywistymi, tzn. $p, q \in R$. Funkcja $\Gamma(x, y, z; p, q)$ jest funkcją harmoniczną ze względu na zmienne (x, y, z) . Nie jest to jedyna funkcja generująca. Innymi funkcjami generującymi są funkcje:

$$\Gamma_{L3_1}(x, y, z; p, q) = e^{py+qz+ix\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \Gamma_{L3_2}(x, y, z; p, q) = e^{pz+qx+iy\sqrt{p^2+q^2}},$$

jak również na przykład:

$$\Gamma_{L3_3}(x, y, z; p, q) = e^{i(px+qy)+z\sqrt{p^2+q^2}}, \quad p, q \in R.$$

Rozwijając funkcję $\Gamma_{L3}(x, y, z; p, q)$ w szereg Taylora względem parametrów $p, q \in R$, $p \neq 0$ i $q \neq 0$, otrzymujemy:

$$e^{px+qy+iz\sqrt{p^2+q^2}} = \Gamma_{L3}(x, y, z; p, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n R_{nk}(x, y, z; p, q) p^{n-k} q^k, \quad (3.15)$$

gdzie, [CF00]:

$$R_{nk}(x, y, z; p, q) = P_{nk}(x, y, z) + i\sqrt{p^2+q^2} Q_{nk}(x, y, z). \quad (3.16)$$

Postać (3.16) funkcji $R_{nk}(x, y, z; p, q)$ jest uzasadniona następującymi operacjami, [CJ03]:

$$\begin{aligned}
 e^{px+qy+iz\sqrt{p^2+q^2}} &= e^{px+qy} e^{iz\sqrt{p^2+q^2}} = e^{px+qy} \left(\cos\left(z\sqrt{p^2+q^2}\right) + i \sin\left(z\sqrt{p^2+q^2}\right) \right) = \\
 &= e^{px+qy} \left(\cos\left(z\sqrt{p^2+q^2}\right) + i\sqrt{p^2+q^2} \frac{\sin\left(z\sqrt{p^2+q^2}\right)}{\sqrt{p^2+q^2}} \right) = \\
 &= e^{px+qy} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (p^2+q^2)^k z^{2k}}{(2k)!} + i\sqrt{p^2+q^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (p^2+q^2)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{n!m!} p^n q^m \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^k k!}{l!(k-l)!} \frac{p^{2l} q^{2(k-l)} z^{2k}}{(2k)!} + \right. \\
 &\quad \left. + i\sqrt{p^2+q^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^k k!}{l!(k-l)!} \frac{p^{2l} q^{2(k-l)} z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^k k!}{l!(k-l)!} \frac{1}{n!m!} \frac{p^{2l+n} q^{2(k-l)+m} z^{2k}}{(2k)!} + \\
 &\quad + i\sqrt{p^2+q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^k k!}{l!(k-l)!} \frac{1}{n!m!} \frac{p^{2l+n} q^{2(k-l)+m} z^{2k+1}}{(2k+1)!}.
 \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia postaci funkcji $R_{nk}(x, y, z; p, q)$ różniczkuje się związek (3.15) względem p i q przy wykorzystaniu postaci (3.16) funkcji R_{nk} . Po przekształceniach dochodzi się do wzorów:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Gamma_{L3}}{\partial p} &= \left(x + \frac{ipz}{\sqrt{p^2+q^2}} \right) \Gamma_{L3} = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n (n-k) R_{nk} p^{n-k-1} q^k + \frac{ip}{\sqrt{p^2+q^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n Q_{nk} p^{n-k} q^k,
 \end{aligned} \tag{3.17a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{L3}}{\partial q} &= \left(x + \frac{iqz}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right) \Gamma_{L3} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n k R_{nk} p^{n-k} q^{k-1} + \frac{iq}{\sqrt{p^2 + q^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n Q_{nk} p^{n-k} q^k. \end{aligned} \quad (3.17b)$$

Po przemnożeniu związku (3.17a) przez q , związku (3.17) przez p , a następnie odjęciu ich stronami otrzymuje się:

$$(qx - py)\Gamma_{L3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (n-k) R_{nk} p^{n-k-1} q^k - \sum_{k=1}^n k R_{nk} p^{n-k} q^{k-1} \right).$$

Podstawiając za Γ_{L3} prawą stronę wzoru (3.15) przeniebrowaną tak, aby sumowanie po n odbywało się od $n = 1$ i porównując wyrażenia stojące przy tych samych potęgach p i q otrzymuje się po prostych przekształceniach, [CF00]:

$$R_{10} = xR_{00}, \quad R_{11} = yR_{00}, \quad (3.18)$$

i ogólnie, dla $1 \leq j \leq n-1$:

$$\begin{aligned} R_{n,n-1} &= xR_{n-1,n-1}, \quad R_{n,1} = yR_{n-1,0}, \\ R_{n,j+1} &= \frac{1}{j+1} [(n+1-j)R_{n,j-1} - xR_{n-1,j-1} + yR_{n-1,j}]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Wzory (3.18) i (3.19) pozostają prawdziwe, gdy zamiast R wpisze się P lub Q .

Aby wyznaczyć funkcję R_{00} , porównuje się prawe strony wzorów (3.14) i (3.15) przy wykorzystaniu przedstawienia (3.16). Stąd:

$$e^{px+qy} (\cos(zs) + i \sin(zs)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (P_{nk} + i s Q_{nk}) p^{n-k} q^k,$$

gdzie $s = \sqrt{p^2 + q^2}$. Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron, a następnie przechodząc z parametrem s do zera przy wykorzystaniu zależności $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin(zs)}{s} = z$, $\lim_{s \rightarrow 0} \cos(zs) = 1$, dostaje się:

$$P_{00} = 1, \quad Q_{00} = z. \quad (3.20)$$

Kolejne funkcje R_{n0} wyznacza się, porównując lewą i prawą stronę zależności (3.15) dla $q = 0$. Wyznaczając pierwszą i drugą pochodną tak otrzymanego związku względem zmiennej p , mnożąc następnie pierwszą pochodną przez $2x$ i odejmując od drugiej pochodnej, po przekształceniach otrzymuje się następujące związki rekurencyjne:

$$\begin{aligned} P_{n+2,0} &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[2x(n+1)P_{n+1,0} - (x^2 + z^2)P_{n0} \right], & n = 0, 1, \dots, \\ Q_{n+1,0} &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[2x(n+1)Q_{n,0} - (x^2 + z^2)Q_{n-1,0} \right], & n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Zestawiając wzory (3.18), (3.19), (3.20) i (3.21) można łatwo wyznaczyć funkcje P_{nk} i Q_{nk} np. dla $n = 0, 1, 2, 3$, [CF00].

Funkcje P_{nk} dla $k = 0, \dots, n+1$:

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad P_{00} = 1, \\ n = 1 & \quad P_{10} = x, \quad P_{11} = y, \\ n = 2 & \quad P_{20} = \frac{x^2}{2!} - \frac{z^2}{2!}, \quad P_{21} = xy, \quad P_{22} = \frac{y^2}{2!} - \frac{z^2}{2!}, \\ n = 3 & \quad P_{30} = \frac{x^3}{3!} - \frac{xz^2}{2!}, \quad P_{31} = y \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{z^2}{2!} \right), \quad P_{32} = x \left(\frac{y^2}{2!} - \frac{z^2}{2!} \right), \\ & \quad P_{33} = \frac{y^3}{3!} - \frac{z^2 y}{2!}. \end{aligned}$$

Stoją one przy następujących potęgach parametrów p i q :

$$\begin{array}{cccc} p^0 q^0 & & & \\ pq^0 & p^0 q & & \\ p^2 q^0 & pq & p^0 q^2 & \\ p^3 q^0 & p^2 q & pq^2 & p^0 q^3. \end{array}$$

Funkcje Q_{nk} dla $k = 0, \dots, n+1$

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad Q_{00} = z, \\ n = 1 & \quad Q_{10} = zx, \quad Q_{11} = zy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = 2 \quad Q_{20} &= \frac{zx^2}{2!} - \frac{z^3}{3!}, & Q_{21} &= xyz, & Q_{22} &= \frac{zy^2}{2!} - \frac{z^3}{3!}, \\
n = 3 \quad Q_{30} &= \frac{zx^3}{3!} - \frac{xz^3}{3!}, & Q_{31} &= y \left(\frac{zx^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} \right), & Q_{32} &= x \left(\frac{zy^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} \right), \\
& & & & Q_{33} &= \frac{zy^3}{3!} - \frac{z^3 y}{3!}.
\end{aligned}$$

Stoją one przy następujących potęgach parametrów p i q :

$$\begin{array}{cccc}
sp^0 q^0 & & & \\
spq^0 & sp^0 q & & \\
sp^2 q^0 & spq & sp^0 q^2 & \\
sp^3 q^0 & sp^2 q & spq^2 & sp^0 q^3
\end{array}$$

gdzie $s = \sqrt{p^2 + q^2}$.

Zróżniczkowanie związku (3.15) kolejno względem zmiennej x , względem zmiennej y i względem zmiennej z prowadzi do następujących związków rekurencyjnych dla pochodnych funkcji P_{nk} i Q_{nk} , [CF00]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{nn}(x, y, z)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial Q_{nn}(x, y, z)}{\partial x} &= 0, \quad n = 0, 1, \dots, \\
\frac{\partial P_{nk}(x, y, z)}{\partial x} &= P_{n-1, k}(x, y, z), & \frac{\partial Q_{nk}(x, y, z)}{\partial x} &= Q_{n-1, k}(x, y, z), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\
\frac{\partial P_{n0}}{\partial y} &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, & \frac{\partial P_{nk}}{\partial y} &= P_{n-1, k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\
\frac{\partial Q_{n0}}{\partial y} &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, & \frac{\partial Q_{nk}}{\partial y} &= Q_{n-1, k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\
\frac{\partial P_{nn}}{\partial z} &= Q_{n-2, n-2}, \quad n = 2, 3, \dots, & \frac{\partial P_{n, n-1}}{\partial z} &= -Q_{n-2, n-3}, \quad n = 3, 4, \dots, n, \\
\frac{\partial P_{n0}}{\partial z} &= -Q_{n-2, 0}, \quad n = 2, 3, \dots, & \frac{\partial P_{n1}}{\partial z} &= -Q_{n-2, 1}, \quad n = 3, 4, \dots, n, \\
\frac{\partial P_{nk}}{\partial z} &= -Q_{n-2, k} - Q_{n-2, k-2}, \quad 0 \leq k \leq n-2, & \frac{\partial Q_{nk}}{\partial z} &= P_{nk}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

Wyprowadzone funkcje Trefftza dla trójwymiarowego równania Laplace'a są T-kompletne, [CF00]. Wielomiany harmoniczne P_{nk} i Q_{nk} noszą również nazwę *funkcje kuliste*.

3.2.3. Równanie Laplace'a w układzie (r, z)

Rozważmy równanie Laplace'a we współrzędnych cylindrycznych z osiąwą symetrią:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = 0, \quad (r, z) \in (a, b) \times (0, H). \quad (3.22)$$

W przypadku układu cylindrycznego występują dwie niezależne funkcje generujące, $\Gamma_{L2C_1}(r, z; p)$ i $\Gamma_{L2C_2}(r, z; p)$. Związane jest to ze sposobem uzyskania tych funkcji.

Punktem wyjścia do wyprowadzenia funkcji tworzących we współrzędnych (r, z) jest funkcja $\Gamma_{L3}(x, y, z; p, q)$, zdefiniowana związkami (3.14). Dokonując w niej przejścia od zmiennych (x, y) do zmiennych (r, φ) (tzn. podstawiając $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$) oraz przyjmując nowy parametr $s = i\sqrt{p^2 + q^2}$ otrzymuje się inną postać funkcji Γ_{L3} , mianowicie:

$$\Gamma_{L3}(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z; p, q) = e^{pr \cos \varphi + qr \sin \varphi + iz\sqrt{p^2 + q^2}} = e^{-isr\left(\frac{p}{s} \cos \varphi + \frac{q}{s} \sin \varphi\right) + sz}.$$

Ponieważ prawdziwy jest związek $(p/s)^2 + (q/s)^2 = 1$, więc podstawiając $p/s = \cos \alpha$, $q/s = \sin \alpha$ można przekształcić funkcję generującą do postaci:

$$\Gamma_{L3C}(r, \varphi, z; s, \alpha) = e^{-isr \cos(\varphi - \alpha) + sz}.$$

W zagadnieniach o symetrii środkowej, przy braku zależności rozwiązania równania od kąta φ , eliminuje się zmienną φ całkując funkcję $e^{-isr \cos(\varphi - \alpha) + sz}$ po kącie φ w granicach od α do $2\pi + \alpha$. Otrzymujemy:

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{\alpha}^{2\pi + \alpha} e^{-isr \cos(\varphi - \alpha) + sz} r d\varphi = I_0(-isr) e^{sz} = J_0(sr) e^{sz}.$$

gdzie $J_n(sr)$ oraz $I_n(sr)$ oznaczają zwykłą i zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju rzędu n , [M64]. Przy obliczeniu tej całki wykorzystano związki $I_0(-z) = I_0(z)$ i $I_0(iz) = J_0(z)$. Funkcję:

$$\Gamma_{L2C_1}(r, z; s) = J_0(sr)e^{sz}$$

nazywa się funkcją generującą pierwszego rodzaju dla rozważanego równania. Rozwijając ją w szereg potęgowy ze względu na parametr s otrzymuje się:

$$\Gamma_{L2C_1}(r, z; s) = J_0(sr)e^{sz} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(r, z)s^n. \quad (3.23)$$

Współczynniki rozwinięcia, $h_n(r, z)$, są funkcjami Trefftza pierwszego rodzaju dla rozważanego równania. Dla $n = 0, 1, \dots$ dane są one wzorem, [F99]:

$$h_n(r, z) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 (n-2k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} z^{n-2k}, \quad (3.24)$$

gdzie: $\lfloor x \rfloor = \text{floor}(x)$ oznacza część całkowitą liczby x .

Kilka kolejnych funkcji $h_n(x, y)$ ma postać następującą:

$$h_0(r, z) = 1,$$

$$h_1(r, z) = z,$$

$$h_2(r, z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}r^2,$$

$$h_3(r, z) = \frac{z^3}{3!} - \frac{r^2 z}{4},$$

$$h_4(r, z) = \frac{z^4}{4!} - \frac{1}{4} \frac{r^2 z^2}{2!} + \frac{1}{2!2!} \left(\frac{r}{2}\right)^4.$$

...

Ponieważ funkcja $J_0(sr)e^{sz}$ spełnia równanie (3.22), więc – jak wiadomo z teorii funkcji Bessela, [M64] – również funkcja $Y_0(sr)e^{sz}$ je spełnia, gdzie $Y_n(z)$ oznacza funkcję Bessela drugiego rodzaju rzędu n , [M64]. Funkcję $Y_0(z)$ można przedstawić w postaci:

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{z}{2} \right) J_0(z) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}z\right)^{2n}}{(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

gdzie $\gamma = 0,5772$ oznacza stałą Eulera. Tak więc funkcję $Y_0(sr)e^{sz}$ można zapisać następująco:

$$Y_0(sr) = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{s}{2} + \ln r \right) J_0(sr) e^{sz} - \frac{2}{\pi} e^{sz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2} sr \right)^{2n} a_n}{(n!)^2},$$

przy czym ciąg (a_n) zdefiniowany jest wzorem:

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad \text{dla } n > 0.$$

Chcąc otrzymać drugą funkcję generującą, $\Gamma_{L2C_2}(r, z; s)$, istotnie różną od $\Gamma_{L2C_1}(r, z; s)$, definiuje się ją następująco:

$$\begin{aligned} \Gamma_{L2C_2}(r, z; s) &= \frac{\pi}{2} Y_0(sr) e^{sz} - \frac{\pi}{2} \left(\gamma + \ln \frac{s}{2} \right) J_0(sr) e^{sz} = \\ &= \left(J_0(sr) \ln r - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{(n!)^2} \left(\frac{sr}{2} \right)^{2n} \right) e^{sz}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Rozwinięcie funkcji $\Gamma_{L2C_2}(r, z; s)$ w szereg potęgowy względem parametru s prowadzi do wzoru:

$$\Gamma_{L2C_2}(r, z; s) = \ln r \sum_{n=0}^{\infty} h_n(r, z) s^n - \sum_{n=0}^{\infty} k_n(r, z) s^n,$$

w którym funkcje $h_n(x, y)$ określone są wzorem (3.24), zaś funkcje $k_n(r, z)$ są dla $n = 0, 1, \dots$ dane wzorem:

$$k_n(r, z) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k a_k}{(k!)^2 (n-2k)!} \left(\frac{r}{2} \right)^{2k} z^{n-2k}. \quad (3.26)$$

Funkcje Trefftza drugiego rodzaju dla rozważanego równania, $w_n(r, z)$, można dla $n = 0, 1, \dots$ przedstawić następująco:

$$w_n(r, z) = h_n(r, z) \ln r - k_n(r, z), \quad (3.27)$$

a funkcję $\Gamma_{L2C_2}(r, z; s)$ można zapisać w postaci szeregu:

$$\Gamma_{L2C_2}(r, z; s) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(r, z) s^n. \quad (3.28)$$

Kilka kolejnych funkcji $w_n(x, y)$ ma postać następującą:

$$w_0(r, z) = \ln r,$$

$$w_1(r, z) = z \ln r,$$

$$w_2(r, z) = \left(\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{4} r^2 \right) \ln r - \frac{r^2}{4},$$

$$w_3(r, z) = \left(\frac{z^3}{3!} - \frac{r^2 z}{4} \right) \ln r - \frac{r^2 z}{4},$$

$$w_4(r, z) = \left(\frac{z^4}{4!} - \frac{1}{4} \frac{r^2 z^2}{2!} + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{2} \right)^4 \right) \ln r - \frac{r^2 z^2}{8} + \frac{3r^4}{128},$$

...

Funkcje Trefftza pierwszego i drugiego rodzaju dla równania (3.22) mają następujące własności, [F99]:

$$h_0 = 1, \quad h_1 = z,$$

$$h_n = z \frac{2n-1}{n^2} h_{n-1} - \frac{(r^2 + z^2)}{n^2} h_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

$$w_0 = \ln r, \quad w_1 = z \ln r,$$

$$w_n = z \frac{2n-1}{n^2} w_{n-1} - \frac{(r^2 + z^2)}{n^2} w_{n-2} + \frac{2}{n^2} r \frac{\partial h_n}{\partial r}, \quad n \geq 2,$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial h_n}{\partial z} = h_{n-1}, \quad n > 0,$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_n}{\partial z} = w_{n-1}, \quad n > 0,$$

$$r \frac{\partial h_0}{\partial r} = 0, \quad r \frac{\partial h_n}{\partial r} = n h_n - z h_{n-1}, \quad n > 0,$$

$$r \frac{\partial w_0}{\partial r} = 1, \quad r \frac{\partial w_n}{\partial r} = h_n + n \cdot w_n - z \cdot w_{n-1}, \quad n > 0.$$

Ponadto dla ustalonego (r, z) prawdziwe są granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |h_n(r, z)| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial h_n}{\partial r} \right| = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n(r, z)| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial w_n}{\partial r} \right| = 0.$$

3.3. FUNKCJE TREFFTZA DLA RÓWNIANIA PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

3.3.1. Niestacjonarne jednowymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego

Rozważmy niestacjonarne jednowymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego bez źródeł ciepła, w zmiennych bezwymiarowych, w ograniczonym obszarze jednowymiarowym:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad \Omega \subset R^1. \quad (3.29)$$

Równanie takie rozważane było w pracy [RW56], gdzie wyznaczono dla niego funkcję generującą:

$$\Gamma_{p1}(x, t; p) = e^{px + p^2 t} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) p^n. \quad (3.30)$$

Tutaj $p \in R$ jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Kolejne funkcje Trefftza otrzymuje się następująco:

Wstawiając do (3.30) $p = 0$ otrzymuje się pierwszą T-funkcję, $v_0 = 1$. Różniczkując (3.30) po parametrze p i następnie kładąc $p = 0$, dostajemy $v_1 = x$. Kolejne działania operatorem $\partial/\partial p$ na związek (3.30) i przyjęcie $p = 0$ pozwala efektywnie wyznaczyć dalsze wielomiany v_n .

Kilka kolejnych funkcji $v_n(x, y)$ ma postać następującą:

$$\begin{aligned} v_0(x, t) &= 1, & v_1(x, t) &= x, \\ v_2(x, t) &= \frac{x^2}{2!} + t, & v_3(x, t) &= \frac{x^3}{3!} + xt, \\ v_4(x, t) &= \frac{x^4}{4!} + \frac{1}{2!}x^2t + \frac{1}{2!}t^2, & \dots \end{aligned}$$

Dla dowolnego $n = 0, 1, \dots$ T-funkcje można wyznaczyć, posługując się wzorem, [RW56, H99, CF00]:

$$v_n(x, t) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{x^{n-2k} t^k}{(n-2k)! k!}, \quad (3.31)$$

gdzie $\lfloor x \rfloor = \text{floor}(x)$ oznacza część całkowitą liczby x .

Ze względu na swoją postać T-funkcje dla równania (3.29) noszą nazwę *wielomianów cieplnych*. Jak łatwo sprawdzić, spełniają one równanie (3.29). Układ funkcji $\{v_n(x, t)\}_{n=0}^{\infty}$ jest układem zupełnym, [C02], tak więc jest to układ T-kompletny.

Jak wykazano w pracy [H99], dla $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, gdzie Ω jest obszarem ograniczonym i $T < \infty$, i dla $\delta > 0$, ma miejsce oszacowanie:

$$|v_n(x, t)| \leq \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^{1/2} \left[\frac{2n(t + \delta)}{e} \right]^{n/2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Z tego oszacowania wynika, że dla $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, t) = 0.$$

Dla pochodnych funkcji $v_n(x, t)$ zachodzą następujące zależności:

$$\frac{\partial v_n(x, t)}{\partial x} = v_{n-1}(x, t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\frac{\partial v_0(x, t)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v_n(x, t)}{\partial t} = v_{n-2}(x, t), \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$\frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} = 0.$$

Generowanie funkcji Trefftza dla równania przewodnictwa cieplnego w układzie biegunowym o symetrii środkowej w zmiennych bezwymiarowych, tzn. dla równania:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (r, t) \in (0, R) \times (0, T), \quad (3.32)$$

jest procedurą znacznie bardziej złożoną niż dla równania we współrzędnych kartezjańskich, (3.29). T-funkcje dla tego przypadku zostaną omówione w części 3.3.3.

Funkcje Trefftza dla równania (3.29) można wyznaczyć także przy wykorzystaniu rozwinięcia rozwiązania tego równania w szereg Taylora, [C01].

3.3.2. Niestacjonarne dwuwymiarowe równanie przewodnictwa ciepłego

W przypadku dwuwymiarowym równanie przewodnictwa ciepłego w zmiennych bezwymiarowych w układzie kartezjańskim przyjmuje postać następującą:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2. \quad (3.33)$$

Funkcja generująca T-funkcje ma postać:

$$\begin{aligned} \Gamma_{p_2}(x, y, t; p, q) &= e^{px+qy+(p^2+q^2)t} = e^{px+p^2t} e^{qy+q^2t} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) p^n \sum_{m=0}^{\infty} v_m(y, t) q^m. \end{aligned} \quad (3.34)$$

W podobny sposób jak dla przypadku jednowymiarowego otrzymuje się funkcje Trefftza, które są iloczynami wielomianów ciepłych, otrzymanych dla przypadku jednowymiarowego. m -tą funkcję Trefftza dla zagadnienia dwuwymiarowego definiuje się następująco, [GL10]:

$$V_m(x, y, t) = v_{n-k}(x, t) v_k(y, t) \quad n = 0, 1, \dots; \quad k = 0, \dots, n, \quad (3.35)$$

gdzie $m = \frac{n(n+1)}{2} + k$, a funkcje $v_n(x, t)$ określone są wzorem (3.31). Własności funkcji $V_m(x, y, t)$, $m = 0, 1, \dots$, wynikają bezpośrednio z własności T-funkcji dla przypadku zagadnienia jednowymiarowego.

3.3.3. Równanie przewodnictwa ciepłego w układzie (r, t)

Przejdźcie do układu biegunowego odbywa się przez podstawienie $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ w równaniu (3.33). Równanie przewodnictwa ciepłego ma w tym układzie postać następującą:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (r, \varphi, t) \in \Omega \times (0, T), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2. \quad (3.36)$$

Przejdzie w funkcji generującej z układu x, y, t do układu r, φ, t pociąga za sobą zmianę postaci funkcji generującej, jak następuje:

$$\Gamma_{p2}(r \cos \varphi, r \sin \varphi, t; p, q) = e^{pr \cos \varphi + qr \sin \varphi + (p^2 + q^2)t} = e^{sr \left(\frac{p}{s} \cos \varphi + \frac{q}{s} \sin \varphi \right) + s^2 t},$$

gdzie $s = \sqrt{p^2 + q^2}$.

Ponieważ prawdziwy jest związek $(p/s)^2 + (q/s)^2 = 1$, więc podstawiając $\frac{p}{s} = \cos \alpha$, $\frac{q}{s} = \sin \alpha$ można przekształcić funkcję generującą do postaci:

$$\Gamma_{p2B}(r, \varphi, t; s, \alpha) = e^{sr \cos(\varphi - \alpha) + s^2 t}.$$

W zagadnieniach o symetrii środkowej, przy braku zależności rozwiązania równania od kąta φ , eliminuje się zmienną φ całkując funkcję $e^{sr \cos(\varphi - \alpha) + s^2 t}$ po kącie φ w granicach od α do $2\pi + \alpha$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Gamma_{p1B}(r, t; s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi + \alpha} \Gamma_0(r, \varphi, t; s, \alpha) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi + \alpha} e^{sr \cos(\varphi - \alpha) + s^2 t} d\varphi = \frac{1}{2\pi} e^{s^2 t} \int_0^{2\pi} e^{sr \cos \theta} d\theta = I_0(sr) e^{s^2 t}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

$I_n(sr)$ oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju rzędu n . W obliczeniach wykorzystano następujące przedstawienie zmodyfikowanej funkcji Bessela, [M64]:

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm z \cos \theta} d\theta.$$

Funkcja $I_0(sr) e^{s^2 t}$, gdzie $s \in R$ jest parametrem, nazywana jest funkcją generującą pierwszego rodzaju we współrzędnych (r, t) , tzn. dla równania (3.32).

Rozwinięcie każdego z czynników występujących w tej funkcji w szereg potęgowy względem potęg parametru s prowadzi do następującej postaci funkcji generującej pierwszego rodzaju dla równania (3.32):

$$\Gamma_{p1B_1}(r, t; s) = I_0(sr) e^{s^2 t} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(r, t) s^{2n}. \quad (3.38)$$

Współczynniki $g_n(r, t)$ rozwinięcia funkcji $\Gamma_{p1B_1}(r, t; s)$ w szereg potęgowy względem potęg parametru s nazywane są funkcjami cieplnymi pierwszego rodzaju dla równania (3.32) i dla $n = 0, 1, \dots$ dane są wzorem:

$$g_n(r, t) = \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n-2k} t^k}{[(n-k)!]^2 k!}. \quad (3.39)$$

Są to wielomiany stopnia $2n$, spełniające równanie (3.32). Trzy pierwsze z nich mają postać następującą:

$$g_0(r, t) = 1,$$

$$g_1(r, t) = \frac{1}{4} r^2 + t,$$

$$g_2(r, t) = \frac{1}{64} r^4 + \frac{1}{4} r^2 t + \frac{1}{2} t^2.$$

Z teorii równań różniczkowych wynika, że w układzie współrzędnych (r, t) istnieje drugie rozwiązanie równania (3.32), a mianowicie $K_0(sr)e^{s^2 t}$, gdzie $K_0(sr)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju rzędu n . Pomiedzy funkcjami $I_0(sr)$ i $K_0(sr)$ zachodzi związek, [M64, F99]:

$$K_0(sr) = -\left(\gamma + \ln \frac{sr}{2}\right) I_0(sr) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} sr\right)^{2n}}{(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right),$$

gdzie $\gamma = 0,5772\dots$ oznacza stałą Eulera. Pozwala on zapisać funkcję $K_0(sr)e^{s^2 t}$ w postaci:

$$K_0(sr)e^{s^2 t} = -\left(\gamma + \ln \frac{s}{2} + \ln r\right) I_0(sr)e^{s^2 t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot \left(\frac{1}{2} sr\right)^{2n}}{(n!)^2} \cdot e^{s^2 t},$$

w której ciąg (a_n) zdefiniowany jest wzorem:

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad \text{dla } n > 0.$$

Wyrażenie $-\left(\gamma + \ln \frac{s}{2}\right) I_0(sr)e^{s^2 t}$ spełnia równanie (3.32), bowiem jest iloczynem dwóch czynników, z których pierwszy nie zależy od r ani od t , natomiast drugi,

$I_0(sr)e^{s^2t}$, spełnia to równanie. Funkcję generującą drugiego rodzaju dla równania (3.32), której współczynniki rozwinięcia w szereg potęgowy są w sposób istotny różne od współczynników otrzymanych wyżej, można zdefiniować następująco:

$$\begin{aligned}\Gamma_{P1B_2}(r, t; s) &= K_0(sr)e^{s^2t} + \left(\gamma + \ln \frac{s}{2}\right) I_0(sr)e^{s^2t} = \\ &= \left(-I_0(sr) \ln r + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \left(\frac{1}{2}sr\right)^{2n}}{(n!)^2}\right) e^{s^2t}.\end{aligned}\quad (3.40)$$

Rozwinięcie każdego z czynników funkcji $\Gamma_{P1B_2}(r, t; s)$ w szereg potęgowy względem potęg parametru s prowadzi do następującej postaci funkcji generującej drugiego rodzaju:

$$\Gamma_{P1B_2}(r, t; s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-g_n(r, t) \ln r + q_n(r, t)) s^{2n}.$$

Funkcje $g_n(r, t)$ określone są wzorem (3.39), zaś funkcje $q_n(r, t)$ mają postać:

$$q_n(r, t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n-2k} t^k}{[(n-k)!]^2 k!}.\quad (3.41)$$

Przyjmując:

$$u_n(r, t) = -g_n(r, t) \ln r + q_n(r, t),\quad (3.42)$$

można funkcję $\Gamma_{P1B_2}(r, t; s)$ zapisać ostatecznie w postaci:

$$\Gamma_{P1B_2}(r, t; s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, t) s^{2n}.\quad (3.43)$$

Współczynniki $u_n(r, t)$, zdefiniowane wzorem (3.42), nazywane są funkcjami cieplnymi drugiego rodzaju we współrzędnych r, t . Są to funkcje spełniające równanie (3.32). Trzy pierwsze z nich mają postać następującą:

$$u_0(r, t) = -\ln r, \quad u_1(r, t) = -\left(\frac{1}{4}r^2 + t\right) \ln r + \frac{1}{4}r^2,$$

$$u_2(r, t) = -\left(\frac{1}{64}r^4 + \frac{1}{4}r^2t + \frac{1}{2}t^2\right) \ln r + \frac{3}{128}r^4 + \frac{1}{4}r^2t.$$

Funkcje cieplne $g_n(r, t)$ i $u_n(r, t)$, wynikające z funkcji generujących $\Gamma_{P1B_1}(r, t; s)$ i $\Gamma_{P1B_2}(r, t; s)$, tworzą układ funkcji liniowo niezależnych. Jest to układ T-funkcji dla dwuwymiarowego równania przewodnictwa cieplnego we współrzędnych biegunowych przy symetrii względem środka. W pracy [F99] zaprezentowano także inny sposób uzyskania funkcji generujących, w oparciu o metodę rozdzielania zmiennych.

Funkcje $g_n(r, t)$ i $u_n(r, t)$ spełniają dla $n = 2, 3, \dots$ związki rekurencyjne, [F99]:

$$g_n = \frac{4t(2n-1) + r^2}{4n^2} g_{n-1} - \frac{t^2}{n^2} g_{n-2},$$

$$u_n = \frac{4t(2n-1) + r^2}{4n^2} u_{n-1} - \frac{t^2}{n^2} u_{n-2} + \frac{1}{2n^2} r \frac{\partial g_n}{\partial r},$$

gdzie:

$$g_0 = 1, \quad g_1 = \frac{1}{4} r^2 + t, \quad u_0 = -\ln r, \quad u_1 = -\left(\frac{1}{4} r^2 + t\right) \ln r.$$

Dla $n = 2, 3, \dots$ prawdziwe są związki, [F99]:

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g_n}{\partial t} = g_{n-1},$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} = u_{n-1},$$

$$r \frac{\partial g_0}{\partial r} = 0, \quad r \frac{\partial g_n}{\partial r} = 2n g_n - 2t g_{n-1},$$

$$r \frac{\partial u_0}{\partial r} = -1, \quad r \frac{\partial u_n}{\partial r} = -g_n + 2n u_n - 2t u_{n-1}.$$

Ponadto dla ustalonego $(r, t) \in (0, R) \times (0, T)$, gdzie $R < \infty$ otrzymuje się, [F99]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(r, t) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial g_n}{\partial r} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial g_n}{\partial t} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r, t) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial r} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = 0.$$

3.3.4. Równanie przewodnictwa cieplnego w układzie (r, φ, t)

Rozważmy ponownie równanie (3.36). Przy pozostawieniu zależności rozwiązania od zmiennej kątowej, rozwiązanie tego równania można zapisać w postaci:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_n(r, t) \sin n\varphi + w_n(r, t) \cos n\varphi). \quad (3.44)$$

Po podstawieniu tej postaci do równania (3.36) otrzymuje się związek

$$\sum_{n=0}^{\infty} L v_n \sin n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} L w_n \cos n\varphi = 0, \quad (3.45)$$

gdzie:

$$LV = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} V - \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad V = v_n \text{ lub } V = w_n. \quad (3.46)$$

Postać ogólną rozwiązania równania (3.46) można uzyskać metodą rozdzielania zmiennych, przyjmując rozwiązanie w postaci $V(r, t) = R(r)\Theta(t)$, co po podstawieniu do powyższego równania i rozdzieleniu zmiennych daje:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} - \frac{n^2}{r^2} = \frac{\Theta'}{\Theta} = p^2 \quad (3.47)$$

lub

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \left(p^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0, \quad \Theta' - p^2 \Theta = 0.$$

Rozwiązanie powyższych równań różniczkowych zwyczajnych w postaci ogólnej jest następujące:

$$R(r) = A_1 I_n(pr) + B_1 K_n(pr), \quad \Theta(t) = C_1 e^{p^2 t}.$$

Stąd dla równania (3.46) otrzymuje się następujące funkcje generujące:

$$\Gamma_{P2Bn_1}(r, t, p) = \frac{I_n(pr)}{p^n} e^{p^2 t} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{nk}(r, t) p^k,$$

$$\Gamma_{P2Bn_2}(r, t, p) = p^n K_n^*(pr) e^{p^2 t} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{nk}(r, t) p^k,$$

gdzie:

$$p^n K_n^*(pr) = (-1)^n \ln(r) I_n(pr) - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r} \right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} (-1)^k \left(\frac{pr}{2} \right)^{2k} - \\ + \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{r}{2} \right)^n p^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pr)^{2k} a_k(n)}{2^{2k} k! (n+k)!}.$$

Tutaj $I_n(z)$ oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju, rzędu n , [M64]. Można ją przedstawić w postaci szeregu potęgowego w następujący sposób:

$$I_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+n}}{2^{2k+n} k! (n+k)!}.$$

Trzy pierwsze funkcje Trefftza pierwszego rodzaju dla równania (3.46) można wyprowadzić ze związku określającego Γ_{P2Bn_1} . Mają one postać następującą:

$$P_{n0}(r, t) = \left(\frac{r}{2} \right)^n, \quad P_{n1}(r, t) = \left(\frac{r}{2} \right)^n \left(\frac{r^2}{4(n+1)!} + \frac{t}{n!} \right), \\ P_{n2}(r, t) = \left(\frac{r}{2} \right)^n \left(\frac{r^4}{2^4 2! (n+2)!} + \frac{r^2 t}{4(n+1)!} + \frac{t^2}{2! n!} \right). \quad (3.48)$$

Dla $n=0$ równanie (3.46) przyjmuje postać $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}$, czyli równania, dla którego funkcje generujące i funkcje Trefftza wyznaczono w części 3.3.3. Funkcje (3.48) dla $n=0$ przyjmują postacie funkcji $g_0(r, t)$, $g_1(r, t)$ i $g_2(r, t)$, opisanych wzorem (3.39).

Wyprowadzenie postaci ogólnej (dla dowolnego $n=0,1,\dots$) funkcji Trefftza pierwszego i drugiego rodzaju dla równania (3.46) jest procesem dość złożonym, jakkolwiek prowadzącym do układu wielomianów. Wydaje się, że konieczne jest posłużenie się komputerem i wykonanie na nim obliczeń symbolicznych dla konkretnych wartości indeksu n , szczególnie dla funkcji drugiego rodzaju.

Warto dodać, że T-funkcje dla równania (3.36) zostały przedstawione także w monografii [Q00], jednakże w znacznie bardziej złożonej postaci, a mianowicie jako iloczyny funkcji Bessela (zwykłych i zmodyfikowanych), i funkcji trygonometrycznych.

3.3.5. Równanie przewodnictwa cieplnego w układzie (r, z, t)

Równanie przewodnictwa cieplnego w układzie cylindrycznym z osiąwą symetrią ma postać:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (r, z) \in (a, b) \times (0, H), \quad t \in (0, T). \quad (3.49)$$

Funkcje generujące dla tego równania, $\Gamma_{P_{2C_1}}(r, z, t; s, p)$ i $\Gamma_{P_{2C_2}}(r, z, t; s, p)$ uzyskuje się, wykorzystując funkcje generujące we współrzędnych biegunowych, $\Gamma_{P_{1B_1}}$ i $\Gamma_{P_{1B_2}}$, dane wzorami (3.38) i (3.43), oraz funkcję Γ_{P_1} , określoną wzorem (3.30):

$$\begin{aligned} \Gamma_{P_{2C_1}}(r, z, t; s, p) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(r, t) s^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(z, t) p^k, \\ \Gamma_{P_{2C_2}}(r, z, t; s, p) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, t) s^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(z, t) p^k, \end{aligned} \quad (3.50)$$

gdzie funkcje $v_k(x, t)$, $g_n(r, t)$ i $u_n(r, t)$ zdefiniowane są wzorami (3.31), (3.39) i (3.42). Funkcje Treffiza dla równania (3.49) mają postać, [F99]:

$$\begin{aligned} V_{1m}(r, z, t) &= g_{n-k}(r, t) v_k(z, t) \quad n = 0, 1, \dots; \quad k = 0, \dots, n, \\ V_{2m}(r, z, t) &= u_{n-k}(r, t) v_k(z, t) \quad n = 0, 1, \dots; \quad k = 0, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.51)$$

gdzie $m = \frac{n(n+1)}{2} + k$.

Własności funkcji $V_{1m}(r, z, t)$ i $V_{2m}(r, z, t)$, $m = 0, 1, \dots$, wynikają bezpośrednio z własności T-funkcji dla niestacjonarnych równań jednowymiarowych we współrzędnych biegunowych i we współrzędnych kartezjańskich.

Układ funkcji $\{V_{1m}(r, z, t), V_{2m}(r, z, t)\}$ stanowi układ T-kompletny dla równania przewodnictwa cieplnego w układzie cylindrycznym z osiową symetrią.

3.3.6. Niestacjonarne trójwymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego

W przypadku trójwymiarowym równanie przewodnictwa cieplnego w zmiennych bezwymiarowych w układzie kartezjańskim przyjmuje postać następującą:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad \Omega \subset R^3.$$

Funkcja generująca T-funkcje ma postać:

$$\Gamma_{P_3}(x, y, z, t; p, q, r) = e^{px+qy+rz+(p^2+q^2+r^2)t} = e^{px+p^2t} e^{qy+q^2t} e^{rz+r^2t}.$$

W podobny sposób jak dla przypadku jednowymiarowego otrzymuje się funkcje Trefftza, które są iloczynami wielomianów cieplnych, otrzymanych dla przypadku jednowymiarowego. m -tą funkcję Trefftza dla zagadnienia trójwymiarowego definiuje się następująco, [GL10]:

$$V_{nkl}(x, y, z, t) = v_{n-k-l}(x, t) v_{k-l}(y, t) v_l(z, t),$$

$$n = 0, 1, \dots; \quad k = 0, \dots, n; \quad l = 0, \dots, k,$$

gdzie funkcje $v_n(x, t)$ określone są wzorem (3.31). Własności funkcji $V_{nkl}(x, y, t)$ wynikają bezpośrednio z własności T-funkcji dla przypadku zagadnienia jednowymiarowego.

3.3.7. Równanie przewodnictwa cieplnego dla pręta z boczną wymianą ciepła (w żebrze)

Równanie przewodzenia ciepła dla jednorodnego pręta z boczną wymianą ciepła (w żebrze) bez źródeł ma następującą postać:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \chi u = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.52)$$

Tu u opisuje temperaturę, $\chi = \frac{\lambda A}{h\rho}$, λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła,

A – powierzchnią przekroju poprzecznego pręta, h – współczynnikiem przewodnictwa zewnętrznego, ρ – gęstością, [TS63].

Funkcja generująca ma postać, [G03]:

$$W(x, t, \chi, p) = e^{px + t(p^2 - \chi)} = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t, \chi) p^k. \quad (3.53)$$

W podobny sposób jak dla przypadku jednowymiarowego otrzymuje się funkcje Trefftza, które są iloczynami wielomianów cieplnych, otrzymanych dla przypadku jednowymiarowego oraz czynnika $e^{-\chi t}$. Kilka kolejnych funkcji $v_n(x, y)$ ma postać następującą:

$$v_0(x, t) = e^{-\chi t},$$

$$v_1(x, t) = x e^{-\chi t},$$

$$v_2(x, t) = \left(\frac{x^2}{2!} + t \right) e^{-xt},$$

$$v_3(x, t) = \left(\frac{x^3}{3!} + xt \right) e^{-xt},$$

$$v_4(x, t) = \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{1}{2!} x^2 t + \frac{1}{2!} t^2 \right) e^{-xt}.$$

Wszystkie własności T-funkcji dla równania przewodnictwa cieplnego w żębrze wynikają z własności T-funkcji, opisanych w części 3.3.1.

3.4. FUNKCJE TREFFTZA DLA RÓWNIANIA FALOWEGO

3.4.1. Dwuwymiarowe równanie falowe

Rozważmy dwuwymiarowe równanie falowe we współrzędnych bezwymiarowych w obszarze ograniczonym $\Omega \subset R^2$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, T). \quad (3.54)$$

Funkcja generująca dla tego równania ma postać:

$$\Gamma_{F2}(x, y, t; p, q) = e^{i(px+qy+st)}, \quad (3.55)$$

gdzie $p, q \in R$ są dowolnymi parametrami rzeczywistymi oraz $s = \sqrt{p^2 + q^2}$. Rozwijając funkcję $\Gamma_{F2}(x, y, t; p, q)$ w szereg potęgowy względem zmiennych p, q i s otrzymujemy, [M09]:

$$\Gamma_{F2}(x, y, t; p, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{l=0 \\ l < 2}}^{n-k} R_{(n-k-l)kl}(x, y, t) p^{n-k-l} q^k s^l. \quad (3.56)$$

Części rzeczywiste i urojone wielomianów $R_{(n-k-l)kl}(x, y, t)$,

$$P_{(n-k-l)kl}(x, y, t) = \operatorname{Re} R_{(n-k-l)kl}(x, y, t),$$

$$Q_{(n-k-l)kl}(x, y, t) = \operatorname{Im} R_{(n-k-l)kl}(x, y, t),$$

spełniają równanie (3.54), są zatem funkcjami Trefftza. Są to wielomiany, nazywane wielomianami falowymi. Kilka pierwszych funkcji $P_{(n-k-l)kl}(x, y, t)$ i $Q_{(n-k-l)kl}(x, y, t)$ dla $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$ i $l = 0, 1$ ma postać następującą:

$$\begin{aligned}
 P_{000}(x, y, t) &= 1, & Q_{000}(x, y, t) &= 0, \\
 P_{100}(x, y, t) &= P_{010}(x, y, t) = P_{001}(x, y, t) = 0, \\
 Q_{100}(x, y, t) &= x, & Q_{010}(x, y, t) &= y, \\
 Q_{001}(x, y, t) &= t, \\
 Q_{200}(x, y, t) &= Q_{110}(x, y, t) = Q_{101}(x, y, t) = Q_{011}(x, y, t) = Q_{020}(x, y, t) = 0, \\
 P_{200}(x, y, t) &= -\frac{x^2}{2} - \frac{t^2}{2}, & P_{110}(x, y, t) &= -xy, \\
 P_{101}(x, y, t) &= -xt, & P_{011}(x, y, t) &= -yt, \\
 P_{020}(x, y, t) &= -\frac{y^2}{2} - \frac{t^2}{2}, \\
 P_{300}(x, y, t) &= P_{210}(x, y, t) = P_{201}(x, y, t) = P_{021}(x, y, t) = \\
 &= P_{120}(x, y, t) = P_{111}(x, y, t) = P_{030}(x, y, t) = 0, \\
 Q_{300}(x, y, t) &= -\frac{x^3}{3!} - \frac{xt^2}{2!}, & Q_{210}(x, y, t) &= -\frac{x^2y}{2!} - \frac{yt^2}{2!}, \\
 Q_{201}(x, y, t) &= -\frac{x^2t}{2!} - \frac{t^3}{3!}, & Q_{021}(x, y, t) &= -\frac{y^2t}{2!} + \frac{t^3}{3!}, \\
 Q_{120}(x, y, t) &= -\frac{xy^2}{2!} - \frac{xt^2}{2!}, & Q_{111}(x, y, t) &= xyt, \\
 Q_{030}(x, y, t) &= -\frac{y^3}{3!} - \frac{yt^2}{2!}, & \dots
 \end{aligned}$$

Wielomiany falowe $P_{(n-k-l)kl}(x, y, t)$ i $Q_{(n-k-l)kl}(x, y, t)$ dla $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$ i $l = 0, 1$ oraz dla $P_{000}(x, y, t) = 1$, $Q_{000}(x, y, t) = 0$, spełniają następujące wzory rekurencyjne, [M09]:

$$\begin{aligned}
P_{(n-k)k0} &= -\frac{1}{n}(xQ_{(n-k-1)k0} + yQ_{(n-k)(k-1)0} + tQ_{(n-k-2)k1} + tQ_{(n-k)(k-2)1}), \\
P_{(n-k-1)k1} &= -\frac{1}{n}(xQ_{(n-k-2)k1} + yQ_{(n-k-1)(k-1)1} + tQ_{(n-k-1)k0}), \\
Q_{(n-k)k0} &= \frac{1}{n}(xP_{(n-k-1)k0} + yP_{(n-k)(k-1)0} + tP_{(n-k-2)k1} + tP_{(n-k)(k-2)1}), \\
Q_{(n-k-1)k1} &= \frac{1}{n}(xP_{(n-k-2)k1} + yP_{(n-k-1)(k-1)1} + tP_{(n-k-1)k0}).
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Ponadto dla pochodnych cząstkowych spełnione są następujące związki, [M09]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{(n-k-l)kl}}{\partial x} &= -Q_{(n-k-l-1)kl} & \frac{\partial Q_{(n-k-l)kl}}{\partial x} &= P_{(n-k-l-1)kl} \\
\frac{\partial P_{(n-k-l)kl}}{\partial y} &= -Q_{(n-k-l)(k-1)l} & \frac{\partial Q_{(n-k-l)kl}}{\partial y} &= P_{(n-k-l)(k-1)l} \\
\frac{\partial P_{(n-k)k0}}{\partial t} &= -Q_{(n-k-2)k1} - Q_{(n-k)(k-2)1} & \frac{\partial P_{(n-k-1)k1}}{\partial t} &= -Q_{(n-k-1)k0} \\
\frac{\partial Q_{(n-k)k0}}{\partial t} &= P_{(n-k-2)k1} + P_{(n-k)(k-2)1} & \frac{\partial Q_{(n-k-1)k1}}{\partial t} &= P_{(n-k-1)k0}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Oczywiście, w przypadku gdy któryś z indeksów jest ujemny, wówczas wartość wielomianu opisanego takim indeksem jest równa zero.

Ze wzorów (3.57) – wobec $P_{000}(x, y, t) = 1$ i $Q_{000}(x, y, t) = 0$ – wynika, że wielomiany $P_{(n-k-l)kl}(x, y, t)$ są równe zero dla nieparzystej sumy wskaźników, zaś wielomiany $Q_{(n-k-l)kl}(x, y, t)$ znikają dla sumy indeksów parzystej, przy czym – jak wspomniano wcześniej – trzeci ze wskaźników, l , może przyjmować tylko wartości 0 lub 1.

Wielomiany falowe można także uzyskać, rozwijając rozwiązanie równania falowego (3.54) w szereg Taylora i eliminując pochodne względem jednej ze zmiennych przy wykorzystaniu tego równania. Zakładając, że funkcja u jest co najmniej klasy C^{N+1} , gdzie N jest rzędem najwyższej pochodnej w rozwinięciu w szereg Taylora tej funkcji wokół punktu (x_0, y_0, t_0) , oznaczając $\hat{x} = x - x_0$, $\hat{y} = y - y_0$, $\hat{t} = t - t_0$ i ograniczając się – dla łatwiejszego zilustrowania metody – do $N = 3$

otrzymamy dla $\frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{(n)} u$, $n = 1, 2, \dots$, następującą postać tego szeregu, [CF00, M09a]:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= u(x_0, y_0, t_0) + \frac{\partial u}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial u}{\partial t} \hat{t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\hat{x}^2}{2!} + \\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\hat{y}^2}{2!} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\hat{t}^2}{2!} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \hat{x} \hat{y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \hat{x} \hat{t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \hat{y} \hat{t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\hat{x}^3}{3!} + \\
&+ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \frac{\hat{y}^3}{3!} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\hat{t}^3}{3!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \frac{\hat{x}^2 \hat{y}}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{\hat{x}^2 \hat{t}}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \frac{\hat{x} \hat{y}^2}{2!} + \\
&+ \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} \frac{\hat{y}^2 \hat{t}}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \frac{\hat{x} \hat{t}^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial t^2} \frac{\hat{y} \hat{t}^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial t} \hat{x} \hat{y} \hat{t} + R_4 = \\
&= u(x_0, y_0, t_0) + \frac{\partial u}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial u}{\partial t} \hat{t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\hat{x}^2}{2!} + \frac{\hat{y}^2}{2!} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\hat{y}^2}{2!} + \frac{\hat{t}^2}{2!} \right) + \\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \hat{x} \hat{y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \hat{x} \hat{t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \hat{y} \hat{t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \left(\frac{\hat{x}^3}{3!} + \frac{\hat{x} \hat{t}^2}{2!} \right) + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \left(\frac{\hat{y}^3}{3!} + \frac{\hat{y} \hat{t}^2}{2!} \right) + \\
&+ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \left(\frac{\hat{x}^2 \hat{t}}{2!} + \frac{\hat{t}^3}{3!} \right) + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} \left(\frac{\hat{y}^2 \hat{t}}{2!} + \frac{\hat{t}^3}{3!} \right) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{\hat{x}^2 \hat{y}}{2!} + \frac{\hat{y} \hat{t}^2}{2!} \right) + \\
&+ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{\hat{x} \hat{y}^2}{2!} + \frac{\hat{x} \hat{t}^2}{2!} \right) + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial t} \hat{x} \hat{y} \hat{t} + R_4 .
\end{aligned}$$

Wartości wszystkich pochodnych są oczywiście w punkcie (x_0, y_0, t_0) . Przyjmując dla prostoty zapisu $(x_0, y_0, t_0) = (0, 0, 0)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= u(0, 0, 0) P_{000} + \frac{\partial u}{\partial x} Q_{100} + \frac{\partial u}{\partial y} Q_{010} + \frac{\partial u}{\partial t} Q_{001} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_{200} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} P_{020} + \\
&- \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} P_{110} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} P_{101} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} P_{011} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} Q_{300} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} Q_{030} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} Q_{201} + \\
&- \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} Q_{021} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} Q_{210} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} Q_{120} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial t} Q_{111} + R_4 .
\end{aligned}$$

Widoczne jest, że współczynniki przy poszczególnych pochodnych w rozwinięciu funkcji u w szereg Taylora to – z dokładnością do znaku – funkcje falowe.

Ten sposób otrzymywania funkcji Trefftza jest uciążliwy dla wielomianów (i różniczek) wyższych rzędów. Niemniej jednak jest on istotny z punktu widzenia osza-

cowania błędu rozwiązania przybliżonego, gdy poszukuje się go w postaci kombinacji liniowej funkcji Trefftza. Eliminując bowiem pochodne zgodnie z równaniem falowym, pozostajemy w obrębie różniczkii tego samego rzędu, tzn. wielomian falowy stopnia n składa się z jednomianów pochodzących od pochodnych rzędu n . Co więcej, wszystkie współczynniki przy pochodnych rzędu n stają się składnikami jakiegoś wielomianu falowego takiego stopnia.

Ze wzorów rekurencyjnych (3.57) wynika, że wraz ze wzrostem wskaźnika n kolejne funkcje są mnożone przez jego odwrotność. Oznacza to, że wartość funkcji o wysokim numerze, wynikająca z wykonywanych na zmiennych x, y, t operacji potęgowania, jest dzielona przez dużą liczbę, a mianowicie przez $n!$. Wobec przyjętego na wstępie założenia o ograniczoności obszaru $\Omega \subset R^2$ wynika z tego, że w granicy przy $n \rightarrow \infty$ wartości wielomianów falowych będą dążyły do zera.

Przyjmując dodatkowo założenie, że wszystkie pochodne funkcji są wspólnie ograniczone (co jest uzasadnione z fizycznego punktu widzenia), można oszacować błąd przybliżenia reszty we wzorze Taylora jak dążący do zera wraz z $n \rightarrow \infty$.

Oznacza to, że przedstawiony wyżej układ funkcji Trefftza (wielomianów falowych) jest układem T-kompletnym.

Warto zauważyć, że funkcje generujące dla dwuwymiarowego równania falowego i dla trójwymiarowego równania Laplace'a wykazują istotne podobieństwo:

$$\Gamma_{F_2}(x, y, t; p, q) = e^{i(px+qy+t\sqrt{p^2+q^2})}, \quad \Gamma_{L_3}(x, y, z; p, q) = e^{px+qy+iz\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Zamiana zmiennych $p \rightarrow ip, q \rightarrow iq, z \rightarrow -it$ przekształca funkcję Γ_{L_3} w Γ_{F_2} , [CJ03]. Wynika z tego, że wielomiany falowe zmiennych (x, y, t) można uzyskać z wielomianów harmonicznnych zmiennych (x, y, z) przez podstawienie $z = \pm it$. Przy takim podejściu trzeba jednak nieco inaczej niż w tej części zdefiniować wielomiany falowe, gdyż zdefiniowane wyżej wielomiany falowe są przedstawione jako funkcje o trzech wskaźnikach, podczas gdy podstawienie $z = \pm it$ pozwala uzyskać bezpośrednio dwuwskaźnikowy opis wielomianów falowych. Może jedynie wystąpić zmiana znaku przy niektórych uzyskanych w ten sposób funkcjach falowych w stosunku do przedstawionych w tej części.

3.4.2. Trójwymiarowe równanie falowe

Rozważmy teraz trójwymiarowe równanie falowe we współrzędnych bezwymiarowych w obszarze ograniczonym $\Omega \subset R^3$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T). \quad (3.59)$$

Funkcja generująca dla tego równania ma postać:

$$\Gamma_{F_3}(x, y, z, t; p, q, r) = e^{i(px+qy+rz+st)}, \quad (3.60)$$

gdzie $p, q, r \in R$ są dowolnymi parametrami rzeczywistymi oraz $s = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$. Rozwijając funkcję $\Gamma_{F_3}(x, y, z, t; p, q, r)$ w szereg potęgowy względem zmiennych p, q, r i s otrzymuje się, [M09]:

$$\Gamma_{F_3}(x, y, z, t; p, q, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \sum_{\substack{m=0 \\ m < 2}}^{n-k-l} R_{(n-k-l-m)klm}(x, y, z, t) p^{n-k-l-m} q^k r^l s^m. \quad (3.61)$$

Części rzeczywiste i urojone wielomianów $R_{(n-k-l-m)klm}(x, y, z, t)$,

$$P_{(n-k-l-m)klm}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} R_{(n-k-l-m)klm}(x, y, z, t),$$

$$Q_{(n-k-l-m)klm}(x, y, z, t) = \operatorname{Im} R_{(n-k-l-m)klm}(x, y, z, t),$$

spełniają równanie (3.59), są zatem funkcjami Trefftza. Są to wielomiany, nazywane wielomianami falowymi. Kilka pierwszych funkcji $P_{(n-k-l-m)klm}(x, y, z, t)$ i $Q_{(n-k-l-m)klm}(x, y, z, t)$ dla $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$ i $l = 0, 1, \dots$ i $m = 0, 1$ ma postać następującą:

$$P_{0000} = 1, \quad Q_{0000} = 0,$$

$$Q_{1000} = x, \quad Q_{0100} = y, \quad Q_{0010} = z, \quad Q_{0001} = t,$$

$$P_{2000} = -\frac{x^2}{2} - \frac{t^2}{2}, \quad P_{1100} = -xy, \quad P_{1010} = -xz, \quad P_{1001} = -xt,$$

$$P_{0200} = -\frac{y^2}{2} - \frac{t^2}{2}, \quad P_{0110} = -yz, \quad P_{0101} = -yt,$$

$$P_{2000} = -\frac{z^2}{2} - \frac{t^2}{2}, \quad P_{0011} = -zt,$$

...

Wielomiany falowe $P_{(n-k-l-m)klm}(x, y, z, t)$ i $Q_{(n-k-l-m)klm}(x, y, z, t)$ dla $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$, $l = 0, 1, \dots, n$ i $m = 0, 1$ oraz dla $P_{0000} = 1$, $Q_{0000} = 0$, spełniają następujące wzory rekurencyjne, [M09]:

$$\begin{aligned}
P_{(n-k-l)kl0} &= -\frac{1}{n}(xQ_{(n-k-l-1)kl0} + yQ_{(n-k-l)(k-1)l0} + zQ_{(n-k-l)k(l-1)0} + \\
&\quad + tQ_{(n-k-l-2)kl1} + tQ_{(n-k-l)(k-2)l1} + tQ_{(n-k-l)k(l-2)1}) , \\
P_{(n-k-l-1)kl1} &= -\frac{1}{n}(xQ_{(n-k-l-2)kl1} + yQ_{(n-k-l-1)(k-1)l1} + \\
&\quad + yQ_{(n-k-l-1)k(l-1)1} + tQ_{(n-k-l-1)kl0}) , \\
Q_{(n-k-l)kl0} &= \frac{1}{n}(xP_{(n-k-l-1)kl0} + yP_{(n-k-l)(k-1)l0} + zP_{(n-k-l)k(l-1)0} + \\
&\quad + tP_{(n-k-l-2)kl1} + tP_{(n-k-l)(k-2)l1} + tP_{(n-k-l)k(l-2)1}) , \\
Q_{(n-k-l-1)kl1} &= \frac{1}{n}(xP_{(n-k-l-2)kl1} + yP_{(n-k-l-1)(k-1)l1} + \\
&\quad + yP_{(n-k-l-1)k(l-1)1} + tP_{(n-k-l-1)kl0}) .
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Ponadto dla pochodnych cząstkowych spełnione są następujące związki, [M09]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{(n-k-l-m)klm}}{\partial x} &= -Q_{(n-k-l-m-1)klm} , & \frac{\partial Q_{(n-k-l-m)klm}}{\partial x} &= P_{(n-k-l-m-1)klm} , \\
\frac{\partial P_{(n-k-l-m)klm}}{\partial y} &= -Q_{(n-k-l-m)(k-1)lm} , & \frac{\partial Q_{(n-k-l-m)klm}}{\partial y} &= P_{(n-k-l-m)(k-1)lm} , \\
\frac{\partial P_{(n-k-l-m)klm}}{\partial z} &= -Q_{(n-k-l-m)k(l-1)m} , & \frac{\partial Q_{(n-k-l-m)klm}}{\partial z} &= P_{(n-k-l-m)k(l-1)m} , \\
\frac{\partial P_{(n-k-l)kl0}}{\partial t} &= -Q_{(n-k-l-2)kl1} - Q_{(n-k-l)(k-2)l1} - Q_{(n-k-l)k(l-2)1} , \\
\frac{\partial P_{(n-k-l-1)kl1}}{\partial t} &= -Q_{(n-k-l-1)kl0} , \\
\frac{\partial Q_{(n-k-l)kl0}}{\partial t} &= P_{(n-k-l-2)kl1} + P_{(n-k-l)(k-2)l1} + P_{(n-k-l)k(l-2)1} , \\
\frac{\partial Q_{(n-k-l-1)kl1}}{\partial t} &= P_{(n-k-l)kl0} .
\end{aligned} \tag{3.63}$$

W przypadku gdy któryś z indeksów we wzorach (3.62) i (3.63) jest ujemny, wówczas wartość wielomianu opisanego takim indeksem jest równa zero.

Podobnie jak przy wzorach (3.57), ze wzorów (3.62) wynika – wobec $P_{0000} = 1$ i $Q_{0000} = 0$ – że wielomiany $P_{(n-k-l-m)klm}$ są równe zero dla nieparzystej sumy wskaźników, zaś wielomiany $Q_{(n-k-l-m)klm}$ znikają dla parzystej sumy indeksów, przy czym – jak wspomniano wcześniej, czwarty ze wskaźników, m , może przyjmować tylko wartości 0 lub 1.

Podobnie jak w przypadku dwuwymiarowym wielomiany falowe można także uzyskać, rozwijając rozwiązanie równania falowego (3.59) w szereg Taylora i eliminując pochodne względem jednej ze zmiennych przy wykorzystaniu tego równania. Procedura jest tu analogiczna do przedstawionej w części 3.4.1. Pozostają w mocy także wszystkie uwagi, wynikające w części 3.4.1 z rozważań dotyczących tego rozwinięcia.

Ze wzorów rekurencyjnych (3.62) wynika, że wraz ze wzrostem wskaźnika n kolejne funkcje falowe są mnożone przez jego odwrotność. Oznacza to, że wartość funkcji o wysokim numerze, wynikająca z wykonywanych na zmiennych x, y, z, t operacji potęgowania, jest dzielona przez dużą liczbę, a mianowicie przez $n!$. Wobec przyjętego na wstępie założenia o ograniczoności obszaru $\Omega \subset R^3$ wynika, że w granicy przy $n \rightarrow \infty$ wartości wielomianów falowych będą dążyły do zera.

Przyjmując dodatkowo założenie, że wszystkie pochodne funkcji są wspólnie ograniczone (co jest uzasadnione z fizycznego punktu widzenia), można oszacować błąd przybliżenia reszty we wzorze Taylora jako dążący do zera wraz z $n \rightarrow \infty$.

Oznacza to, że przedstawiony wyżej układ funkcji Trefftza (wielomianów falowych) jest układem T-kompletnym.

3.4.3. Równanie falowe w układzie (r, z, t)

Rozważmy równanie falowe w układzie (r, z, t) we współrzędnych bezwymiarowych w obszarze ograniczonym $\Omega \subset R^3$ w układzie cylindrycznym:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.64)$$

Rozwiązując to równanie metodą rozdzielania zmiennych przewidujemy postać funkcji u jako iloczyn $u(r, z, t) = R(r)Z(z)\Theta(t)$. Po wstawieniu tego przedstawienia do równania (3.64) i rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} = \frac{\Theta''}{\Theta} = -p^2,$$

skąd:

$$\Theta'' + p^2 \Theta = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{Z''}{Z} = -\left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + p^2\right) = q^2,$$

co ostatecznie prowadzi do trzech równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\Theta'' + p^2 \Theta = 0, \quad R'' + \frac{1}{r} R' + (p^2 + q^2)R = 0, \quad Z'' - q^2 Z = 0.$$

Rozwiązując te równania i wykorzystując własności funkcji Bessela otrzymuje się następujące dwie funkcje generujące dla równania (3.64), [CJ03]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1FC}(r, z, t; p, q) &= J_0(rs) e^{qz} e^{ipt}, \\ \Gamma_{2FC}(r, z, t; pq) &= Y_0^*(r, s) e^{qz} e^{ipt}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

gdzie $s = \sqrt{p^2 + q^2}$ oraz

$$Y_0^*(r, s) = J_0(sr) \ln r - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{rs}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} a_k.$$

Ciąg (a_n) zdefiniowany jest tak, jak w części 3.2.3, tzn.:

$$a_0 = 0, \quad a_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \quad \text{dla } n > 0.$$

Tutaj $J_0(rs)$ oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju rzędu zero, [M64].

Posługując się rozumowaniem podobnym do przedstawionego w części 3.2.2, można funkcje generujące przedstawić jako sumę części rzeczywistych i części urojonych:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1FC}(r, z, t, p, q) &= J_0(rs) e^{qz} e^{ipt} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n P_{nk}(r, z, t) p^{n-k} q^k + i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n Q_{nk}(r, z, t) p^{n-k} q^k, \\ \Gamma_{2FC}(r, z, t, pq) &= Y_0^*(r, s) e^{qz} e^{ipt} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n R_{nk}(r, z, t) p^{n-k} q^k + i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n S_{nk}(r, z, t) p^{n-k} q^k. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Z równań (3.66) wynikają następujące wzory na funkcje Trefftza dla równania (3.64), [CJ03]:

$$\begin{aligned}
 P_{nk}(r, z, t) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{(n-k)!k!} \frac{\partial^n \Gamma_{1FC}}{\partial p^{n-k} \partial q^k} \right) \Bigg|_{p=q=0}, \\
 Q_{nk}(r, z, t) &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{(n-k)!k!} \frac{\partial^n \Gamma_{1FC}}{\partial p^{n-k} \partial q^k} \right) \Bigg|_{p=q=0}, \\
 R_{nk}(r, z, t) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{(n-k)!k!} \frac{\partial^n \Gamma_{2FC}}{\partial p^{n-k} \partial q^k} \right) \Bigg|_{p=q=0}, \\
 S_{nk}(r, z, t) &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{(n-k)!k!} \frac{\partial^n \Gamma_{2FC}}{\partial p^{n-k} \partial q^k} \right) \Bigg|_{p=q=0}.
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Przy obliczaniu pochodnych we wzorach (3.67) pomocny jest wzór przedstawiający funkcje $J_0(rs)$ i $Y_0^*(r, s)$ w postaci szeregu potęgowego, [M64]:

$$\begin{aligned}
 J_0(rs) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{rs}{2} \right)^{2k}}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^k r^{2k} p^{2(k-m)} q^{2m^k}}{2^{2k} k! m! (k-m)!}, \\
 Y_0^*(r, s) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{rs}{2} \right)^{2k} (\ln r - a_k)}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^k r^{2k} p^{2(k-m)} q^{2m^k} (\ln r - a_k)}{2^{2k} k! m! (k-m)!}.
 \end{aligned}$$

Pierwszych kilka funkcji Trefftza dla równania (3.64) ma postać następującą (poniżej podane są tylko funkcje różne od zera):

$$\begin{aligned}
 P_{00} &= 1, & Q_{10} &= t, & P_{01} &= z \\
 P_{20} &= -\frac{r^2}{4} - \frac{t^2}{2}, & Q_{21} &= zt, & P_{22} &= \frac{z^2}{2} - \frac{r^2}{4}, \\
 Q_{30} &= -\frac{t^3}{6} - \frac{r^2 t}{4}, & P_{31} &= -\frac{t^2 z}{2} - \frac{z r^2}{4}, & Q_{32} &= \frac{t z^2}{2} - \frac{t r^2}{4} \\
 P_{33} &= \frac{z^3}{6} - \frac{z r^2}{4}, \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \ln r, & S_{10} &= t \ln r, & R_{01} &= z \ln r, \\
P_{20} &= \left(-\frac{r^2}{4} - \frac{t^2}{2} \right) \ln r + \frac{r^2}{4}, & S_{21} &= zt \ln r, \\
R_{22} &= \left(\frac{z^2}{2} - \frac{r^2}{4} \right) \ln r + \frac{r^2}{4}, \\
S_{30} &= \left(-\frac{t^3}{6} - \frac{tr^2}{4} \right) \ln(r) + \frac{tr^2}{4}, & R_{31} &= \left(-\frac{t^2 z}{2} - \frac{zr^2}{4} \right) \ln(r) + \frac{zr^2}{4}, \\
S_{32} &= \left(\frac{tz^2}{2} - \frac{tr^2}{4} \right) \ln(r) + \frac{tr^2}{4}, & S_{33} &= \left(\frac{z^3}{6} - \frac{zr^2}{4} \right) \ln(r) + \frac{zr^2}{4}, \dots
\end{aligned}$$

3.4.4. Równanie falowe w układzie (r, φ, t)

Rozważmy równanie falowe w układzie (r, φ, t) we współrzędnych bezwymiarowych w obszarze ograniczonym $\Omega \subset R^3$ w układzie biegunowym:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.68)$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku, funkcje generujące uzyskuje się rozwiązując to równanie metodą rozdzielania zmiennych. Powtórzone tu zostanie rozumowanie z części 3.3.4.

Ze względu na okresowość rozwiązania względem zmiennej φ całkę ogólną możemy napisać w postaci:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_n(r, t) \sin n\varphi + w_n(r, t) \cos n\varphi), \quad (3.69)$$

co po podstawieniu do równania (3.68) prowadzi do równania:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L v_n \sin n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} L w_n \cos n\varphi = 0,$$

gdzie:

$$LV = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} V - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad V = v_n \quad \text{lub} \quad V = w_n. \quad (3.70)$$

Metoda rozdzielania zmiennych i wykorzystanie własności funkcji Bessela, [M64], prowadzi dla każdego $n = 0, 1, \dots$ do następujących dwóch funkcji generujących, [CJ03]:

$$\begin{aligned}\Gamma_{1FBn}(r, t; p) &= \frac{J_n(pr)}{p^n} e^{ipt} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{1nk}(r, t) p^k + i \sum_{k=0}^{\infty} Q_{1nk}(r, t) p^k, \\ \Gamma_{2FBn}(r, t; p) &= p^n Y_n^*(pr) e^{ipt} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{2nk}(r, t) p^k + i \sum_{k=0}^{\infty} Q_{2nk}(r, t) p^k,\end{aligned}\tag{3.71}$$

gdzie:

$$Y_n^*(pr) = J_n(pr) \ln r - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{pr}{2} \right)^{2k-n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k(n)}{k!(n+k)!} \left(\frac{pr}{2} \right)^{2k+n} \right),$$

oraz

$$a_0(0) = 0,$$

$$a_k(0) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}, \quad k \geq 1,$$

$$a_0(n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1,$$

$$a_k(n) = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+k} \right), \quad k \geq 1, \quad n \geq 1.$$

Po wstawieniu do funkcji generujących $\Gamma_{1FBn}(r, t; p)$ i $\Gamma_{2FBn}(r, t; p)$ funkcji Bessela przedstawionych w postaci szeregu potęgowego, [M64], otrzymuje się ich postać następującą, [CJ03]:

$$\Gamma_{1FBn}(r, t; p) = \left(\frac{r}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{2k} r^{2k}}{2^{2k} k!(n+k)!},\tag{3.72}$$

$$\Gamma_{2FB0}(r, t; p) = \left(\ln r \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \left(\frac{pr}{2} \right)^{2k}}{k!(n+k)!} - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \cdot \left(\frac{pr}{2} \right)^{2k} \sum_{v=1}^k \frac{1}{v}}{k!(n+k)!} \right) e^{ipt} \quad \text{gdy } n = 0,$$

(3.73)

$$\Gamma_{2FBn}(r, t, p) = \left(p^{2n} \left(\frac{r}{2} \right)^n \ln r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k} p^{2k}}{2^{2k} k! (n+k)!} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r} \right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)! p^{2k} r^{2k}}{2^{2k} k!} + \right. \\ \left. - p^{2n} \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2} \right)^n \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k p^{2k} r^{2k} \left(\sum_{v=1}^k \frac{1}{v} + \sum_{v=1}^{n+k} \frac{1}{v} \right)}{2^{2k} k! (n+k)!} \right) e^{ipt}, \quad \text{gdy } n \geq 1. \quad (3.74)$$

Na podstawie wzorów (3.71) wyprowadza się dla $n = 0, 1, \dots$, i $l = 0, 1, \dots$ wzory określające funkcje Trefftza dla równania (3.70). Dla równania (3.68) uzyskuje się je wykorzystując przedstawienie (3.69). Mają one postać następującą:

$$P_{snl}(r, t) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Gamma_{sFBn}}{\partial p^m} \right) \Bigg|_{p=0}, \quad (3.75)$$

$$Q_{snl}(r, t) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Gamma_{sFBn}}{\partial p^m} \right) \Bigg|_{p=0}.$$

Dla $s = 1$ są to T-funkcje pierwszego rodzaju, zaś dla $s = 2$ – drugiego rodzaju.

Pierwszych osiem funkcji Trefftza pierwszego (z pierwszym indeksem równym 1) dla równania (3.70), wyprowadzonych na podstawie wzorów (3.75)₁ i (3.72) ma postać następującą (poniżej podane są tylko funkcje różne od zera), [CJ03]:

$$P_{1n0} = 1, \quad Q_{1n1} = \left(\frac{r}{2} \right)^n t,$$

$$P_{1n2} = \left(\frac{r}{2} \right)^n \left(-\frac{t^2}{2} - \frac{r^2 n!}{4(n+1)!} \right),$$

$$Q_{1n3} = \left(\frac{r}{2} \right)^n \left(-\frac{t^3}{6} - \frac{tr^2 n!}{4(n+1)!} \right),$$

$$P_{1n4} = \left(\frac{r}{2} \right)^n \left(\frac{t^4}{24} + \frac{t^2 r^2 n!}{8(n+1)!} + \frac{r^4 n!}{32(n+2)!} \right),$$

$$Q_{1n5} = \left(\frac{r}{2} \right)^n \left(\frac{t^5}{120} + \frac{t^3 r^2 n!}{24(n+1)!} + \frac{tr^4 n!}{32(n+2)!} \right),$$

$$P_{1n6} = \left(\frac{r}{2}\right)^n \left(-\frac{t^6}{720} - \frac{t^4 r^2 n!}{96(n+1)!} - \frac{t^2 r^4 n!}{64(n+2)!} - \frac{r^6 n!}{384(n+3)!} \right),$$

$$Q_{1n7} = \left(\frac{r}{2}\right)^n \left(-\frac{t^7}{5040} - \frac{t^5 r^2 n!}{480(n+1)!} - \frac{t^3 r^4 n!}{192(n+2)!} - \frac{t r^6 n!}{384(n+3)!} \right).$$

Wyprowadzenie postaci ogólnej (dla dowolnego $n = 0, 1, \dots$) funkcji Trefftza drugiego rodzaju (z pierwszym indeksem równym 2) dla równania (3.70) nie jest takie proste, jak to ma miejsce dla funkcji pierwszego rodzaju. Konieczne jest posłużenie się komputerem i wykonanie na nim obliczeń symbolicznych dla konkretnych wartości indeksu n . Dla $n = 0$ otrzymuje się funkcje Trefftza drugiego rodzaju w postaci następującej:

$$P_{200} = \ln r, \quad Q_{201} = t \ln r,$$

$$P_{202} = \frac{r^2}{4} + \ln(r) \left(-\frac{t^2}{2} - \frac{r^2}{4} \right),$$

$$Q_{203} = \frac{tr^2}{4} + \ln(r) \left(-\frac{t^3}{6} - \frac{tr^2}{4} \right),$$

$$P_{204} = -\frac{t^2 r^2}{8} - \frac{3r^4}{128} + \ln(r) \left(\frac{t^4}{24} + \frac{t^2 r^2}{8} + \frac{r^4}{64} \right),$$

$$Q_{205} = -\frac{t^3 r^2}{24} - \frac{3tr^4}{128} + \ln(r) \left(\frac{t^5}{120} + \frac{t^3 r^2}{24} + \frac{tr^4}{64} \right),$$

$$P_{206} = \frac{t^4 r^2}{96} + \frac{3t^2 r^4}{256} + \frac{11r^6}{13824} + \ln(r) \left(-\frac{t^6}{720} - \frac{t^4 r^2}{96} - \frac{t^2 r^4}{128} - \frac{r^6}{2304} \right).$$

Dla $n = 1$ otrzymuje się funkcje Trefftza drugiego rodzaju w postaci następującej:

$$P_{210} = -\frac{1}{r}, \quad Q_{211} = -\frac{t}{r},$$

$$P_{212} = \frac{t^2}{2r} - \frac{r}{4} + \frac{r \ln r}{2},$$

$$Q_{213} = \frac{t^3}{6r} - \frac{tr}{4} + \frac{tr \ln r}{2},$$

$$P_{214} = -\frac{t^4}{24r} + \frac{t^2r}{8} + \frac{5r^3}{64} + \ln r \left(-\frac{t^2r}{4} + \frac{r^3}{16} \right),$$

$$Q_{215} = -\frac{t^5}{120r} + \frac{t^3r}{24} + \frac{5tr^3}{64} + \ln r \left(-\frac{t^3r}{12} - \frac{tr^3}{16} \right),$$

$$P_{216} = \frac{t^6}{720r} - \frac{t^4r}{96} - \frac{5t^2r^3}{128} - \frac{5r^6}{1152} + \ln(r) \left(\frac{t^4r}{48} + \frac{t^2r^3}{32} - \frac{r^5}{384} \right).$$

Na zakończenie tej części warto zauważyć, że po podstawieniu w (3.68) $t = iz$ równanie to przejdzie w równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (3.76)$$

Przy założeniu, że prawdziwy jest rozkład (3.69) funkcji u i przy dodatkowej zamianie $p \rightarrow ip$, wynikającej ze zmiany znaku przy pochodnej, która w równaniu (3.68) była względem zmiennej t , zaś w równaniu Laplace'a jest względem zmiennej z , otrzymuje się dla równania:

$$LV = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} V + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad V = v_n \quad \text{lub} \quad V = w_n,$$

następujące funkcje generujące, [CJ03]:

$$\Gamma_{1LW}(r, z, p) = \frac{I_n(pr)}{p^n} e^{pz} = \sum_{k=0}^{\infty} p^k P_{nk}(r, z),$$

$$\Gamma_{2LW}(r, z, p) = p^n K_n^*(pr) e^{pz} = \sum_{k=0}^{\infty} p^k Q_{nk}(r, z),$$

gdzie:

$$p^n K_n^*(p, r) = (-1)^n \ln(r) I_n(pr) - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r} \right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} (-1)^k \left(\frac{pr}{2} \right)^{2k} +$$

$$- \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{r}{2} \right)^n p^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pr)^{2k} a_k(n)}{2^{2k} k! (n+k)!},$$

gdzie $I_n(z)$ – zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju, rzędu n , [M64].

Funkcje Trefftza pierwszego i drugiego rodzaju dla równania (3.76) otrzymuje się podobnie jak w rozważaniach przytoczonych wyżej.

Warto wspomnieć, że w monografii [M09] zaproponowano inny układ funkcji Trefftza dla równania (3.68). Aby otrzymać funkcje Trefftza w układzie biegunowym, zaproponowano tam wykorzystanie zależności $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ we wzorach (3.57). Tak wprowadzone funkcje Trefftza dla równania (3.68) oznaczone będą literką B, postawioną przed indeksem. Cztery pierwsze niezerowe funkcje to:

$$\begin{aligned} P_{B000}(r, \varphi, t) &= 1, & Q_{B100}(r, \varphi, t) &= r \cos \varphi, \\ Q_{B010}(r, \varphi, t) &= r \sin \varphi, & Q_{B001}(r, \varphi, t) &= t. \end{aligned}$$

Funkcje przyjmujące w układzie (xyt) wartości zerowe przyjmują także te wartości w układzie $(r\varphi t)$.

Następne T-funkcje można wyprowadzić, korzystając ze wzorów (3.57) i pamiętając, że zamiast zmiennych (x, y) trzeba wstawić do wzorów $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Podobnie we wzorach (3.58) operatory $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$ trzeba zastąpić pochodnymi $\frac{\partial}{\partial r}$ i $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, zgodnie ze wzorami:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Korzystając z tak przekształconych wzorów (3.57) i (3.58) i z wyżej pokazanych postaci funkcji Q_{B100} i Q_{B001} łatwo dowodzi się, że na przykład:

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{2} - \frac{t^2}{2} &= P_{200}(x, y, t) = P_{B200}(r, \varphi, t) = \quad \text{dla } n=2, \quad k=0, \quad l=0 \\ &= \frac{1}{2}(-r \cos \varphi Q_{B100} - r \sin \varphi Q_{B2,-1,0} - t Q_{B001} - t Q_{B2,-1,1}) = \\ &= \frac{1}{2}(-r \cos \varphi \cdot r \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot 0 - t \cdot t - t \cdot 0) = -\frac{r^2 \cos^2 \varphi}{2} - \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_{B200}}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial P_{B200}}{\partial r} - \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial P_{B200}}{\partial \varphi} = \quad \text{dla } n=2, \quad k=0, \quad l=0 \\
 &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{r^2 \cos^2 \varphi}{2} - \frac{t^2}{2} \right) - \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{r^2 \cos^2 \varphi}{2} - \frac{t^2}{2} \right) = \\
 &= \cos \varphi (-r \cos^2 \varphi) - \sin \varphi \frac{1}{r} (-r^2 \sin \varphi \cos \varphi) = \\
 &= -r \cos \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = -r \cos \varphi = -Q_{B100}.
 \end{aligned}$$

Wzory (3.58) można przetransformować do następującej postaci we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_{B(n-k-l)kl}}{\partial r} &= -(\cos \varphi Q_{B(n-k-l-1)kl} + \sin \varphi Q_{B(n-k-l-1)(k-1)l}), \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial P_{B(n-k-l)kl}}{\partial \varphi} &= \sin \varphi Q_{B(n-k-l-1)kl} - \cos \varphi Q_{B(n-k-l-1)(k-1)l}, \\
 \frac{\partial Q_{B(n-k-l)kl}}{\partial r} &= \cos \varphi P_{B(n-k-l-1)kl} + \sin \varphi P_{B(n-k-l-1)(k-1)l}, \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{B(n-k-l)kl}}{\partial \varphi} &= -\sin \varphi P_{B(n-k-l-1)kl} + \cos \varphi P_{B(n-k-l-1)(k-1)l}, \quad (3.77) \\
 \frac{\partial P_{B(n-k)k0}}{\partial t} &= -Q_{B(n-k-2)k1} - Q_{B(n-k)(k-2)l}, \quad \frac{\partial P_{B(n-k-1)k1}}{\partial t} = -Q_{B(n-k-1)k0}, \\
 \frac{\partial Q_{B(n-k)k0}}{\partial t} &= P_{B(n-k-2)k1} + P_{B(n-k)(k-2)l}, \quad \frac{\partial Q_{B(n-k-1)k1}}{\partial t} = P_{B(n-k-1)k0}.
 \end{aligned}$$

3.5. FUNKCJE TREFFTZA DLA RÓWNIANIA HELMHOLTZA

Równanie Helmholtza można otrzymać z równania falowego, jeśli wymuszenia są typu harmonicznego z częstotliwością ω . Po podstawieniu w równaniu (3.54) $u = v \exp(i\omega t)$ otrzymuje się:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \right) u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \Omega \subset R^2. \quad (3.78)$$

Gdy $\omega = i\beta$, równanie (3.78) przyjmuje postać:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right) u = 0, \quad (3.78a)$$

często spotykaną w zagadnieniach przewodnictwa ciepła.

Do wyznaczenia funkcji generujących stosuje się metodę rozdzielania zmiennych. Rozwiązanie ogólne równania (3.78) ma postać:

$$\left(A_1 e^{px} + A_2 e^{-px} \right) \left(B_1 e^{iy\sqrt{p^2 + \omega^2}} + B_2 e^{-iy\sqrt{p^2 + \omega^2}} \right).$$

Z uwagi na to, że w układzie (x, y) równanie (3.78) jest niezmiennicze względem przekształceń $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, otrzymuje się następującą funkcję generującą dla tego równania, [CJ03]:

$$\begin{aligned} \Gamma_H(x, y, \omega, p) &= e^{px + iy\sqrt{p^2 + \omega^2}} = \\ &= e^{px} \cos\left(\sqrt{p^2 + \omega^2} y\right) + i\sqrt{p^2 + \omega^2} \frac{\sin\left(y\sqrt{p^2 + \omega^2}\right)}{\sqrt{p^2 + \omega^2}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p^k P_k(x, y, \omega) + i\sqrt{p^2 + \omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} p^k Q_k(x, y, \omega). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Stąd dla funkcji Γ_{H_1} i Γ_{H_2} określonych następująco:

$$\Gamma_{H_1} = e^{px} \cos\left(y\sqrt{p^2 + \omega^2}\right), \quad \Gamma_{H_2} = e^{px} \frac{\sin\left(y\sqrt{p^2 + \omega^2}\right)}{\sqrt{p^2 + \omega^2}}, \quad (3.80)$$

mamy:

$$P_n(x, y, \omega) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \Gamma_{H_1}}{\partial p^n} \right|_{p=0}, \quad Q_n(x, y, \omega) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \Gamma_{H_2}}{\partial p^n} \right|_{p=0}. \quad (3.81)$$

Wzory (3.81) są uzasadnione parzystymi potęgami parametru p w rozwinięciu funkcji Γ_{H_1} i Γ_{H_2} w szeregi potęgowe względem tego parametru. Poniżej przedstawiono kilka kolejnych funkcji Trefftza, $P_n(x, y, \omega)$ i $Q_n(x, y, \omega)$, spełniających równanie Helmholtza (3.78), [CJ03]:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \cos(\omega y), & Q_0 &= \frac{\sin(\omega y)}{\omega}, \\
P_1 &= x \cos(\omega y), & Q_1 &= \frac{x \sin(\omega y)}{\omega}, \\
P_2 &= \frac{1}{2} \left(x^2 \cos(\omega y) - \frac{\sin(\omega y)y}{\omega} \right), & Q_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{(x^2 \omega^2 - 1) \sin(\omega y)}{\omega^3} + \frac{\cos(\omega y)y}{\omega^2} \right), \\
P_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3 \cos(\omega y)}{3} - \frac{xy \sin(\omega y)}{\omega} \right), & Q_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{(-3x + x^3 \omega^2) \sin(\omega y)}{3\omega^3} + \frac{xy \cos(\omega y)}{\omega^2} \right).
\end{aligned}$$

Warto zauważyć, że bezpośrednie przejście w powyższych wzorach z parametrem ω do zera nie zawsze prowadzi do T-funkcji dla dwuwymiarowego równania Laplace'a (wystarczy sprawdzić to na przykładzie funkcji Q_2 i Q_3). Prowadzi do tego dopiero wykonanie operacji $\omega \rightarrow 0$ we wzorze (3.79).

Wzory (3.81) mają tę zaletę, że T-funkcje są w nich przedstawione w prostej postaci. Sytuacja wygląda inaczej, gdy rozważa się T-funkcje dla równania Helmholtza w układzie biegunowym w 2D lub w układzie sferycznym w 3D.

Dla równania Helmholtza w postaci (3.78a) w układzie biegunowym dla $\omega = 1$ i dla obszaru ograniczonego układ funkcji Trefftza w obszarze ograniczonym jednospójnym w 2D można wygenerować w postaci iloczynu funkcji Bessela pierwszego rodzaju i funkcji trygonometrycznych, [Z97, LLHC07]:

$$\{J_0(r), J_n(r) \cos(n\theta), J_n(r) \sin(n\theta), n = 1, 2, 3, \dots\},$$

zaś w obszarze ograniczonym wielospójnym z początkiem układu współrzędnych poza rozważanym obszarem, [CLKY03]:

$$\begin{aligned}
&\{J_0(r), Y_0(r), J_n(r) \cos(n\theta), J_n(r) \sin(n\theta), Y_n(r) \cos(n\theta), Y_n(r) \sin(n\theta), \\
&n = 1, 2, 3, \dots\},
\end{aligned}$$

gdzie $J_n(r)$ to funkcje Bessela pierwszego rodzaju rzędu n , zaś $Y_0(r)$ to funkcje Bessela drugiego rodzaju rzędu n .

W 3D w układ funkcji Trefftza w obszarze ograniczonym jednospójnym można wygenerować w postaci iloczynu stowarzyszonych funkcji Legendre'a i sferycznych funkcji Bessela pierwszego rodzaju, [HS78, H84]:

$$\{j_n(r) P_n^q(\cos(\Theta)) \exp(iq\Phi), n = 1, 2, 3, \dots, -n \leq q \leq n\},$$

gdzie $j_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{n+1/2}(r)$ to sferyczna funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu n , [AS72], zaś $P_n^q(\cos(\Theta))$ jest stowarzyszoną funkcją Legendre'a, [AS72].

Wiele uwag na temat T-funkcji dla równania Helmholtza można znaleźć w pracach [KK68, JW96, HS78, CLKY03, LLHC07].

3.6. FUNKCJE TREFFTZA DLA RÓWNANIA DRGAŃ BELKI

Równanie opisujące drgania belki jednorodnej o stałym przekroju i sztywności we współrzędnych bezwymiarowych, w przypadku braku obciążeń (drgania swobodne), ma postać następującą:

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T). \quad (3.82)$$

Do wyprowadzenia postaci funkcji Trefftza dla tego równania zostanie wykorzystane rozwinięcie jego rozwiązania w szereg Taylora wokół punktu $(0, 0)$. Zakłada się przy tym, że funkcja $u(x, t)$ jest w otoczeniu tego punktu co najmniej klasy C^{N+1} , gdzie N jest rzędem najwyższej różniczkii w rozwinięciu. Przy takich założeniach szereg Taylora dla funkcji u ma postać:

$$u(x, t) = u(0, 0) + \frac{du}{1!} + \frac{d^2 u}{2!} + \dots + \frac{d^N u}{N!} + R_{N+1}, \quad (3.83)$$

gdzie $d^n u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial t} t \right)^{(n)}$. Wartości wszystkich pochodnych w rozwinięciu wyznaczane są w punkcie $(0, 0)$.

Wykorzystując równanie (3.82) można w rozwinięciu funkcji $u(x, t)$ w szereg Taylora zastąpić pochodne rzędu 4ν względem zmiennej x przez pochodne rzędu 2ν względem zmiennej t , $\nu = 1, 2, \dots$ jak następuje:

$$\frac{\partial^{4\nu} u}{\partial x^{4\nu}} = (-1)^\nu \frac{\partial^{2\nu} u}{\partial t^{2\nu}}. \quad (3.84)$$

Formuła (3.84) może być stosowana do pochodnych rzędu wyższego niż 3. Dzięki temu zabiegowi w kolejnych wyrazach szeregu Taylora pozostaną pochodne względem zmiennej x tylko do rzędu trzeciego, a pojawią się w wielu wyrazach takie same pochodne. Następnie w rozwinięciu (3.83) współczynniki

przy takich samych pochodnych grupuje się. Dzięki formule (3.84) tak utworzone współczynniki przy pochodnych spełniają równanie (3.82). Tworzą one zatem kolejne funkcje Trefftza dla tego równania. Szereg Taylora po takim zabiegu wygląda następująco:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & u(0, 0) + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,0)} x + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(0,0)} t + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} \frac{x^2}{2!} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{(0,0)} xt + \\
 & + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(0,0)} \frac{t^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{(0,0)} \frac{x^3}{3!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \Big|_{(0,0)} \frac{x^2 t}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \Big|_{(0,0)} \frac{x t^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_{(0,0)} \frac{t^3}{3!} + \\
 & - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(0,0)} \frac{x^4}{4!} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} \Big|_{(0,0)} \frac{x^3 t}{3!} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_{(0,0)} \frac{x^2 t^2}{2!2!} + \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} \Big|_{(0,0)} \frac{x t^3}{3!} + \\
 & + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \Big|_{(0,0)} \frac{t^4}{4!} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \Big|_{(0,0)} \frac{x^5}{5!} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_{(0,0)} \frac{x^4 t}{4!} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_{(0,0)} \frac{x^3 t^2}{3!2!} + \\
 & \frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial t^3} \Big|_{(0,0)} \frac{x^2 t^3}{3!2!} + \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial t^4} \Big|_{(0,0)} \frac{x t^4}{4!} + \frac{\partial^5 u}{\partial t^5} \Big|_{(0,0)} \frac{t^5}{5!} + \\
 & - \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} \Big|_{(0,0)} \frac{x^6}{6!} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} \Big|_{(0,0)} \frac{x^5 t}{5!} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \Big|_{(0,0)} \frac{x^4 t^2}{4!2!} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial t^3} \Big|_{(0,0)} \frac{x^3 t^3}{3!3!} + \dots
 \end{aligned}$$

Takimi samymi deseniami zaznaczono te wyrazy szeregu Taylora, które w wyniku wykorzystania podstawienia (3.84) mają jako współczynniki przy jednomianach zbudowanych ze zmiennych (x, t) takie same pochodne funkcji u w punkcie $(0, 0)$. Grupowanie wyrazów przy tych pochodnych prowadzi do funkcji Trefftza. Pierwszych kilka funkcji ma postać następującą, [AGM08, M09]:

$$\begin{aligned}
 S_{00} &= 1, & S_{10} &= x, & S_{11} &= t, \\
 S_{20} &= \frac{x^2}{2!}, & S_{21} &= xt, & S_{22} &= \frac{t^2}{2!} - \frac{x^4}{4!},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{30} &= \frac{x^3}{3!}, & S_{31} &= \frac{x^2 t}{2!}, & S_{32} &= \frac{x t^2}{2!} - \frac{x^5}{5!}, & S_{33} &= \frac{t^3}{3!} - \frac{x^4 t}{4!}, \\
S_{41} &= \frac{x^3 t^3}{3!}, & S_{42} &= \frac{x^2 t^2}{2!2!} - \frac{x^6}{6!}, & S_{43} &= \frac{x t^3}{3!} - \frac{x^5 t}{5!}, & S_{44} &= \frac{t^4}{4!} - \frac{x^4 t^2}{4!2!} + \frac{x^8}{6!}, \\
S_{52} &= \frac{x^3 t^2}{2!3!} - \frac{x^7}{7!}, & S_{53} &= \frac{x^2 t^3}{2!3!} - \frac{x^6 t}{6!}, & S_{54} &= \frac{x t^4}{4!} - \frac{x^5 t^2}{2!5!} + \frac{x^9}{9!}, & S_{55} &= \frac{t^5}{5!} - \frac{x^4 t^3}{3!4!} + \frac{x^8 t}{8!}.
\end{aligned}$$

Dla $m = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, 2, 3$ oraz $m - k \geq 0$ wielomiany te można zapisać w następującej formie:

$$S_{m, m-k}(x, t) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^j t^{m-k-2j} x^{k+4j}}{(m-k-2j)!(k+4j)!}. \quad (3.85)$$

Tutaj $[x] = \text{floor}(x)$ oznacza część całkowitą liczby x .

Funkcje wyrażone wzorem (3.85) wygodnie jest przenumerować tak, aby ich opis był jednoindeksowy. Jak się okazuje, można to uzyskać kładąc $n = 4m - k - 3$, tzn.:

$$S_n(x, t) = S_{4m-k-3}(x, t) = S_{m, m-k}(x, t).$$

Oznaczając $k = 4 \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - n + 5$ oraz $m = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor + 2$ i definiując osobno wielomiany $S_0 = 1$, $S_1 = x$ i $S_2 = t$ możemy dla $n \geq 3$ napisać następujący wzór, opisujący funkcje Trefftza dla równania (3.82), [AGM08, M09]:

$$S_n(x, t) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-3 \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - 3}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^j t^{n-3 \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - 3 - 2j} x^{4 \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - n + 5 + 4j}}{\left(n - 3 \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - 3 - 2j \right)! \left(4 \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - n + 5 + 4j \right)!}. \quad (3.86)$$

Pochodne funkcji $S_n(x, t)$ względem zmiennej x mają następujące własności:

– dla $n \geq 5$

$$\frac{\partial S_n}{\partial x} = \begin{cases} S_{n-3} & \text{dla } n \neq 4p + 1, \quad p = 1, 2, \dots \\ -S_{n+1} & \text{dla } n = 4p + 1, \quad p = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- dla $n \geq 8$

$$\frac{\partial^2 S_n}{\partial x^2} = \begin{cases} S_{n-6} & \text{dla } n = 4p + 2 \text{ lub } n = 4p + 3 \quad p = 2, 3, \dots \\ -S_{n-2} & \text{dla } n = 4p \quad \text{lub } n = 4p + 1 \quad p = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- dla $n \geq 11$

$$\frac{\partial^3 S_n}{\partial x^3} = \begin{cases} S_{n-9} & \text{dla } n = 4p + 2, \quad p = 3, 4, \dots \\ -S_{n-5} & \text{dla } n \neq 4p + 2 \quad p = 3, 4, \dots \end{cases} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^4 S_n}{\partial x^4} = -S_{n-8}.$$

Dla pochodnych funkcji $S_n(x, t)$ względem zmiennej t otrzymuje się:

- dla $n \geq 7$

$$\frac{\partial S_n}{\partial t} = S_{n-4},$$

- dla $n \geq 11$

$$\frac{\partial^2 S_n}{\partial t^2} = S_{n-8}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial^2 S_n}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 S_n}{\partial x^4}.$$

Ponadto, jak łatwo pokazać:

- dla $n = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10$

$$\frac{\partial^4 S_n}{\partial x^4} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 S_n}{\partial t^2} = 0,$$

- dla $n = 5$

$$\frac{\partial^4 S_5}{\partial x^4} = -S_0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 S_5}{\partial t^2} = S_0,$$

- dla $n = 8$

$$\frac{\partial^4 S_8}{\partial x^4} = -S_1 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 S_8}{\partial t^2} = S_1,$$

- dla $n = 9$

$$\frac{\partial^4 S_9}{\partial x^4} = -S_2 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 S_9}{\partial t^2} = S_2.$$

Jak wynika z przedstawionych wyżej związków, funkcje $S_n(x, t)$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$ spełniają tożsamościowo bezwymiarowe równanie drgań pręta. Stanowią one zatem układ funkcji Trefftza dla tego równania (funkcji rozwiązujących). Każda kombinacja liniowa tych funkcji także spełnia tożsamościowo to równanie.

Przedstawione wyżej funkcje Trefftza dla równania (3.82) można także wyprowadzić wykorzystując funkcję generującą, która w tym przypadku przyjmuje postać, [AGM08, M09]:

$$\Gamma_B(x, t, p) = e^{px + ip^2 t}. \quad (3.87)$$

Rozwijając tę funkcję w szereg potęgowy względem zmiennej p , otrzymuje się następujące rozwinięcie:

$$\begin{aligned} \Gamma_B(x, t, p) &= 1 + px + \frac{p^2}{2!}(2it + x^2) + \frac{p^3}{3!}(6itx + x^3) + \frac{p^4}{4!}(-12t^2 + 12itx^2 + x^4) + \dots = \\ &= S_0 + pS_1 + p^2(iS_2 + S_3) + p^3(-iS_4 + S_6) + p^4(-S_5 + iS_7) + \dots \end{aligned}$$

Widoczne jest, że części rzeczywista i urojona współczynników stojących przy kolejnych potęgach parametru p to uzyskane wcześniej metodą rozwinięcia w szereg Taylora wokół punktu $(0, 0)$ funkcje Trefftza dla równania pręta.

3.7. FUNKCJE TREFFTZA DLA RÓWNIANIA DRGAŃ PŁYTY

3.7.1. Równanie drgań płyty w układzie kartezjańskim

Podobnie jak równanie drgań belki, równanie drgań płyty jest równaniem różniczkowym cząstkowym czwartego rzędu. Dla płyty jednorodnej o stałej grubości i sztywności, bez obciążeń, równanie to we współrzędnych bezwymiarowych ma postać:

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, y, t) = 0. \quad (3.88)$$

Funkcje Trefftza (nazywane także wielomianami płytowymi, [M09]) dla tego równania można wyprowadzić z wykorzystaniem funkcji generującej lub za pomocą rozwinięcia rozwiązania tego równania w szereg Taylora. Oba sposoby prowadzą do takich samych wyników.

Funkcję generującą dla równania (3.88) uzyskuje się, rozwiązując je metodą rozdzielania zmiennych. Ma ona postać:

$$\Gamma_P(x, y, t, p, q) = e^{px + qy + i(p^2 + q^2)t}. \quad (3.89)$$

Funkcję tę można przedstawić w postaci szeregu potęgowego zmiennych p i q :

$$\begin{aligned}\Gamma_p(x, y, t; p, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n R_{nk}(x, y, t; p, q) p^{n-k} q^k = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (P_{nk}(x, y, t) + i(p^2 + q^2) Q_{nk}(x, y, t)) p^{n-k} q^k,\end{aligned}\tag{3.90}$$

gdzie $P_{nk}(x, y, t)$ i $Q_{nk}(x, y, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots$ są funkcjami spełniającymi równanie (3.88), czyli funkcjami Trefftza.

Pierwszych kilka T-funkcji dla równania (3.88) ma postać następującą:

$$\begin{aligned}P_{00}(x, y, t) &= 1, & Q_{00}(x, y, t) &= t, \\ P_{10}(x, y, t) &= x, & Q_{10}(x, y, t) &= xt, \\ P_{11}(x, y, t) &= y, & Q_{11}(x, y, t) &= yt, \\ P_{20}(x, y, t) &= \frac{x^2}{2}, & Q_{20}(x, y, t) &= \frac{x^2 t}{2}, \\ P_{21}(x, y, t) &= xy, & Q_{21}(x, y, t) &= xyt, \\ P_{22}(x, y, t) &= \frac{y^2}{2}, & Q_{22}(x, y, t) &= \frac{y^2 t}{2}, \\ P_{30}(x, y, t) &= \frac{x^3}{3!}, & Q_{30}(x, y, t) &= \frac{x^3 t}{3!}, \\ P_{31}(x, y, t) &= \frac{x^2 y}{2}, & Q_{31}(x, y, t) &= \frac{x^2 yt}{2}, \\ P_{32}(x, y, t) &= \frac{xy^2}{2}, & Q_{32}(x, y, t) &= \frac{xy^2 t}{2}, \\ P_{33}(x, y, t) &= \frac{y^3}{3!}, & Q_{33}(x, y, t) &= \frac{y^3 t}{3!}, \dots\end{aligned}$$

Przy znanych funkcjach $P_{00} = 1$ oraz $Q_{00} = t$ kolejne postacie tych funkcji dla $n = 1, 2, \dots$ można uzyskać, posługując się wzorami rekurencyjnymi dla $n = 1, 2, \dots$, [M09]:

$$\begin{aligned}
P_{n1} &= yP_{(n-1)0}, & Q_{n1} &= yQ_{(n-1)0}, \\
P_{n(n-1)} &= xP_{(n-1)(n-1)}, & Q_{n(n-1)} &= xQ_{(n-1)(n-1)}, \\
P_{(n+2)0} &= \frac{2x(n+1)P_{(n+1)0} - x^2P_{n0} - 4t^2P_{(n-1)0} - 2tQ_{(n-2)0}}{(n+1)(n+2)}, & (3.91) \\
Q_{n0} &= \frac{2x(n+1)Q_{(n-1)0} - x^2Q_{(n-2)0} - 4t^2Q_{(n-4)0} + 2tP_{n0}}{(n+1)(n+2)}, \\
P_{n(k+1)} &= \frac{(n-k+1)P_{n(k-1)} - xP_{(n-1)(k-1)} + yP_{(n-1)k}}{k+1}, & 1 \leq k \leq n-1, \\
Q_{n(k+1)} &= \frac{(n-k+1)Q_{n(k-1)} - xQ_{(n-1)(k-1)} + yQ_{(n-1)k}}{k+1}, & 1 \leq k \leq n-1.
\end{aligned}$$

Ponadto pochodne tych funkcji spełniają następujące zależności, [M09]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{00}}{\partial x} &= \frac{\partial Q_{00}}{\partial x} = \frac{\partial P_{nn}}{\partial x} = \frac{\partial Q_{nn}}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial P_{nk}}{\partial x} &= P_{(n-1)k}, \quad \frac{\partial Q_{nk}}{\partial x} = Q_{(n-1)k}, \quad n > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\
\frac{\partial P_{00}}{\partial y} &= \frac{\partial Q_{00}}{\partial y} = \frac{\partial P_{n0}}{\partial y} = \frac{\partial Q_{n0}}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial P_{nk}}{\partial y} &= P_{(n-1)(k-1)}, \quad \frac{\partial Q_{nk}}{\partial y} = Q_{(n-1)(k-1)}, \quad n > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\
\frac{\partial Q_{nk}}{\partial t} &= P_{nk}, \quad \frac{\partial P_{nk}}{\partial t} = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, \dots, n
\end{aligned}$$

a dla $n > 3$, $k = 0, 1, \dots, n-4$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{n0}}{\partial t} &= -Q_{(n-4)0}, \quad \frac{\partial P_{nn}}{\partial t} = -Q_{(n-4)(n-4)}, \\
\frac{\partial P_{n(n-1)}}{\partial t} &= -Q_{(n-4)(n-5)}, \quad \frac{\partial P_{n(n-2)}}{\partial t} = -2Q_{(n-4)(n-4)} - Q_{(n-4)(n-6)},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_{n(n-3)}}{\partial t} = -2Q_{(n-4)(n-5)} - Q_{(n-4)(n-7)},$$

$$\frac{\partial P_{nk}}{\partial t} = -Q_{(n-4)k} - 2Q_{(n-4)(k-2)} - Q_{(n-4)(k-4)}.$$

Jeśli jakikolwiek indeks funkcji po prawej stronie powyższych wzorów jest ujemny, wówczas jej wartość przyjmuje się równą zero.

3.7.2. Równanie drgań płyty w układzie biegunowym

Uzyskanie funkcji Trefftza dla równania drgań płyty w układzie biegunowym wynika z podstawienia $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ tak w równaniu (3.88), jak i we wzorach rekurencyjnych (3.91), [M09]. Procedura ta nie nastręcza kłopotów. Również wzory opisujące zależności spełniane przez pochodne tych funkcji są łatwe do uzyskania. Należy zastąpić pochodne $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$ pochodnymi $\frac{\partial}{\partial r}$ i $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, zgodnie ze wzorami:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

a następnie przetransformować, podobnie jak to zrobiono z wzorami (3.58), które przetransformowano do postaci (3.77).

3.8. FUNKCJE TREFFTZA DLA RÓWNANIA BIHARMONICZNEGO

3.8.1. Równanie biharmoniczne w układzie kartezjańskim

W kartezjańskim dwuwymiarowym układzie współrzędnych równanie biharmoniczne ma postać następującą:

$$\nabla^4 u(x, y) = \Delta^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2, \quad (3.92)$$

gdzie $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. O obszarze $\Omega \subset R^2$ zakłada się, że jest ograniczony.

Funkcje Trefftza dla równania (3.92) wyprowadzono w monografii [CF00], wykorzystując operacje odwrotne, [CF03, CF03a] oraz rozwinięcie rozwiązania tego rów-

niania w szereg Taylora z eliminacją jednej z pochodnych czwartego rzędu. Wypro-
wadzono tam trzy postacie układów zupełnych funkcji Trefftza dla tego równania dla
trzech możliwości eliminacji czwartych pochodnych (względem zmiennej x , wzglę-
dem zmiennej y i czwartej pochodnej mieszanej). W kartezjańskim układzie współ-
rzędnych każdą z tych postaci można przedstawić, wykorzystując wzory (3.6),
przedstawiające funkcje harmoniczne $F_n(x, y)$ i $G_n(x, y)$, $n = 0, 1, \dots$. Jeden z tych
układów zupełnych dla $n = 0, 1, \dots$ przedstawia się następująco, [CF00]:

$$\begin{aligned}
 H_{1n}(x, y) &= F_n(x, y) + H_{3n}(x, y) = F_n(x, y) + \frac{y}{2} G_{n-1}(x, y), \\
 H_{2n}(x, y) &= G_n(x, y) + H_{4n}(x, y) = \frac{3}{2} G_n(x, y) - \frac{y}{2} F_{n-1}(x, y), \\
 H_{3n}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \left((-1)^k \frac{x^{n-2k-2} y^{2k+2}}{(n-2k-2)!(2k+2)!} (k+1) \right) = \frac{y}{2} G_{n-1}(x, y), \quad (3.93) \\
 H_{4n}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left((-1)^{k+1} \frac{x^{n-2k-1} y^{2k+1}}{(n-2k-1)!(2k+1)!} k \right) = \\
 &= \frac{1}{2} G_n(x, y) - \frac{y}{2} F_{n-1}(x, y).
 \end{aligned}$$

W przypadku gdy górna granica sumowania jest ujemna, wartość funkcji Trefftza
jest równa zero.

Pierwszych kilka T-funkcji dla równania (3.92) ma postać następującą:

$$\begin{aligned}
 H_{10}(x, y) &= 1, & H_{20}(x, y) &= 0, & H_{30}(x, y) &= 0, & H_{40}(x, y) &= 0, \\
 H_{11}(x, y) &= x, & H_{21}(x, y) &= y, & H_{31}(x, y) &= 0, & H_{41}(x, y) &= 0, \\
 H_{12}(x, y) &= \frac{x^2}{2}, & H_{22}(x, y) &= xy, & H_{32}(x, y) &= \frac{y^2}{2}, & H_{42}(x, y) &= 0, \\
 H_{13}(x, y) &= \frac{x^3}{3!} - \frac{xy^2}{2!}, & H_{23}(x, y) &= \frac{x^2 y}{2!} - \frac{y^3}{3!}, \\
 H_{33}(x, y) &= \frac{xy^2}{2}, & H_{43}(x, y) &= \frac{y^3}{3!}, \\
 H_{14}(x, y) &= \frac{x^4}{4!} - \frac{y^4}{4!}, & H_{24}(x, y) &= \frac{x^3 y}{3!},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{34}(x, y) &= \frac{x^2 y^2}{2!2!} - 2 \frac{y^4}{4!}, & H_{44}(x, y) &= \frac{xy^3}{3!}, \\
H_{15}(x, y) &= \frac{x^5}{5!} - \frac{xy^4}{4!}, & H_{25}(x, y) &= \frac{x^4 y}{4!} - 2 \frac{y^5}{5!}, \\
H_{35}(x, y) &= \frac{x^3 y^2}{3!2!} - 2 \frac{xy^4}{4!}, & H_{45}(x, y) &= \frac{x^2 y^3}{2!3!} - 2 \frac{y^5}{5!}, \\
H_{16}(x, y) &= \frac{x^5}{5!} - \frac{x^2 y^4}{2!4!} + 2 \frac{y^6}{6!}, & H_{26}(x, y) &= \frac{x^5 y}{5!} - \frac{xy^5}{5!}, \\
H_{36}(x, y) &= \frac{x^4 y^2}{4!2!} - 2 \frac{x^2 y^4}{2!4!} + 3 \frac{y^6}{6!}, & H_{46}(x, y) &= \frac{x^3 y^3}{3!3!} - 2 \frac{xy^5}{5!}, \dots
\end{aligned}$$

Wzory rekurencyjne i związki między pochodnymi T-funkcji dla równania (3.92) wynikają ze wzorów (3.7) i związków (3.10) i (3.11), i wyrażają się poprzez funkcje harmoniczne $F_n(x, y)$ i $G_n(x, y)$, $n = 0, 1, \dots$.

W przypadku funkcji przedstawionych wzorami (3.93) można dokonać transformacji polegającej na przemnożeniu każdej funkcji przez czynnik $1/n!$, [CF00].

Jeden z pierwszych układów funkcji Trefftza dla równania biharmonicznego pokazano w pracy [GH81]. Funkcje Trefftza dla równania biharmonicznego przedstawiano także w innych publikacjach. W pracy [H84a] wykorzystano układ wielomianów, zbudowanych na bazie kolejnych potęg zmiennej zespolonej $z = x + iy$, począwszy od potęgi drugiej. Jest to układ niepełny, gdyż zaczyna się od funkcji kwadratowych względem obu zmiennych. Nie pozwala to na skuteczne przybliżanie kombinacją liniową takich wielomianów warunków brzegowych, szczególnie gdy są one stałe lub liniowe. Pełny układ wielomianów wspomnianego typu, zawierający wyrazy stałe i liniowe względem obu zmiennych, przedstawiono m.in. w pracach [H84, JCZ93, Q00].

Układ wielomianów, przedstawiony we wspomnianych wyżej pracach, charakteryzuje brak czynnika $1/n!$, który – jako czynnik stały w każdym wielomianie – jest nieistotny, gdyż jego brak zmieni tylko współczynniki kombinacji liniowej wielomianów aproksymujących rozwiązanie badanego problemu.

3.8.2. Równanie biharmoniczne w układzie biegunowym

W przypadku układu biegunowego, dla $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ równanie (3.92) dla $(r, \varphi) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ przyjmuje postać:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u(r, \varphi) = 0. \quad (3.94)$$

Wtedy dla $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ otrzymuje się następujące wzory na T-funkcje dla $n = 1, 2, \dots$, [CF00]:

$$\begin{aligned} H_{B1n}(r, \varphi) &= \frac{r^n}{n!} \left(\cos n\beta + \frac{n}{2} \cos \varphi \sin[(n-1)\beta] \right), \\ H_{B2n}(r, \varphi) &= \frac{r^n}{n!} \left(\frac{3}{2} \sin n\beta - \frac{n}{2} \cos \varphi \cos[(n-1)\beta] \right), \\ H_{B3n}(r, \varphi) &= \frac{r^n}{2(n-1)!} \cos \varphi \sin[(n-1)\beta], \\ H_{B4n}(r, \varphi) &= \frac{r^n}{n!} \left(\frac{1}{2} \sin n\beta - \frac{n}{2} \cos \varphi \cos[(n-1)\beta] \right). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Dla $n = 0$ otrzymuje się $H_{10}(r, \varphi) = 1$, zaś pozostałe T-funkcje z indeksem $n = 0$ przyjmują się równe zero.

3.9. FUNKCJE TREFFTZA DLA ZAGADNIEŃ ELASTOSTATYKI

Funkcje Trefftza dla zagadnień elastostatyki były rozważane przez wielu autorów. Dla płaskiego stanu naprężenia i dla płaskiego stanu odkształcenia funkcje Trefftza były prezentowane m.in. w pracach [JT82, JV92, Q00, Q09]. Wykorzystano tam ujęcie problemów elastostatyki przy pomocy analizy zmiennej zespolonej, wprowadzone przez Muskhelishvilego, [M49, M53]. Wykorzystując dwie analityczne funkcje dobrane w pewien szczególny sposób dla naprężeń i przemieszczeń w płaskim stanie naprężenia, [Q00, Q09], uzyskano układ wielomianów elastostatyki jako części rzeczywiste i zespolone pewnych zespolonych jednomianów.

W pracy [R09] przedstawiono interesujące rozważania dotyczące wykorzystania naprężeniowych funkcji Maxwella do rozwiązywania trójwymiarowych zagadnień elastostatyki. W pracy [Q04] sformułowano i przedstawiono na dwuwymiarowych przykładach dualną zasadę wariacyjną dla metody Trefftza w elementach skończonych. Trójwymiarowe zagadnienie elastostatyki rozwiązano w pracy [LQW08], stosując metodę Boussinesq'a. Stosując funkcje Airy'ego i funkcję naprężeniową, [N70], można dwuwymiarowe zagadnienie elastostatyki sprowadzić do równania biharmonicznego i równania Poissona.

Wykorzystanie podstawienia Lamé'go (potencjału sprężystego przemieszczenia), [N70], sprowadza problem rozwiązywania zagadnień elastostatyki do wykorzystania funkcji harmoniczných. Interesujący pomysł wprowadzenia funkcji Trefftza dla zagadnień elastostatyki przedstawiono w pracach [KKV01, KSKZ05, KS06].

Stosowano także inne podejścia do rozwiązywania zagadnień odwrotnych elastostatyki. Wymienić tu można wiele prac. Dla przykładu w pracy [MHL02] rozważano płaski stan odkształcenia w takim obszarze, który na części brzegu miał zadane przemieszczenia i obciążenia, na pozostałej części warunki nie były znane. Do rozwiązania problemu wykorzystano metodę gradientów sprzężonych i metodę elementów brzegowych. Podobny problem w pracy [ML05] rozwiązano stosując metodę Landwebera i metodę elementów brzegowych.

Niektóre z wymienionych podejść, stosujących funkcje Trefftza do rozwiązywania zagadnień elastostatyki, omówiono niżej.

3.9.1. Równania Beltramiiego-Michella

Zagadnienia elastostatyki rozwiązywane w naprężeniach sprowadzają się do dziewięciu niesprzecznych równań, z których trzy to równania równowagi, a dalsze sześć to równania nierozdzielności, [N70]. W kartezjańskim układzie współrzędnych $0x_1x_2x_3$ można je sprowadzić do sześciu równań tzw. naprężeniowych, nazywanych też równaniami Beltramiiego-Michella, [N70]:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \nabla^2 s + \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.96)$$

gdzie: ∇ – operator nabla, σ_{ij} – składowe tensora naprężenia, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, δ_{ij} – delta Kroneckera, λ, μ – stałe Lamégo, $s = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, X_i – współrzędne wektora sił masowych. Stałe Lamégo powiązane są z modułem sprężystości E i liczbą Poissona ν związkami, [F69]:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}. \quad (3.97)$$

Wykonując na równaniach (3.96) kontrakcję (kładąc $i = j$) i sumując tak otrzymane związki, można otrzymać równanie Poissona opisujące niezmiennik stanu naprężenia, $s = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$:

$$\nabla^2 s = -\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \nabla \cdot X, \quad (3.98)$$

gdzie $\nabla \cdot X = \text{div} X$.

Eliminując za pomocą związku (3.98) wielkość $\nabla^2 s$ z równań (3.96) otrzymuje się ostateczną postać równań naprężeniowych:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} = - \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \nabla \cdot X, \quad (3.99)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}.$$

Gdy siły masowe mają charakter sił zachowawczych o potencjale harmonicznym, czyli gdy $X_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, gdzie $\nabla^2 \varphi = 0$, lub gdy ich się nie uwzględnia, to równanie (3.98) staje się równaniem harmonicznym, tzn. $\nabla^2 s = 0$. Jeśli następnie na obu stronach równania (3.99) wykonać operację laplasjanu, to okazuje się, że przy braku sił masowych lub przy potencjalnym polu tych sił naprężenia σ_{ij} stają się funkcjami biharmonicznymi:

$$\nabla^2 \nabla^2 \sigma_{ij} = 0. \quad (3.100)$$

Rozwiązanie równania Poissona (3.98) składa się z rozwiązania szczególnego, uwzględniającego niezerową prawą stronę tego równania, i rozwiązania równania jednorodnego, które jest funkcją harmoniczną. Tak więc będzie ono miało postać sumy kombinacji funkcji Trefftza dla równania Laplace'a oraz rozwiązania szczególnego. Rozwiązanie równania (3.99) będzie zbudowane podobnie.

W przypadku braku sił masowych lub gdy ich się nie uwzględnia, rozwiązaniem równania (3.100) będzie kombinacja liniowa funkcji biharmonicznych.

Dalsze rozważania, dotyczące odkształceń ε_{ij} czy przemieszczeń u_i , $i, j = 1, 2, 3$, można prowadzić w oparciu o związki konstytutywne:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} e, \quad (3.101)$$

gdzie $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, i związki wyrażające składowe tensora odkształcenia przez współrzędne wektora przemieszczenia:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.102)$$

3.9.2. Metoda Boussinesq'a

Zazwyczaj równania elastostatyki zapisuje się jako równania przemieszczeniowe, [N70]. Wynikają one z równań równowagi wewnętrznej:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0, \quad (3.103)$$

oraz z równań (3.101) i (3.102), i mają postać:

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_i} \right) + X_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.104)$$

Podstawienie Boussinesq'a stosuje się dla przypadku pominięcia sił masowych w równaniach (3.104), czyli dla równania Naviera-Lamého:

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.104a)$$

Podstawienie to ma postać następującą, [F59, LQW08]:

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1 + x_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, & u_2 &= \varphi_2 + x_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \\ u_3 &= \varphi_3 + x_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$ są funkcjami harmonicznymi. Układ tych funkcji sprowadza każde z trzech równań (3.104) do postaci:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right), \quad (3.106)$$

gdzie $\psi_1 = \psi - Cx_3$, C – dowolna stała.

Ponieważ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$ są dowolnymi funkcjami harmonicznymi, więc i ψ_1 jest funkcją harmoniczną. Każdą z funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ można opisać następująco (por. (3.14)):

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, y, z) &= (a_{1i} e^{mx_1} + a_{2i} e^{-mx_1}) (b_{1i} e^{nx_2} + b_{2i} e^{-nx_2}) \times \\ &\quad \times (c_{1i} \cos Mx_3 + c_{2i} \sin Mx_3), \end{aligned} \quad (3.107)$$

gdzie $i = 1, 2, 3$, $M^2 = m^2 + n^2$, przy czym parametry m, n, M to dowolne liczby rzeczywiste. Współczynniki a_{ki} , b_{ki} i c_{ki} są wielkościami do wyznaczenia.

Podstawiając postać (3.107) funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ do związku (3.106) można założyć, że w wyniku różniczkowań przy iloczynach funkcji wykładniczych i trygonometrycznych typu $e^{\pm mx_1 \pm nx_2} (\cos/\sin) Mx_3$ pojawią się grupy współczynników o postaci $\pm A^{(1)}m \pm B^{(2)}n \pm C^{(3)}M$. Takich sum pojawi się tyle, ile jest różnych iloczynów funkcji wykładniczych i trygonometrycznych w (3.107), tzn. osiem. Ponieważ na współczynniki m, n, M narzucony jest jedynie warunek, że $M^2 = m^2 + n^2$, nic nie stoi na przeszkodzie, aby prawą stronę wzoru (3.106), określającą pochodną funkcji ψ_1 względem zmiennej x_3 , przedstawić w postaci podwójnej sumy, podobnie jak we wzorze (3.17), ze współczynnikami w postaci jak wyżej. Następnie wyciąłkowanie tego wyrażenia względem zmiennej x_3 przy przedstawieniu stałej całkowania w postaci funkcji harmoniczných dwóch zmiennych x_1 i x_2 pozwala ostatecznie otrzymać następującą postać funkcji ψ , występującej we wzorach (3.105), [LQW08]:

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2, x_3) = & -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{(A_{mn}^{(1)}m + B_{mn}^{(1)}n - C_{mn}^{(5)}M)}{M} e^{mx_1 + nx_2} \cos Mx_3 + \right. \\ & -\frac{(A_{mn}^{(2)}m - B_{mn}^{(2)}n - C_{mn}^{(6)}M)}{M} e^{mx_1 - nx_2} \cos Mx_3 - \frac{(-A_{mn}^{(3)}m + B_{mn}^{(3)}n - C_{mn}^{(7)}M)}{M} e^{-mx_1 + nx_2} \cos Mx_3 + \\ & -\frac{(-A_{mn}^{(4)}m - B_{mn}^{(4)}n - C_{mn}^{(8)}M)}{M} e^{-mx_1 - nx_2} \cos Mx_3 + \frac{(A_{mn}^{(5)}m + B_{mn}^{(5)}n + C_{mn}^{(1)}M)}{M} e^{mx_1 + nx_2} \sin Mx_3 + \\ & + \frac{(A_{mn}^{(6)}m - B_{mn}^{(6)}n + C_{mn}^{(2)}M)}{M} e^{mx_1 - nx_2} \sin Mx_3 + \frac{(-A_{mn}^{(7)}m + B_{mn}^{(7)}n + C_{mn}^{(3)}M)}{M} e^{-mx_1 + nx_2} \sin Mx_3 + \\ & \left. + \frac{(-A_{mn}^{(8)}m - B_{mn}^{(8)}n + C_{mn}^{(4)}M)}{M} e^{-mx_1 - nx_2} \sin Mx_3 \right\} + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[(D_m^{(1)} e^{mx} + D_m^{(2)} e^{-mx}) \cos my + (D_m^{(3)} e^{mx} + D_m^{(4)} e^{-mx}) \sin my \right] + Ex_3. \end{aligned}$$

Wstawiając tak otrzymaną funkcję ψ , jak i funkcje $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ dane wzorami (3.107) do związków (3.105) można wyznaczyć funkcje Trefftza dla każdej składowej wektora przemieszczenia. Są to funkcje stojące przy współczynnikach $A_{mn}^{(k)}, B_{mn}^{(k)}, C_{mn}^{(k)}, D_m^{(k)}$ i E . Dla przykładu funkcje Trefftza dla pierwszej składowej wektora przemieszczenia, u_1 , mają postać następującą, [LQW08]:

$$\begin{aligned}
N_1^{u1} &= \left(\sin Mz - l \frac{m^2}{M} z \cos Mz \right) e^{mx+ny}, \\
N_2^{u1} &= \left(\sin Mz - l \frac{m^2}{M} z \cos Mz \right) e^{mx-ny}, \\
N_3^{u1} &= \left(\sin Mz - l \frac{m^2}{M} z \cos Mz \right) e^{-mx+ny}, \\
N_4^{u1} &= \left(\sin Mz - l \frac{m^2}{M} z \cos Mz \right) e^{-mx-ny}, \\
N_5^{u1} &= \left(\cos Mz + l \frac{m^2}{M} z \sin Mz \right) e^{mx+ny}, \\
N_6^{u1} &= \left(\cos Mz + l \frac{m^2}{M} z \sin Mz \right) e^{mx-ny}, \\
N_7^{u1} &= \left(\cos Mz + l \frac{m^2}{M} z \sin Mz \right) e^{-mx+ny}, \\
N_8^{u1} &= \left(\cos Mz + l \frac{m^2}{M} z \sin Mz \right) e^{-mx-ny}, \\
N_9^{u1} &= -l \frac{mn}{M} z e^{mx+ny} \cos Mz, & N_{10}^{u1} &= l \frac{mn}{M} z e^{mx-ny} \cos Mz, \\
N_{11}^{u1} &= l \frac{mn}{M} z e^{-mx+ny} \cos Mz, & N_{12}^{u1} &= -l \frac{mn}{M} z e^{-mx-ny} \cos Mz, \\
N_{13}^{u1} &= l \frac{mn}{M} z e^{mx+ny} \sin Mz, & N_{14}^{u1} &= -l \frac{mn}{M} z e^{mx-ny} \sin Mz, \\
N_{15}^{u1} &= -l \frac{mn}{M} z e^{-mx+ny} \sin Mz, & N_{16}^{u1} &= l \frac{mn}{M} z e^{-mx-ny} \sin Mz, \\
N_{17}^{u1} &= lmze^{mx+ny} \sin Mz, & N_{18}^{u1} &= lmze^{mx-ny} \sin Mz, \\
N_{19}^{u1} &= -lmze^{-mx+ny} \sin Mz, & N_{20}^{u1} &= -lmze^{-mx-ny} \sin Mz, \\
N_{21}^{u1} &= lmze^{mx+ny} \cos Mz, & N_{22}^{u1} &= lmze^{mx-ny} \cos Mz,
\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}
N_{23}^{u1} &= -lmze^{-mx+ny} \cos Mz, & N_{24}^{u1} &= -lmze^{-mx-ny} \cos Mz, \\
N_{25}^{u1} &= mze^{mx} \cos my, & N_{26}^{u1} &= mze^{mx} \sin my, \\
N_{27}^{u1} &= -mze^{-mx} \cos my, & N_{28}^{u1} &= -mze^{-mx} \sin my, \\
N_{29}^{u1} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.108}$$

gdzie $l = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}$.

Funkcje Trefftza dla przemieszczeń u_2 i u_3 wyprowadza się w podobny sposób.

3.9.3. Rozwiązanie Kelvina

Jak wynika z twierdzenia Helmholtza, dowolne pole wektorowe $u(x_1, x_2, x_3)$ może być przedstawione w postaci, [F69]:

$$u = \text{grad} \varphi + \text{rot} \psi, \tag{3.109}$$

gdzie φ jest funkcją skalarną, a ψ pewnym polem wektorowym. W odniesieniu do równań elastostatyki nosi ono nazwę rozwiązania Kelvina, [N70].

Przy podobnym rozkładzie sił masowych, tzn. gdy:

$$X = \text{grad} \vartheta + \text{rot} \chi$$

podstawienie pola przemieszczeń w postaci (3.109) do równania (3.104) powoduje rozbiecie go na rozseparowany układ równań Poissona:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\vartheta}{\lambda + 2\mu} = 0, \quad \nabla^2 \psi_i + \frac{\chi_i}{\mu} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.110}$$

Przy braku sił masowych układ ten staje się układem równań Laplace'a.

W obu wypadkach funkcje φ i ψ_i , $i = 1, 2, 3$, można przedstawić w postaci kombinacji liniowej funkcji harmonicznych, opisanych dla przypadku trójwymiarowego w części 3.2, do których – w przypadku uwzględnienia sił masowych – należy dodać rozwiązanie szczególne równań Poissona.

3.9.4. Wielomiany Kompisa

Przedstawione m.in. w pracach [KKV01, KS04, KS06] wielomiany Trefftza aproksymujące pole przemieszczeń w zagadnieniach elastostatyki, opisanych

równaniem (3.104a) zbudowane są na bazie jednomianów do stopnia n . Jest to typowy przykład algorytmu heurystycznego (por. część 3.11). Wielomian taki można przedstawić jako iloczyn macierzy wierszowej, składającej się ze wspomnianych jednomianów, i macierzy kolumnowej współczynników, których wartości są wyznaczone podczas rozwiązywania konkretnych zagadnień elastostatyki. Dla zagadnienia dwuwymiarowego jednomianów do stopnia n będzie $2n+1$, zaś dla zagadnienia trójwymiarowego będzie ich $(n+1)^2$.

Macierz jednomianów ma postać:

$$P_n(x_1, x_2, x_3) = [1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, \dots, x_1^n, x_1^{n-1}x_2, \dots, x_2x_3^{n-1}, x_3^n] \quad (3.111)$$

zaś aproksymacja pola przemieszczeń przez wspomniane wielomiany opisana jest następująco:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n(x_1, x_2, x_3) & 0 & 0 \\ 0 & P_n(x_1, x_2, x_3) & 0 \\ 0 & 0 & P_n(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C^{(1)} \\ C^{(2)} \\ C^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (3.112)$$

Pierwsza macierz po prawej stronie ma jako elementy także macierze. Te elementy to macierze wierszowe jednomianów opisanych wzorem (3.111) oraz macierze wierszowe zer, wszystkie z tą samą liczbą elementów ($2n+1$ dla zagadnień 2D, $(n+1)^2$ dla zagadnień 3D). Ostatnia macierz po prawej stronie zawiera nieznane współczynniki wielomianów aproksymujących przemieszczenia. Każdy z elementów tej macierzy to kolumna zawierająca tyle samo elementów co macierze jednomianów.

Równanie Naviera-Lamégo (3.104a) zawiera pochodne drugiego rzędu przemieszczeń. Skoro tak, to jednomiany zerowego i pierwszego stopnia spełniają równanie (3.104a) tożsamościowo. Jednakże jednomiany wyższych stopni, tworzące wielomiany aproksymujące przemieszczenia, nie mogą mieć dowolnie dobranych współczynników. Wygodnie jest zatem rozłożyć prawą stronę równania (3.112) w następujący sposób:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & A^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & A^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ a^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & B^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & B^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \\ b^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (3.113)$$

Macierze $B^{(j)}(x_1, x_2, x_3)$, $j=1,2,3$, zawierają tyle jednomianów, ile pozostanie po dwukrotnym zróżniczkowaniu przemieszczeń w równaniu (3.104a), zaś macierze

$A^{(j)}(x_1, x_2, x_3)$, $j = 1, 2, 3$, będą zawierać pozostałe jednomiany. Dobór jednomianów dla poszczególnych macierzy odbywa się w sposób przedstawiony niżej:

- a) dla $n = 0, 1$ wszystkie jednomiany wchodzi do macierzy $A^{(j)}$;
 b) dla $n = 2, 3, \dots$ wyboru jednomianów do macierzy $A^{(j)}$ i $B^{(j)}$ dokonuje się osobno dla u_1 , u_2 i u_3 według następującej zasady:

- dla $n = 2$:

wybór dla u_1 :	x_1^2	wchodzi do $B^{(1)}$,
	$x_1x_2 \quad x_1x_3$	wchodzą do $A^{(1)}$,
	$x_2^2 \quad x_2x_3 \quad x_3^2$	wchodzą do $A^{(1)}$;
wybór dla u_2 :	x_2^2	wchodzi do $B^{(2)}$,
	$x_1x_2 \quad x_2x_3$	wchodzą do $A^{(2)}$,
	$x_1^2 \quad x_1x_3 \quad x_3^2$	wchodzą do $A^{(2)}$;
wybór dla u_3 :	x_3^2	wchodzi do $B^{(3)}$,
	$x_1x_3 \quad x_2x_3$	wchodzą do $A^{(3)}$,
	$x_1^2 \quad x_1x_2 \quad x_2^2$	wchodzą do $A^{(3)}$;

- dla $n = 3$:

wybór dla u_1 :	x_1^3	wchodzi do $B^{(1)}$,
	$x_1^2x_2 \quad x_1^2x_3$	wchodzą do $B^{(1)}$,
	$x_1x_2^2 \quad x_1x_2x_3 \quad x_1x_3^2$	wchodzą do $A^{(1)}$;
	$x_2^3 \quad x_2^2x_3 \quad x_2x_3^2 \quad x_3^3$	wchodzą do $A^{(1)}$;

itd. Cykliczna zmiana indeksów zmiennych pozwala łatwo otrzymać elementy macierzy $A^{(j)}(x_1, x_2, x_3)$ i $B^{(j)}(x_1, x_2, x_3)$ dla $j = 2, 3$.

Aby właściwie dobrać współczynniki wielomianów, trzeba zróżniczkować przemieszczenia dane wzorem (3.113) i wstawić do równania (3.104a). Otrzymuje się w ten sposób związki następujący:

$$[M(x_1, x_2, x_3)]\{b\} + [N(x_1, x_2, x_3)]\{a\} = \{0\}. \quad (3.114)$$

Macierze M i N to wynik działania operatorem lewej strony równania (3.104a), tzn. operatorem:

$$\mu \nabla^2 + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_i} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_i} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_i} \right)$$

na elementy macierzy ze związku (3.113), zawierających podmacierze $A^{(j)}(x_1, x_2, x_3)$ i $B^{(j)}(x_1, x_2, x_3)$.

Związek (3.114) pozwala na wyrażenie współczynników b przez współczynniki a tak, aby równanie (3.104a) było spełnione.

To zagadnienie rozwiązuje się dla wielomianu każdego stopnia n osobno. Można to zrobić przy pomocy obliczeń symbolicznych (np. z wykorzystaniem programu MAPLE) albo numerycznie. W tym drugim przypadku trzeba wybrać w rozważanym obszarze tyle punktów $x^{(j)} = (x_1, x_2, x_3)^{(j)}$, ile jest współczynników macierzy $\{b\}$ do wyznaczenia, i obliczyć je z równania:

$$\{b\} = -[M(x^{(j)})]^{-1} [N(x^{(j)})] \{a\}. \quad (3.115)$$

Oczywiście wybór punktów musi być taki, aby macierz $[M(x^{(j)})]$ nie była osobliwa ani źle uwarunkowana. Najwygodniej jest wybrać punkty leżące na wycinku sfery, [KS06].

Na podstawie wzorów (3.113) i (3.115) z tak otrzymanymi współczynnikami wielomianów przemieszczenia można zapisać następująco:

$$\{u\} = ([A(x_1, x_2, x_3)] - [B(x_1, x_2, x_3)][M]^{-1}[N]) \{a\} = [U(x_1, x_2, x_3)] \{a\}. \quad (3.116)$$

Każda kolumna macierzy $[U(x_1, x_2, x_3)]$ wprowadza T-funkcję przemieszczeniową. Liczba T-funkcji to $2n+1$ dla zagadnień 2D, $(n+1)^2$ dla zagadnień 3D.

Otrzymanie odpowiednich T-funkcji dla naprężeń wynika ze wzorów (3.101) i (3.102).

3.9.5. Płaski stan naprężenia/odkształcenia

Jeśli składowe naprężenia związane z kierunkiem jednej osi są równe zero w całym rozważanym obszarze, to mówimy o płaskim stanie naprężenia. Wygodnie jest rozważać go (podobnie, jak i płaski stan odkształcenia) w układzie współrzędnych $0xyz$.

Tak więc, jeśli $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, to mówimy o płaskim stanie naprężenia równoległym do płaszczyzny $0xy$. W takim przypadku, [F69]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}), \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{xy}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0,$$

gdzie E to moduł Younga, zaś ν oznacza liczbę Poissona.

Równania przemieszczeniowe dla płaskiego stanu naprężenia mają postać następującą:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_i + \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + X = 0,$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)_i + \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + Y = 0,$$
(3.117)

gdzie X, Y to składowe sił masowych, zaś u, v to składowe przemieszczenia w kierunku osi $0x$ i $0y$.

W płaskim stanie odkształcenia składowa wektora przemieszczenia w kierunku osi $0z$ jest równa zero, a pozostałe składowe zależą tylko od zmiennych x i y .

Ponadto:

$$\sigma_{xx} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \sigma_{yx},$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right),$$

oraz $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$. Stałe Lamégo λ i μ powiązane są z modułem sprężystości E i liczbą Poissona ν związkami (3.97). Równania przemieszczeniowe płaskiego stanu odkształcenia przyjmują postać:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_i + \mu \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + X = 0,$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)_i + \mu \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + Y = 0.$$
(3.118)

T-funkcje dla przemieszczeń i dla naprężeń, wyprowadzone przy pomocy analizy zmiennej zespolonej, opartej na wynikach Muskhelishvilego, [M49, M53], przedstawiono w pracach Jirouška i współautorów, [JT82, JV92] oraz Qina i Wang, [Q00, QW09].

T-funkcje dla przemieszczeń $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$ w płaskim stanie naprężenia lub odkształcenia mają postać następującą (we wzorach podanych niżej z oznacza liczbę zespoloną), [Q00, QW09]:

$$\begin{aligned} 2\mu N_{1k} &= \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} Z_{1k} \\ \operatorname{Im} Z_{1k} \end{Bmatrix} \quad \text{gdzie} \quad Z_{1k} = ikz^k + ikz\bar{z}^{k-1}, \\ 2\mu N_{2k} &= \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} Z_{2k} \\ \operatorname{Im} Z_{2k} \end{Bmatrix} \quad \text{gdzie} \quad Z_{2k} = \kappa z^k - kz\bar{z}^{k-1}, \\ 2\mu N_{3k} &= \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} Z_{3k} \\ \operatorname{Im} Z_{3k} \end{Bmatrix} \quad \text{gdzie} \quad Z_{3k} = i\kappa\bar{z}^k, \\ 2\mu N_{4k} &= \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} Z_{4k} \\ \operatorname{Im} Z_{4k} \end{Bmatrix} \quad \text{gdzie} \quad Z_{4k} = -\bar{z}^k, \end{aligned} \quad (3.119)$$

gdzie $k=1,2,\dots$, μ to moduł ścinania (jedna ze stałych Lamégo), a $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ dla płaskiego stanu naprężenia oraz $\kappa=3-4\nu$ dla płaskiego stanu odkształcenia, ν to liczba Poissona, $\nu=\lambda/(2\lambda+2\mu)$, $z=x+iy$, $i=\sqrt{-1}$.

T-funkcje dla naprężeń $\{\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xy}\}^T$ mają postać, [Q00]:

$$\begin{aligned} T_{1k} &= \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} R_{1k} - \operatorname{Re} S_{1k} \\ \operatorname{Re} R_{1k} + \operatorname{Re} S_{1k} \\ \operatorname{Im} S_{1k} \end{Bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad R_{1k} = 2ikz^{k-1}, \quad S_{1k} = ik(k-1)z^{k-2}\bar{z}, \\ T_{2k} &= \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} R_{2k} - \operatorname{Re} S_{2k} \\ \operatorname{Re} R_{2k} + \operatorname{Re} S_{2k} \\ \operatorname{Im} S_{2k} \end{Bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad R_{2k} = 2kz^{k-1}, \quad S_{2k} = k(k-1)z^{k-2}\bar{z}, \\ T_{3k} &= \begin{Bmatrix} -\operatorname{Re} S_{3k} \\ \operatorname{Re} S_{3k} \\ \operatorname{Im} S_{3k} \end{Bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad S_{3k} = ikz^{k-1}, \\ T_{4k} &= \begin{Bmatrix} -\operatorname{Re} S_{4k} \\ \operatorname{Re} S_{4k} \\ \operatorname{Im} S_{4k} \end{Bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad S_{4k} = kz^{k-1}. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Aproksymacja przemieszczeń budowana jest jako kombinacja liniowa funkcji opisanych wzorami (3.119), a naprężeń – wzorami (3.120).

3.10. FUNKCJE TREFFTZA DLA ZAGADNIEŃ ELASTOKINETYKI

W przypadku zagadnień prostych i odwrotnych elastokinetyki, artykułów opisujących zastosowania funkcji Trefftza jest niewiele. We wszystkich stosowano podstawienie Lamégo i w efekcie poszukiwano przybliżonych rozwiązań rozważanych problemów z wykorzystaniem funkcji Trefftza dla równania falowego, [M07, GMM09, GMS09].

Oprócz podstawienia Lamégo, prowadzącego do równań falowych i związanych z nimi funkcji Trefftza można poszukiwać rozwiązań przybliżonych wykorzystując inne podejścia. Niektóre z nich omówiono niżej.

3.10.1. Ogólne rozwiązanie Lamégo

Równania przemieszczeniowe elastokinetyki mają postać, [N70]:

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_i} \right) + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i=1,2,3 \quad (3.121)$$

gdzie ρ to gęstość ciała, zajmującego rozważany obszar. Przy pominięciu sił masowych równania te przyjmują postać:

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_i} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i=1,2,3. \quad (3.121a)$$

Jak wynika z twierdzenia Helmholtza, dowolne pole wektorowe $u(x_1, x_2, x_3)$ może być przedstawione w postaci, [F69]:

$$u = \text{grad} \varphi + \text{rot} \psi, \quad (3.122)$$

gdzie φ jest funkcją skalarną, a ψ pewnym polem wektorowym. Rozkład ten często nazywa się rozkładem pola wektorowego na część potencjalną i solenoidalną. W odniesieniu do równań elastostatyki rozkład (3.109) nazywany jest przedstawieniem Lamégo, [N70]. Przedstawienie to ma tę własność, że zarówno dywergencja drugiego składnika po prawej stronie, jak i rotacja pierwszego są równe zero.

Po podstawieniu związku (3.122) do równań (3.121a) otrzymuje się dwa niezależne równania falowe, skalarne i wektorowe. Mają one postać:

$$\nabla^2 \varphi(x, y, t) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \psi_i(x, y, z, t) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}, \quad (3.123)$$

dla $i = 1, 2, 3$,

$$\text{gdzie: } c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Funkcje Trefftza dla równania falowego omówiono w części 3.4. Dalsze rozważania dotyczące elastokinetyki prowadzi się wykorzystując związki konstytutywne (3.101) i związki między odkształceniami i przemieszczeniami, (3.102).

3.10.2. Inne możliwości wykorzystania funkcji Trefftza

Równania elastokinetyki można przekształcić także do innych postaci, umożliwiających wykorzystanie wprowadzonych wcześniej funkcji Trefftza.

Przykładem mogą tu być równania naprężeniowe elastokinetyki, wyprowadzone przez J. Ignaczaka, [I59, N70]. Po przekształceniu równań (3.121) przy wykorzystaniu związków (3.102) do postaci zawierającej wyłącznie składowe tensora odkształcenia, a następnie po wykorzystaniu prawa Hooke'a, [N70]:

$$2\mu\epsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} s \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

gdzie $s = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, a δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera, po przekształceniach dochodzi się do uogólnionych równań Beltramiego-Michela:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{ij} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} + \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \zeta_{ij} = 0, \quad (3.124)$$

$$\text{dla } i, j = 1, 2, 3, \text{ gdzie: } \zeta_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \nabla \cdot X, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Przy pominięciu sił masowych równanie to przyjmuje postać:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{ij} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} + \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0, \quad (3.124a)$$

dla $i, j = 1, 2, 3$.

W takim przypadku naprężenia spełniają równania:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)s = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma_{ij} = 0, \quad (3.125)$$

dla $i, j = 1, 2, 3$.

Rozkładając naprężenie σ_{ij} na dwie składowe $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma''_{ij}$ można pokazać, [N70], że spełniają one równania:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma'_{ij} = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma''_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.126)$$

Ignaczak wykazał zupełność równań naprężeniowych, jak również udowodnił twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań, [I63]. Pozwala to uzyskać przybliżone rozwiązania tych równań przy wykorzystaniu funkcji Trefftza dla równań falowych.

Dalsze rozważania, dotyczące odkształceń ε_{ij} czy przemieszczeń u_i , $i, j = 1, 2, 3$, można prowadzić w oparciu o związki (3.101) i (3.102).

Inne warianty rozwiązań dla równań elastokinetyki prowadzą bądź do równań falowych, bądź do bifalowych, bądź do biharmonicznych, [N70].

3.11. INNE RODZAJE T-FUNKCJI

W pewnych przypadkach wyprowadzenie układu zupełnego funkcji Trefftza może okazać się trudne. W takich sytuacjach niektórzy autorzy proponują algorytmy heurystyczne do wyprowadzenia układu T-funkcji, które spełniają różniczkowe równania rządzące, ale nie ma dowodu ich zupełności, [Z95].

Przykładem są funkcje Trefftza, zastosowane w pracach [S73, R73] dotyczących powłok o stałych krzywiznach:

$$\{\exp(\lambda_n x) \cos(\beta_n y); \exp(\lambda_n x) \sin(\beta_n y); \exp(\gamma_n x) \cos(\alpha_n y); \exp(\gamma_n x) \sin(\alpha_n y)\},$$

gdzie: $\alpha_n = \frac{n\pi}{2a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{2b}$, $2a \times 2b$ – to wymiary płyty, zaś λ_n i γ_n są zespolonymi pierwiastkami równań charakterystycznych. Ten układ funkcji Trefftza jest superpozycją rozwiązań typu Levy'ego, [S04a]. Był on wykorzystany z powodzeniem we wspomnianych wyżej pracach, a także w pracy [JV91].

Standardowym procesem poszukiwania funkcji Trefftza w innych heurystycznych algorytmach jest przyjęcie ich wielomianowej postaci. Układ wielomianów:

$$f_k(x, y) = \sum_{i=0}^k a_{k-i,i} x^{k-i} y^i,$$

jest wstawiany do równania rządzącego i na tej podstawie wyliczane są współczynniki $a_{k-i,i}$ w taki sposób, aby to równanie było spełnione. Taką metodę wykorzystano w przypadku ortotropowych płyt [JN90] i w zagadnieniach elastostatyki (por. część 3.9.4).

Dla tego typu T-funkcji zastosowania są dyskusyjne z uwagi na brak podstaw matematycznych. Elementy skończone z funkcjami kształtu tego typu powinny być dokładnie zbadane ze względu na dokładność wyników, oszacowanie błędu czy zbieżność przed ostatecznym ich zastosowaniem, [Z95].

Jeszcze jednym rodzajem T-funkcji, o których warto wspomnieć, są funkcje specjalnego zastosowania, które spełniają nie tylko równanie rządzące, ale i pewne zadane warunki brzegowe, np. wzdłuż brzegu okręgu lub wzdłuż ramion kąta, stanowiącego brzeg, [Z95]. Do tej rodziny należą przede wszystkim funkcje Williamsa, które wprowadzono dla rozważania osobliwości w narożach, [W52, W59]. Innym rodzajem funkcji specjalnego zastosowania są funkcje wprowadzone w pracach [P85, JV92]. Różne typy takich funkcji przedstawiono w pracy [Z95].

4. Metoda Trefftza

4.1. POŚREDNIE I BEZPOŚREDNIE PODEJŚCIA DO METODY TREFFTZA

Metoda Trefftza została zdefiniowana przez Herrerę, [H00], następująco:

Dany jest podobszar będący elementem podziału rozważanego obszaru w przestrzeni euklidesowej. „Metoda Trefftza” jest dowolną procedurą przeznaczoną do rozwiązania problemu brzegowego równań różniczkowych cząstkowych lub układów takich równań w tym obszarze, wykorzystującą rozwiązania tych równań różniczkowych lub jego sprzężenia, zdefiniowanego w tym podobszarze.

Idea, wprowadzona przez Trefftza, [T26], polegała na użyciu funkcji próbnych, spełniających dane równanie różniczkowe, z nieznanymi współczynnikami jako wagami, które to współczynniki trzeba tak określić, aby spełnione były warunki brzegowe z możliwie jak najmniejszym błędem lub aby były spełnione w określonych punktach brzegu (kolokacyjnie). W związku z takim określeniem metody Trefftza bywa ona zaliczana do procedur rozwiązywania typu brzegowego (ang. *boundary-type solution method/procedure*), [KK95, C00a].

Tak rozumiana metoda Trefftza przejawia istotne podobieństwo do metody elementów brzegowych. Współczynniki, które trzeba wyznaczyć, określa się albo przy pomocy wyrażeń całkowych, albo metodą kolokacji. Układ związków, które trzeba rozwiązać, może także zostać wyprowadzony przy użyciu rozwiązań podstawowych (także osobliwych) tak w bezpośredniej, jak i w pośredniej wersji konwencjonalnej metody elementów brzegowych. Ta alternatywna interpretacja elementów brzegowych w metodzie Trefftza powoduje jej podział na dwa podejścia: pośrednie i bezpośrednie.

Podejście pośrednie polega na przybliżeniu poszukiwanego rozwiązania kombinacją liniową T-funkcji, zbudowaniu związku określającego niedokładność rozwiązania (np. funkcjonal opisujący zgodność przybliżonego rozwiązania i wartości brzegowych), a następnie minimalizację tej niedokładności (np. metodą kolokacji brzegowej, metodą najmniejszych kwadratów czy metodą Galerkiną) i otrzymaniu w efekcie rozwiązania układu rozważanych równań. Takie po-

dejsście jest zgodne z oryginalnym sformułowaniem Trefftza, [T26], i stosowane jest w wielu artykułach stosujących metodę Trefftza.

Warto tu zaznaczyć, że w olbrzymiej większości bardziej złożonych zagadnień nie da się znaleźć przybliżonego rozwiązania problemu metodą opisaną wyżej bez podzielenia rozważanego obszaru na podobszary (elementy). Taki podział jest konieczny głównie z tego powodu, że przyjęcie T-funkcji jako funkcji próbnych w całym obszarze wymaga – przy bardziej skomplikowanych kształtach obszaru – wzięcia pod uwagę bardzo dużej ich liczby, co prowadzi do źle uwarunkowanych macierzy w procesie rozwiązywania problemu, [Z95]. To eliminuje w praktyce „globalne” algorytmy, będące jednak punktem wyjścia do rozważania tzw. T-elementów, czyli elementów skończonych z T-funkcjami, [JW96].

Podejście bezpośrednie polega na rozważaniu równania rządzącego, zbudowaniu przy pomocy całek brzegowych wyrażenia określającego reszty ważone przy wykorzystaniu układu zupełnego T-funkcji i przy przyjęciu T-funkcji za funkcje wagowe i dalej – podobnie jak w metodzie pośredniej – minimalizację utworzonych wyrażeń zawierających reszty ważone (np. metodą kollokacji brzegowej, metodą najmniejszych kwadratów czy metodą Galerkina) i otrzymaniu w efekcie rozwiązania układu rozważanych równań. To podejście jest znacznie późniejsze od oryginalnego podejścia Trefftza, [CJZ89].

W obu podejściach jako wynik otrzymuje się aproksymację rozwiązania rozważanego zagadnienia kombinacją liniową T-funkcji.

W podejściu pośrednim na rozwiązaniu przybliżonym wymusza się spełnienie warunków brzegowych przez minimalizację błędu ich przybliżenia, podczas gdy równanie rządzące jest spełnione w całym obszarze.

W podejściu bezpośrednim równanie rządzące jest spełnione w sensie minimalizacji reszt ważonych, czyli w sensie słabym. Wyrażenia dotyczące reszt ważonych są utworzone przy przyjęciu T-funkcji jako funkcji wagowych. Brzegowe równanie całkowite jest otrzymane przez podwójne zastosowanie twierdzenia Greena-Gaussa. To równanie całkowite jest dyskretyzowane i rozwiązywane ze względu na niewiadome współczynniki aproksymujące wartości brzegowe. Bezpośrednie podejście w metodzie Trefftza może być zatem uważane za metodę elementów brzegowych z T-funkcjami, zamiast zazwyczaj wykorzystywanego rozwiązania podstawowego [CJZ89, JCZ93, KK95, JC95, C00a, KS06, LLHC07 i in.].

Przy rozważaniu różnych podejść do metody Trefftza warto zwrócić uwagę na fakt, że niektóre z nich są rozwijane przez społeczność inżynierów, podczas gdy inne – przez społeczność matematyków, [KK95a, L98, CC05, LLHC07].

W pracy [LLHC07] przedstawiono pewną systematykę podejść do metody Trefftza. W dalszych częściach opis tych podejść jest wzorowany na podejściu przedstawionym w tej pracy.

4.2. POŚREDNIA METODA TREFFTZA DLA ZAGADNIEŃ STACJONARNYCH

4.2.1. Podejście kollokacyjne do metody Trefftza

W metodzie kollokacyjnej zakłada się, że kombinacja liniowa pewnego układu funkcji dopuszczalnych z nieznanymi współczynnikami opisuje przybliżone rozwiązanie problemu. Następnie przyjmuje się, że zarówno równanie rządzące, jak i warunek brzegowy są spełnione przez tę kombinację liniową funkcji w skończonym zbiorze punktów należących do obszaru, w którym rozważany jest problem.

W literaturze rozwijanej przez społeczność inżynierską ta metoda nazywana jest metodą residualną (ang. *residual metod*), [PW80, LLHC07].

Rozważmy następujący problem:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{w obszarze } \Omega, \\ Bu = g & \text{na brzegu } S = \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

gdzie L jest liniowym operatorem różniczkowym cząstkowym, a operator B opisuje warunek brzegowy typu Dirichleta, Neumanna lub Robina.

Rozważając zupełny układ funkcji $\{\psi_i\}$ odpowiednią liczbę razy różniczkowanych w Ω można zapisać rozwiązanie problemu (4.1) w postaci:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_i \psi_i, \quad (4.2)$$

gdzie $\bar{a}_i$ są współczynnikami opisującymi dokładne rozwiązanie problemu. Wybierając skończoną liczbę N funkcji ψ_i można zapisać przybliżone rozwiązanie problemu (4.1):

$$v = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i, \quad (4.3)$$

gdzie współczynniki a_i opisują aproksymatę rozwiązania dokładnego.

Ponieważ jest N niewiadomych, wybiera się $M \geq N$ punktów kollokacji i żąda się od funkcji v spełnienia równania rządzącego, jak i warunku brzegowego w skończonym zbiorze punktów Q_j należących do obszaru Ω . Otrzymuje się układ równań:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N a_i L \psi_i(Q_j) = f(Q_j), & j = 1, 2, \dots, M^*, & Q_j \in \Omega, \\ \sum_{i=1}^N a_i B \psi_i(Q_j) = g(Q_j), & j = M^* + 1, M^* + 2, \dots, M, & Q_j \in S = \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

Ponieważ równania różniczkowe i warunki brzegowe pełnią różne role w rozważanym problemie, w równaniach (4.4) powinny być różne funkcje wagowe:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N a_i L \psi_i(Q_j) = f(Q_j), & j = 1, 2, \dots, M^*, & Q_j \in \Omega, \\ \sum_{i=1}^N w_B a_i B \psi_i(Q_j) = g(Q_j), & j = M^* + 1, \dots, M, & Q_j \in S = \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.5)$$

Funkcje wagowe $w_B > 0$ mogą być różne dla różnych warunków brzegowych (typu Dirichleta, Neumanna lub Robina). Stąd otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (4.6)$$

gdzie $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T$ jest wektorem niewiadomych, $\mathbf{b}$ to znany wektor prawych stron, zaś $\mathbf{A} = (A_{ij})_{M \times N}$ to macierz sztywności. Jej elementy są równe $A_{ij} = L \psi_i(Q_j)$ dla $j \leq M^*$ oraz $A_{ij} = w_B a_i B \psi_i(Q_j)$ dla $j > M^*$.

Gdy $M > N$, układ równań (4.6) jest nadokreślony i aby obliczyć współczynniki a_i stosuje się metodę najmniejszych kwadratów.

Takie podejście nazywa się **metodą kollokacji**.

Jeśli układ funkcji $\{\psi_i\}$ ma tę własność, że każda z nich spełnia równanie $Lu = f$ w obszarze Ω , czyli gdy są to T-funkcje, to z układu równań algebraicznych (4.5) pozostają do spełnienia tylko równania:

$$\sum_{i=1}^N w_B a_i B \psi_i(Q_j) = w_B g(Q_j), \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad Q_j \in S. \quad (4.7)$$

Takie podejście nazywa się **metodą kollokacji Trefftza** (ang. *Trefftz collocation method*), [LHL04, LLHC07]. Metoda ta bywa też nazywana metodą pośrednią Trefftza, [KK95], W literaturze funkcjonują także inne nazwy tego podejścia, które można znaleźć np. w pracach [ZKB77, ZZ85, L89a].

Innym sposobem dojścia do metody kollokacji jest przedstawienie problemu (4.1) w postaci całek residualnych:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} R_E v d\Omega &= \iint_{\Omega} (Lu - f) v d\Omega, \\ \int_{\partial\Omega} w_B R_B v dS &= \int_{\partial\Omega} w_B (Bu - g) v dS. \end{aligned} \quad (4.8)$$

gdzie R_E i R_B to residua równania rządzącego i warunku brzegowego. Jeśli funkcja testowa v będzie dystrybucją delta Diraca,

$$v = \delta(P - Q_i) = \begin{cases} \infty, & P = Q_i \\ 0, & P \neq Q_i \end{cases},$$

to

$$\iint_{\Omega} \delta(P - Q_i) h(P) d\Omega(P) = h(Q_i),$$

co sprowadza równania (4.8) do postaci (4.5).

Jeśli jako układ funkcji $\{\psi_i\}$ przyjmuje się wielomiany ortogonalne, to podejście nazywa się także metodą spektralną, [BM97, LLHC07].

Więcej uwag na temat metody Trefftza i podejścia kollokacyjnego można znaleźć w monografii [LLHC08].

4.2.2. Metoda aproksymacji brzegowej – podejście całkowe

Rozważmy ponownie zagadnienie (4.1), przy czym warunek brzegowy zapiszemy w postaci warunku Robin'a:

$$p \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \quad \text{na brzegu } S = \partial\Omega, \quad (4.9)$$

gdzie n jest normalną zewnętrzną do $S = \partial\Omega$.

Założmy, że znamy rozwiązanie szczególne Ψ_0 , spełniające równanie (4.1)₁. Przy pomocy transformacji $w = u - \Psi_0$ można przekształcić rozważany problem tak, aby równanie różniczkowe było jednorodne. Dla tak zbudowanej funkcji w prawa strona warunku (4.9) przyjmie postać:

$$\bar{g} = g - [p(\partial\Psi_0 / \partial n) + \alpha\Psi_0].$$

Tak więc w miejsce problemu (4.1) można rozważać problem:

$$\begin{aligned} Lu &= 0 && \text{w obszarze } \Omega, \\ p \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= \bar{g} && \text{na brzegu } S = \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dla uproszczenia zapisu tutaj i dalej pominięto nadkreślenie nad g .

Jeśli dla równania (4.10)₁ znany jest układ T-funkcji, $\{\psi_i\}$, przybliżone rozwiązanie problemu (4.10) można zapisać w postaci:

$$u_L = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i . \quad (4.11)$$

gdzie współczynniki a_i są niewiadomymi do wyznaczenia na podstawie wzoru (4.10)₂.

Oznaczmy jako V_L zbiór funkcji u_L o postaci (4.11). Przy takim doborze funkcji ψ_i zagadnienie rozwiązania przybliżonego problemu (4.10) można sformułować następująco:

Spośród wszystkich $v \in V_L$ znaleźć $u_L \in V_L$ takie, że:

$$I_B(u_L) = \min_{v \in V_L} I_B(v), \quad (4.12)$$

gdzie:

$$I_B(v) = \int_S \left(p \frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v - g \right)^2 dS . \quad (4.13)$$

Gdy na części brzegu występuje warunek Dirichleta, problem można sformułować bardziej szczegółowo w następującej postaci:

$$\begin{aligned} Lu = 0 & \quad \text{w obszarze } \Omega, \\ u = g_1 & \quad \text{na brzegu } S_D, \\ p \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_3 & \quad \text{na brzegu } S_R \cup S_N, \end{aligned} \quad (4.14)$$

przy czym $S_D \cup S_N \cup S_R = S$, indeksy oznaczają części brzegu z warunkami Dirichleta, Neumanna i Robina, a wyszczególnione części brzegu są rozłączne. Warunek Neumanna ma miejsce, gdy $\alpha = 0$.

Dla problemu (4.14) całka $I_B(v)$ przyjmuje postać:

$$I_B(v) = \int_{S_D} (v - g_1)^2 dS + w \int_{S_N \cup S_R} \left(p \frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v - g_3 \right)^2 dS, \quad (4.15)$$

gdzie w jest wagą, która ma zrównoważyć wpływ tych dwóch różnych warunków brzegowych. Wagę w przyjmuje się dodatnią, przy czym z uwagi na fakt, że po-

chodne zwykle przyjmują większe wartości bezwzględne niż rozwiązania, wybiera się $w < 1$. Wybór wagi w powinien zależeć od analizy błędu rozwiązania, [LMS87].

Równanie (4.12) prowadzi do równania algebraicznego o postaci (4.6), tzn. $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T$ jest wektorem niewiadomych, zaś macierz $\mathbf{A}$ jest symetryczna i dodatnio określona, a ponadto nie jest macierzą rzadką.

Problem (4.14) rozważany jako zagadnienie minimalizacji funkcjonału (4.15) przy postaci (4.11) rozwiązania przybliżonego to oryginalna metoda Trefftza, [T26].

Metoda Trefftza jest prostsza i bardziej efektywna niż metoda Ritza-Galerkina, ponieważ proces aproksymacji rozwiązania redukuje się tylko do brzegu rozważanego obszaru. Związek pomiędzy metodą Ritza-Galerkina a metodą Trefftza jest analogiczny do związku pomiędzy metodą elementów skończonych a metodą elementów brzegowych, [LLHC07].

Jeśli kształt rozważanego obszaru jest bardziej złożony, zagadnienie znalezienia rozwiązania staje się niestabilne. Wówczas rozważany obszar dzieli się na podobszary (elementy skończone). W poszczególnych podobszarach możliwe jest zastosowanie różnych metod obliczeniowych, [H84, H95].

4.2.3. Podejście wykorzystujące metodę najmniejszych kwadratów

Rozważmy problem następujący:

$$\begin{aligned}
 Lu &= f && \text{w obszarze } \Omega, \\
 u &= g_1 && \text{na brzegu } S_D, \\
 p \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2 && \text{na brzegu } S_N, \\
 p \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= g_3 && \text{na brzegu } S_R,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

przy ograniczeniach dotyczących części brzegu jak w problemie (4.14).

Aby rozwiązać ten problem, rozważmy funkcjonal celu:

$$\begin{aligned}
 I(v) &= \iint_{\Omega} (Lv - f)^2 d\Omega + w_1^2 \int_{S_D} (v - g_1)^2 dS + w_2^2 \int_{S_N} \left(p \frac{\partial v}{\partial n} - g_2 \right)^2 dS + \\
 &+ w_3^2 \int_{S_R} \left(p \frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v - g_3 \right)^2 dS,
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

gdzie w_i są dodatnimi, stałymi wagami. Metoda najmniejszych kwadratów (MNK) jest tu określona następująco:

Znaleźć rozwiązanie $u \in V_H$, $V_H \subset H^2(\Omega)$ takie, że:

$$I(u) = \min_{v \in V_H} I(v). \quad (4.18)$$

Tutaj $V_H \subset H^2(\Omega)$ jest zbiorem funkcji dopuszczalnych bez brania pod uwagę spełnienia jakiegokolwiek warunku brzegowego, a $H^2(\Omega)$ jest przestrzenią Sobolewa.

Podejście wykorzystujące MNK może być także nazwane metodą residualnych kwadratów.

Korzyścią związaną ze stosowaniem MNK jest to, że macierz sztywności A jest zawsze symetryczna i pozytywnie określona (albo półokreślona) i że nawet skomplikowane ograniczenia na rozwiązanie można dość łatwo włączyć do obliczeń numerycznych. Niekorzystne jest jednak to, że w porównaniu z metodą elementów skończonych otrzymany układ równań jest gorzej uwarunkowany.

Rozważając ciągłość rozwiązania i strumienia na brzegu, można zmodyfikować całkę (4.17) do następującej postaci:

$$\begin{aligned} \hat{I}(v) = & \iint_{\Omega} (Lv - f)^2 d\Omega + w_1^2 \int_{S_D} (v - g_1)^2 dS + w_2^2 \int_{S_N} \left(p \frac{\partial v}{\partial n} - g_2 \right)^2 dS + \\ & + w_3^2 \int_{S_R} \left(p \frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v - g_3 \right)^2 dS + w_4^2 \int_S (v^+ - v^-)^2 dS + \\ & + w_5^2 \int_S \left(p \frac{\partial v^+}{\partial n} - p \frac{\partial v^-}{\partial n} \right)^2 dS, \end{aligned} \quad (4.19)$$

gdzie funkcje oznaczone znakiem plus dotyczą ich wartości po zewnętrznej stronie brzegu rozważanego obszaru (podobszaru), a znakiem minus – po wewnętrznej, zaś w_i są dodatnimi, stałymi wagami. Oczywiście funkcjonal celu $\hat{I}(v)$ zawierać może także warunki na wewnętrznych brzegach, tzn. na granicach pomiędzy elementami, na jakie podzielono rozważany obszar.

Przyjmijmy, że rozważane zagadnienie jest bez źródeł, tzn. że $f = 0$. Przyjęcie jako V_H zbioru funkcji o postaci (4.11) powoduje, że wtedy pierwsza całka po prawej stronie znika. W funkcjonale $\hat{I}(v)$ pozostają wtedy tylko całki z kwadratów niedokładności spełnienia warunków brzegowych (reszt z warunków brzegowych po aproksy-

macji rozwiązania wzorem (4.11)) oraz całki ze skoków aproksymaty i jej strumienia na powierzchniach ograniczających rozważane obszary, wszystkie z wagami:

$$\begin{aligned} \hat{I}(v) = & \int_{S_D} (v - g_1)^2 dS + w_2^2 \int_{S_N} \left(p \frac{\partial v}{\partial n} - g_2 \right)^2 dS + w_3^2 \int_{S_R} \left(p \frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v - g_3 \right)^2 dS + \\ & + w_4^2 \int_S (v^+ - v^-)^2 dS + w_5^2 \int_S \left(p \frac{\partial v^+}{\partial n} - p \frac{\partial v^-}{\partial n} \right)^2 dS. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Różniczkując funkcjonal $\hat{I}(v)$ względem współczynników a_i funkcji $v = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i$

(por. (4.3)) należącej do $V_H \subset H^2(\Omega)$, otrzymuje się układ równań postaci:

$$\frac{\partial \hat{I}(v)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Otrzymany układ równań algebraicznych na współczynniki a_i można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Elementy macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{b}$ wylicza się, wykorzystując pochodne prawej strony wzoru (4.19) lub (4.20).

Funkcjonał celu (4.19) można jeszcze rozbudować, uwzględniając elementy regularyzujące rozwiązanie. Analizując składniki funkcjonału $\hat{I}(v)$ można zauważyć, że dwa z nich mają charakter regularyzujący – mianowicie minimalizacja skoku wartości funkcji i minimalizacja skoku strumienia na brzegu.

Do tych składników można jeszcze dodać warunki natury fizycznej, czyli tzw. regularyzację energetyczną. Podejście tego typu zaprezentowano w kilku pracach, w których – rozważając metodą elementów skończonych zagadnienie odwrotne przewodzenia ciepła przy zastosowaniu metody Trefftza – wykorzystano m.in. warunek minimalizacji wzrostu entropii oraz warunek minimalizacji rozproszenia energii, [C04, C04a, CF06, CFG07, GLM08, GL10, M09]. Odpowiedni dobór współczynników kary pozwala otrzymać dokładniejsze rozwiązanie rozważanych problemów. Analizując wartości współczynników kary zazwyczaj w pierwszym przybliżeniu przyjmuje się wszystkie współczynniki równe jeden. Różnicując ich wartości w następnych przybliżeniach przyjmuje się pierwsze przybliżenie jako wartości odniesienia.

W zastosowaniach stosuje się całkowanie numeryczne, gdyż całki (4.17) i (4.19) są bardzo trudne do ewentualnego przekształcania w sposób dokładny. Jeżeli przy całkowaniu jako węzły związane z kwadraturą numeryczną przyjmie się węzły kollokacji, MNK prowadzi dokładnie do metody kollokacji.

Więcej uwag na temat stosowania MNK można znaleźć np. w pracach [L00, KLS03].

4.2.4. Sformułowanie wykorzystujące metodę Galerkina

Rozważmy równanie Laplace'a z warunkami brzegowymi Dirichleta i Neumana, każdy na innej części brzegu. Oznacza to, że rozważane zagadnienie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} Lu = \nabla^2 u &= 0 && \text{w obszarze } \Omega, \\ u &= g_1 && \text{na brzegu } S_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2 && \text{na brzegu } S_N, \end{aligned} \quad (4.21)$$

gdzie n jest normalną zewnętrzną do $S = \partial\Omega$.

Rozwiązania poszukuje się w postaci (4.3), gdzie $\{\psi_i\}$ to układ T-funkcji dla równania Laplace'a. Wprowadza się oznaczenia:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} \partial\psi_1/\partial n \\ \dots \\ \partial\psi_N/\partial n \end{bmatrix}, \quad v = \mathbf{a}^T \mathbf{\Psi}, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \mathbf{a}^T \mathbf{\Xi}. \quad (4.22)$$

Funkcja $v = \mathbf{a}^T \mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{a}$ spełnia równanie (4.21)₁, ale nie spełnia warunków brzegowych. Oznaczmy residua, powstałe w wyniku podstawienia za rozwiązanie u jego przybliżenia v , jak niżej:

$$\begin{aligned} R_1 &= v - g_1 = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{a} - g_1 && \text{na brzegu } S_D, \\ R_2 &= \frac{\partial v}{\partial n} - g_2 = \mathbf{\Xi}^T \mathbf{a} - g_2 && \text{na brzegu } S_N. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Jako funkcje wagowe przyjmuje się $\frac{\partial v}{\partial n} = \mathbf{a}^T \mathbf{\Xi}$ oraz $-v = -\mathbf{a}^T \mathbf{\Psi}$. Wówczas otrzymujemy następujące całkowe sformułowanie metody ważonych reszt, prowadzące do wyznaczenia współczynników a_i , $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned}
\int_{S_D} \frac{\partial v}{\partial n} R_1 dS - \int_{S_N} v R_2 dS &= \int_{S_D} \mathbf{a}^T \Xi (\Psi^T \mathbf{a} - g_1) dS - \int_{S_N} \mathbf{a}^T \Psi (\Xi^T \mathbf{a} - g_2) dS = \\
&= \mathbf{a}^T \left(\int_{S_D} \Xi (\Psi^T \mathbf{a} - g_1) dS - \int_{S_N} \Psi (\Xi^T \mathbf{a} - g_2) dS \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Przekształcając to równanie, otrzymuje się:

$$\left(\int_{S_D} \Xi \Psi^T dS - \int_{S_N} \Psi \Xi^T dS \right) \mathbf{a} = \int_{S_D} \Xi g_1 dS - \int_{S_N} \Psi g_2 dS, \tag{4.25}$$

albo

$$\mathbf{Aa} = \mathbf{b}, \tag{4.25a}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_{S_D} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \psi_j dS - \int_{S_N} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial n} dS, \\
b_i &= \int_{S_D} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} g_1 dS - \int_{S_N} \psi_i g_2 dS.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

W pracach [CJZ89, JCZ90, CJZ91, JCZ93] udowodniono symetrię macierzy $\mathbf{A}$. Ta własność elementów tej macierzy powoduje, że skuteczność obliczeniowa tej metody jest wyższa niż innych sformułowań.

W pracach [HP92, HP92a] wprowadzono podejście metodą Galerkina, gdzie za funkcje wagowe w wyrażeniu (4.24) zamiast $\frac{\partial v}{\partial n} = \mathbf{a}^T \Xi$ oraz $-v = -\mathbf{a}^T \Psi$ przyjęto g_2 oraz g_1 . Udowodniono, że takie sformułowanie zapewnia jednoznaczność rozwiązania.

Do równania (4.25) można także dojść ze strony sformułowania wariacyjnego, [ZKB77].

4.2.5. Zmodyfikowana pośrednia metoda Trefftza

W pracach [O68, PS82, PS82a, PS83] przedstawiono podejście do pośredniej metody Trefftza, wykorzystujące rozwiązania podstawowe. W tym sformułowaniu rozwiązanie przybliżone opisane jest liniową kombinacją wartości rozwiązania

podstawowego w wybranych punktach. Podejście to jest przedstawione w dalszej części tekstu na przykładzie równania Laplace'a.

Rozwiązanie podstawowe dwuwymiarowego równania Laplace'a ma postać, [B78]:

$$\psi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r(P, Q)} \right), \quad (4.27)$$

gdzie P to punkt w przestrzeni, w którym rejestruje się wartość pochodzącą od punktowego źródła działającego w Q , a $r(P, Q)$ opisuje odległość od P do Q :

$$r(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

Rozwiązanie podstawowe ma osobliwość w punkcie $P = Q$. Zatem punkty źródłowe Q , dla których obliczane są wartości rozwiązania podstawowego, umieszcza się na brzegu obszaru większego, zawierającego rozważany obszar wraz z brzegiem. Wówczas aproksymata rozwiązania równania Laplace'a może być zapisana jak następuje:

$$v(P) = a_1 \psi(P, Q_1) + a_2 \psi(P, Q_2) + \dots + a_N \psi(P, Q_N) = \mathbf{a}^T \Psi(P), \quad (4.28)$$

gdzie N jest całkowitą liczbą punktów źródłowych. Różniczkując związek (4.28), względem normalnej do brzegu rozważanego obszaru, otrzymuje się:

$$\frac{\partial v(P)}{\partial n} = a_1 \frac{\partial \psi(P, Q_1)}{\partial n} + \dots + a_N \frac{\partial \psi(P, Q_N)}{\partial n} = \mathbf{a}^T \Xi(P), \quad (4.29)$$

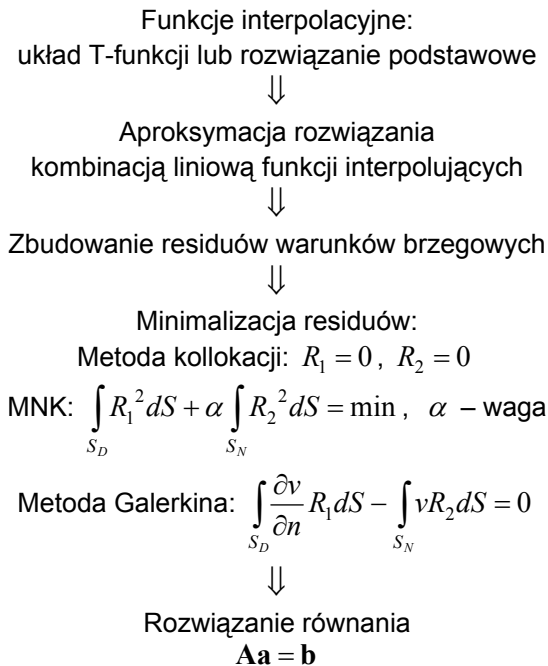
(por. oznaczenia (4.22)).

Podobnie jak w części 4.2.4 wprowadza się residua, powstałe w wyniku podstawienia za rozwiązanie u jego przybliżenia v (wzory (4.23)).

W podejściu kollokacyjnym wymusza się zerowanie się związków (4.23) w brzegowych punktach kollokacji. Prowadzi to do równania macierzowego $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b}$, którego rozwiązaniem jest wektor współczynników $\mathbf{a}$.

4.2.6. Podsumowanie pośredniej metody Trefftza

Pośrednią metodę Trefftza można podsumować w postaci następującej sekwencji operacji, przedstawionej poniżej dla dwuwymiarowego równania Laplace'a, z warunkami Dirichleta na jednej części brzegu, i Neumanna na drugiej części, [KK95]:



4.3. POŚREDNIA METODA TREFFTZA DLA ZAGADNIEŃ NIESTACJONARNYCH

W przypadku zagadnień niestacjonarnych wszystkie opisane metody trzeba poszerzyć w związku z dodaniem zmiennej czasowej.

W przypadku podejścia kolokacyjnego prowadzi to do zwiększenia układu równań do wyznaczenia współczynników kombinacji liniowej (4.3). Osobne równania powstaną w związku z koniecznością uwzględnienia warunków początkowych i warunków związanych z dalszymi chwilami czasu, wynikających z podziału rozpatrywanego okresu czasu na mniejsze przedziały.

Metoda aproksymacji brzegowej ma w tym przypadku szersze znaczenie, bo wartości brzegowe mogą zmieniać się w czasie. Podział rozpatrywanego okresu czasu na K mniejszych przedziałów spowoduje konieczność wyznaczenia kombinacji liniowej T-funkcji w każdym przedziale czasu z osobna (por. (4.3):

$$v^k = \sum_{i=1}^N a_i^k \psi_i, \quad k = 1, \dots, K \quad (4.30)$$

Tak więc aproksymata rozwiązania ścisłego będzie skonstruowana jako suma funkcji określonych w tym samym obszarze przestrzennym, ale w kolejnych przedziałach czasu.

W związku z wynikającym z warunku początkowego dodatkowym członem residualnym współczynniki a_i^k kombinacji liniowej T-funkcji, aproksymującej rozwiązanie badanego problemu, będą wyznaczone z warunku minimalizacji funkcjonału o postaci (por. (4.15)):

$$I(v) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{S_D} (v^k - g_1)^2 ds dt + w \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{S_N \cup S_R} \left(p \frac{\partial v^k}{\partial n} + \alpha v^k - g_3 \right)^2 ds dt + \int_{\Omega} (v^k - v_0^k)^2 d\Omega, \quad k = 1, \dots, K, \quad (4.31)$$

gdzie t_{k-1} to chwila początkowa k -tego przedziału czasowego, $k = 1, \dots, K$, v_0^k to warunek początkowy na początku k -tego przedziału czasowego, wynikający z wartości funkcji v^k na końcu przedziału $(k - 1)$ -go lub z warunku początkowego dla całego problemu.

W przypadku zagadnień z warunkiem początkowym dla pochodnej czasowej konieczne jest dodanie do funkcjonału $I(v)$ jeszcze jednego członu.

Funkcjonał (4.31), uzupełniony o człony związane ze skokiem wartości poszukiwanej funkcji lub jej pochodnej normalnej na brzegach podobszarów (por. formuła (4.20)), na które podzielono obszar Ω , opisuje niedokładność przybliżenia rozwiązania zagadnienia niestacjonarnego.

Wszystkie zmiany wynikające z rozpatrywania zagadnień niestacjonarnych są bardziej szczegółowo omówione w rozdziale 5. Warto zaznaczyć, że w cytowanych tam przykładach stosowana jest głównie metoda najmniejszych kwadratów.

4.4. BEZPOŚREDNIA METODA TREFFTZA

Metoda ta jest omówiona na przykładzie równania Laplace'a w 2D.

Rozważmy równanie residuów ważonych z wagą v . Dla równania Laplace'a ma ono postać:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) v d\Omega = 0.$$

Całkując dwukrotnie lewą stronę przez części otrzymuje się:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u v d\Omega = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS + \int_{\Omega} u \nabla^2 v d\Omega = 0. \quad (4.32)$$

W bezpośrednim sformułowaniu metody elementów brzegowych jako funkcja wagowa jest przyjęte rozwiązanie podstawowe, przedstawione wzorem (4.27). W bezpośredniej metodzie Trefftza jako funkcje wagowe przyjmuje się T-funkcje:

$$v = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i = \mathbf{a}^T \mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{a},$$

tak, jak to przedstawiono we wzorach (4.22). Oczywiście przy takim przyjęciu funkcji wagowych ostatnia całka po prawej stronie równania (4.32) znika, a równanie to przyjmuje postać:

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n} \mathbf{a}^T \mathbf{\Psi} - u \mathbf{a}^T \Xi \right) dS = \mathbf{a}^T \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n} \mathbf{\Psi} - u \Xi \right) dS = 0. \quad (4.33)$$

Jako że jest ono prawdziwe dla każdego wektora współczynników $\mathbf{a}$, otrzymujemy:

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n} \mathbf{\Psi} - u \Xi \right) dS = 0. \quad (4.34)$$

Poszukiwane rozwiązanie problemu, u , jak i jego pochodna normalna, $\frac{\partial u}{\partial n}$, są przybliżane kombinacją liniową wartości funkcji interpolującej w punktach węzłowych:

$$\begin{aligned} u &\approx \tilde{u} = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \dots + \phi_N u_N = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{u}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &\approx \tilde{q} = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \dots + \phi_N q_N = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Tutaj ϕ oznacza funkcję interpolującą, a wektor $\boldsymbol{\phi}$ opisuje jej wartości w N punktach węzłowych; wektory $\mathbf{u}$ oraz $\mathbf{q}$ opisują wartości w węzłach funkcji u i jej pochodnej normalnej $\frac{\partial u}{\partial n}$.

Podstawiając (4.35) do (4.34) prowadzi do następującego brzegowego równania całkowego opisującego ważoną wartość residualną R :

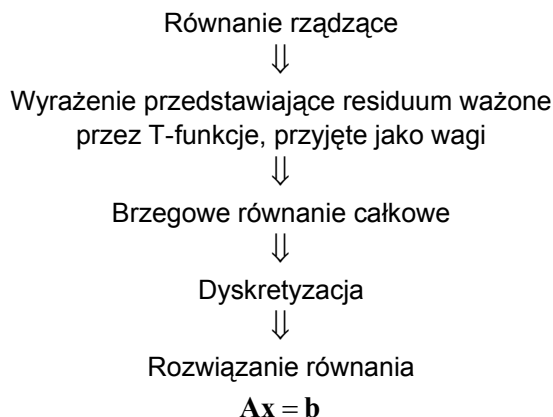
$$R = \int_S (\tilde{q} \mathbf{\Psi} - \tilde{u} \Xi) dS = \int_S (\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{q} \mathbf{\Psi} - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{u} \Xi) dS = \mathbf{q} \int_S \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{\Psi} dS - \mathbf{u} \int_S \boldsymbol{\phi}^T \Xi dS = 0. \quad (4.36)$$

Niewiadomymi są tutaj te wartości brzegowe funkcji u i jej pochodnej normalnej $\frac{\partial u}{\partial n}$, które nie są znane na brzegu. Równanie to można następnie zapisać jako układ

N równań algebraicznych na nieznane wartości funkcji u i $\frac{\partial u}{\partial n}$ w węzłach, zaś ostateczną postać przybliżonego rozwiązania otrzymuje się na podstawie wzorów (4.35).

Warto dodać, że jądra równań metody bezpośredniej Trefftza w odróżnieniu od jąder występujących w metodzie elementów brzegowych, nie są osobliwe. Pozwala to co prawda uniknąć w metodzie Trefftza wyznaczania osobliwych całek, lecz prowadzi do rozwiązania źle uwarunkowanych układów równań całkowych Fredholma I rodzaju.

Bezpośrednią metodę Trefftza można podsumować w postaci następującej sekwencji operacji, przedstawionej poniżej dla dwuwymiarowego równania Laplace'a, [KK95]:



Szerokie omówienie tej metody znajduje się w pracach [JC95] i [KK95].

4.5. UWAGI O ZASTOSOWANIACH METODY TREFFTZA

Funkcje Trefftza i różne odmiany metody Trefftza są wykorzystywane do budowania przybliżonych rozwiązań zagadnień prostych (brzegowych lub początkowo-brzegowych) i odwrotnych na wiele sposobów. Można to prześledzić na przykładzie wielu prac, [AK00, PBH00, SWZ01, KKV01, P03, KW03, WSSZ04, KK06, RDHP08, CLS09].

W przedstawionych niżej przykładach wykorzystania metody Trefftza pokazano zastosowanie T-funkcji, których postacie i własności opisano w rozdziale trzecim, oraz niektórych odmian metody Trefftza, omówionych w rozdziale czwartym. Przykłady te podzielono na trzy grupy zagadnień odwrotnych, a mianowicie na:

- zagadnienia identyfikacji wartości brzegowych,
- zagadnienia identyfikacji źródeł, oraz
- zagadnienia identyfikacji własności materiałów (zagadnienia współczynnikowe).

W przykładach tych pokazano rozwiązania uzyskane bez podziału rozważanego obszaru, w którym ma miejsce analizowany proces, jak również przy podziale tego obszaru na elementy skończone.

5. Funkcje Trefftza w zagadnieniach identyfikacji warunków brzegowych

Zagadnienia identyfikacji warunków brzegowych (numerowane jako *B.1*, *B.2*,...) są bardzo często rozważanymi problemami odwrotnymi. W przypadku użycia metody Trefftza najczęściej jest to któraś z metod pośrednich. W przedstawionych niżej przykładach na ogół stosowano metodę najmniejszych kwadratów.

W całym rozdziale zakłada się, że rozważany ośrodek jest jednorodny i izotropowy, a współczynniki opisujące jego własności są wielkościami stałymi.

5.1. ZAGADNIENIA OPISANE RÓWNANIEM LAPLACE'A

Zagadnienia odwrotne identyfikacji warunków na brzegu dla równania Laplace'a rozważane były od dawna, w różnych dziedzinach nauki i różnymi metodami, [AP96, P97, FI99, SE00, EKS01, FI01, OO01, BSK04, CEJ04, XMJ05, BLM06, JM07, LT08].

Zastosowanie funkcji Trefftza do rozwiązywania zagadnień odwrotnych ma bogatą historię. Należałoby tu wymienić prace Jirouška, Herrery, Zielińskiego, Wróblewskiego i wielu innych autorów. Są one wyszczególnione w bibliografii.

Podane poniżej przykłady rozwiązań zagadnień identyfikacji warunków brzegowych różnią się metodyką od prac przytoczonych autorów. Jednocześnie dobrze ilustrują zalety wykorzystanej w nich pośredniej metody Trefftza.

5.1.1. Rozwiązania uzyskane bez dzielenia obszaru na elementy skończone

Poniżej przedstawiono rozwiązania zagadnień stacjonarnych wymiany ciepła, uzyskane przy rozważaniu badanego obszaru jako całości.

B.1: Kwadrat, problem brzegowy

W pracy [H99] rozważono zagadnienie testowe. Było to zagadnienie brzegowe, w którym określono rozkład temperatury $T(x, y)$ w kwadracie jednostkowym. We współrzędnych bezwymiarowych rozkład ciepła w obszarze opisuje równanie La-

place'a (3.4). Na dwóch bokach kwadratu przyjęto warunki Dirichleta, zaś na dwóch pozostałych – warunki Neumanna:

$$T(0, y) = 100 \quad \text{dla } y \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$T(1, y) = 100y \quad \text{dla } y \in \langle 0, 1 \rangle,$$

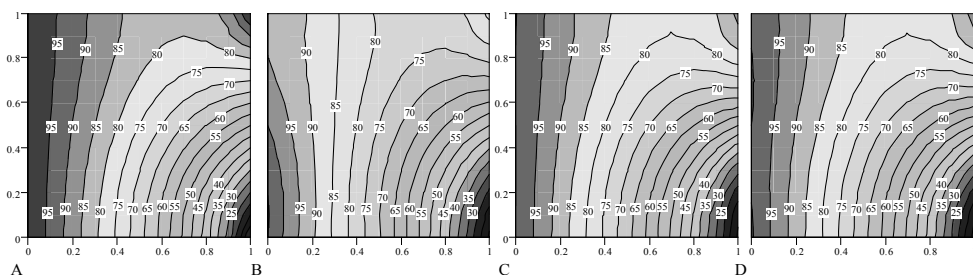
$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(x, 0)} = 0 = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(x, 1)} \quad \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Zagadnienie to rozwiązano metodą najmniejszych kwadratów. Rozwiązanie aproksymowano kombinacją liniową T-funkcji, przedstawionych wzorami (3.6). Funkcjonał celu miał tu postać (4.15), gdzie $p=1$, α oraz g_3 były równe zero, zaś wagę w przyjęto równą jeden.

Na rysunku 5.1 przedstawiono wykresy poziomicowe, przedstawiające rozwiązanie dokładne i jego aproksymację w całym obszarze kwadratu wielomianem $v(x, y)$ stopnia czwartego, szóstego i ósmego. Oznaczało to uwzględnienie w kombinacji liniowej T-funkcji, opisujących aproksymatę rozwiązania, odpowiednio 9, 13 i 17 T-funkcji (pomijano funkcję G_0 , która jest równa zero).

Wyniki obliczeń porównano z rozwiązaniem dokładnym. Ma ono postać, [S74]:

$$T(x, y) = 100 - 50x - \frac{400}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{\sinh(2k+1)\pi x}{\sinh(2k+1)\pi} \cos(2k+1)\pi y.$$



Rys. 5.1. Zagadnienie proste – identyfikacja temperatury wewnątrz obszaru: A – rozwiązanie dokładne, B – aproksymacja wielomianem stopnia czwartego, C – aproksymacja wielomianem stopnia szóstego, D – aproksymacja wielomianem stopnia ósmego

Błąd aproksymacji ε , liczony zgodnie ze wzorem:

$$\varepsilon = \frac{\|v - T\|_{L^2}}{\|T\|_{L^2}} \cdot 100\%,$$

gdzie:

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 \int_0^1 [f(x,y)]^2 dx dy \right)^{1/2},$$

był dla wielomianu $v(x,y)$ stopnia czwartego równy ok. 3,8%, dla wielomianu stopnia szóstego – ok. 0,9%, zaś dla wielomianu stopnia ósmego – ok. 0,8%. Wyniki te znajdują swoje potwierdzenie na rysunku 5.1.

B.2: Ścianka dwuwarstwowa

W pracy [H99] rozwiązano zagadnienie odwrotne w obszarze prostokąta bez podziału na elementy skończone, rozważając problem wyznaczenia rozkładu temperatury w trójwarstwowej przegrodzie, oddzielającej przepływający w wąskim kanale freon-11 od otoczenia laboratoryjnego. Przegroda składała się z folii o grubości 0,0001016 m, powleczonej bardzo cienką warstwą ciekłych kryształów, na które nałożono warstwę szkła o grubości 0,06 m. Folia była jednocześnie źródłem ciepła ogrzewającym płyn przepływający w kanale, [H99].

Funkcje opisujące temperaturę i własności szkła oznacza się dolnym indeksem G (tzn. temperatura – $T_G(x,y)$, współczynnik przewodzenia ciepła – λ_G); funkcje opisujące temperaturę i własności folii oznacza się dolnym indeksem F (tzn. temperatura – $T_F(x,y)$, współczynnik przewodzenia ciepła – λ_F). Przyjęto, że na powierzchniach $x = 0$ oraz $x = L$ przegroda jest izolowana cieplnie od otoczenia. Jak wykazały wstępne badania, temperaturę szkła można było przyjąć równą temperaturze powietrza, tzn. $T_G(x,0) \approx T_{pow}$. Na powierzchni oddzielającej szkło od folii (na warstwie ciekłych kryształów) założono równość temperatur i strumieni ciepła, obliczanych po obu stronach tych powierzchni. Temperatura na tej powierzchni była znana z pomiaru (kolor ciekłych kryształów przeliczono na wartości liczbowe temperatury, [H99]). Oznaczono ją jako $T_{zm}(x)$. Miała ona postać zbioru wartości.

Sytuację ilustruje rysunek 5.2, na którym zaznaczono przekrój przez rozważaną przegrodę. Rysunek ma charakter poglądowy i nie odwzorowuje proporcji rzeczywistych.

W wyniku przyjętych założeń zagadnienie opisano następującym zestawem równań i warunków:

$$\lambda_F \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_F(x,y) + q_V = 0, \quad (5.1)$$

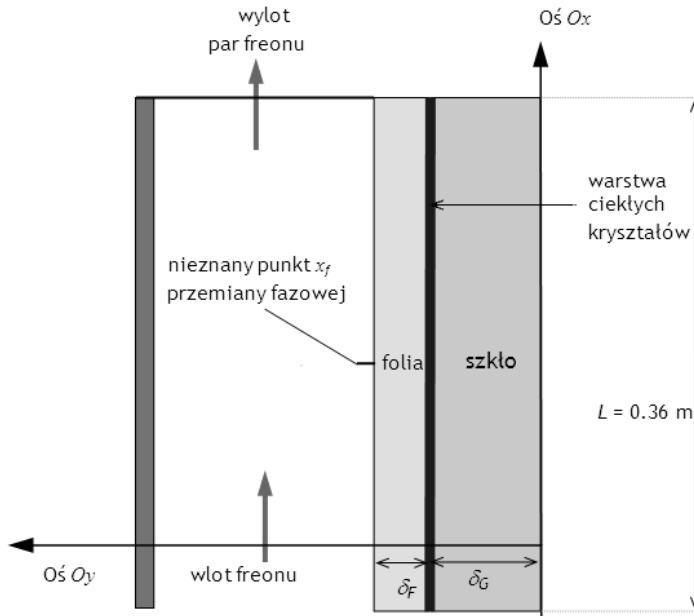
$$\lambda_G \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_G(x,y) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial T_F(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{oraz} \quad \left. \frac{\partial T_F(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial T_G(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{oraz} \quad \left. \frac{\partial T_G(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,$$

$$T_F(x, \delta_G) = T_G(x, \delta_G) = T_{zm}(x).$$

$$-\lambda_F \left. \frac{\partial T_F(x, y)}{\partial y} \right|_{y=\delta_G} = \lambda_G \left. \frac{\partial T_G(x, y)}{\partial y} \right|_{y=\delta_G}.$$



Rys. 5.2. Przekrój poprzeczny przegrody

Temperatura wewnątrz folii, na skutek grzania jej przez źródło ciepła o stałej wydajności q_V , cechowała się symetrią względem podłużnej osi środkowej folii, $y = \delta_G + 0,5\delta_F$. Oznacza to, że temperatura folii, wynikająca tylko z istnienia źródła ciepła, czyli rozwiązanie szczególne $T_F^{sz}(x, y)$ równania (5.1), musiało spełniać warunek:

$$T_F^{sz}(x, \delta_G) = T_F^{sz}(x, \delta_G + \delta_F).$$

Rozwiązanie szczególne $T_F^{sz}(x, y)$ zostało przyjęte w postaci:

$$T_F^{sz}(x, y) = \frac{-y^2 + (2\delta_G + \delta_F)y - \delta_G^2 - \delta_F\delta_G}{2\lambda_F} q_V.$$

Brak było natomiast warunku dotyczącego temperatury folii na brzegu $y = \delta_G + \delta_F$, tzn. na ścianie kanału, w którym płynął freon-11.

Rozwiązanie ogólne równania (5.1) aproksymowano kombinacją liniową T-funkcji:

$$T_F^{og}(x, y) \approx \theta_F(x, y) = \sum_{n=0}^N c_n W_n(x, y),$$

gdzie W_n oznacza ciąg funkcji F_n i G_n , por. (3.6). Stąd funkcja, opisująca w przybliżeniu temperaturę w folii, miała postać:

$$T_F(x, y) \approx T_F^{sz}(x, y) + \theta_F(x, y)$$

Nieznane współczynniki c_n , $n = 1, 2, \dots, N$, wyznaczono minimalizując funkcjonal:

$$\begin{aligned} I_F = & \int_0^L [\theta_F(x, \delta_G) - T_{zm}(x)]^2 dx + \\ & + \int_0^L \left[\lambda_F \frac{\partial \theta_F(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\delta_G} + \frac{q_V \delta_F}{2} + \lambda_G \frac{\partial T_G(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\delta_G} \right]^2 dx + \\ & + \int_{\delta_G}^{\delta_G + \delta_F} \left[\left(\frac{\partial \theta_F(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_F(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=L} \right)^2 \right] dy. \end{aligned}$$

W funkcjonale tym rozwiązanie szczególne pojawia się tylko w drugiej całce (mówiącej o dopasowaniu rozwiązania przybliżonego do warunku Neumanna na brzegu $y = \delta_G$) jako człon $q_V \delta_F / 2$ (pochodna funkcji T_F^{sz} względem zmiennej y dla $y = \delta_G$). W pierwszej całce, opisującej dopasowanie tego rozwiązania do wartości temperatury zmierzonych na tymże brzegu, zachodzi bowiem $T_F^{sz}(x, \delta_G) = 0$, zaś w trzeciej, opisującej błąd przybliżenia na brzegach $y = 0$ i $y = L$ pochodna rozwiązania szczególnego względem zmiennej x zeruje się.

Do obliczeń wykorzystano dane eksperymentalne zaczerpnięte z pracy [C97], przedstawione w tablicy 5.1.

TABLICA 5.1. Temperatura ciekłych kryształów $T_{zm}(x)$

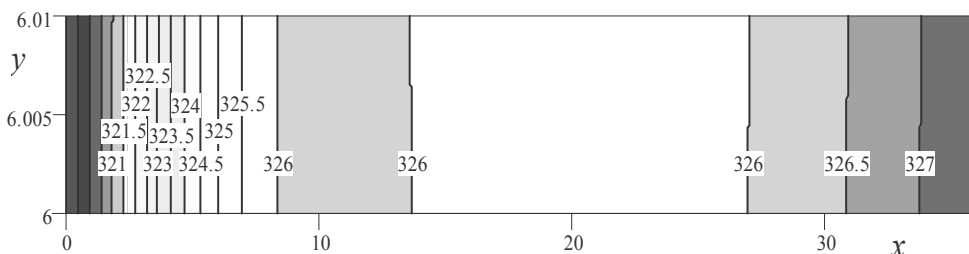
x , [m]	$T_{zm}(x)$, [K]	x , [m]	$T_{zm}(x)$, [K]
0,00	317,95	0,10	325,65
0,01	320,95	0,15	326,15
0,02	321,65	0,20	325,65
0,03	322,15	0,23	325,15
0,04	323,15	0,25	326,15
0,05	324,25	0,30	326,35
0,06	324,95	0,35	327,15
0,07	326,05		

Ponadto przyjęto następujące dane: $T_{wlot} = 317,15$ K, $T_{wylot} = 326,15$ K, $\lambda_F = 8,3$ W/(m K), $\lambda_G = 0,710$ W/(m K), $q_V = 1,24803 \cdot 10^7$ W/m³.

Jeśli funkcja $T_{zm}(x)$ dana jest w postaci zbioru danych dyskretnych, całkę $\int_0^L (\theta_F(x, \delta_G) - T_{zm}(x))^2 dx$ występującą w funkcjonale I_F należy zastąpić sumą.

Dotyczy to również odpowiedniej całki w funkcjonale I_G służącym wyznaczeniu rozkładu temperatury w szkłe (funkcjonału tego, z uwagi na jego oczywistą postać, nie wypisano).

Aproksymację rozkładu temperatury w folii dla 16 funkcji F_n i 14 funkcji G_n przedstawiono na rysunku 5.3.

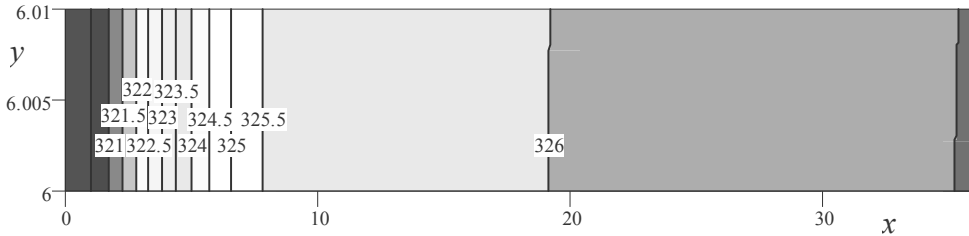


Rys. 5.3. Przybliżony rozkład temperatury w folii, uzyskany na podstawie danych opisanych w tabelcy 5.1 jako $T_{zm}(x)$ (jednostki na osiach podane są w centymetrach)

Dane przyjęte do obliczeń obarczone były nieznany błądem. Aby je wygładzić, opisano je funkcją:

$$\hat{T}_{zm}(x) = 3,6467x + 317,9237 + 8,14255(1 - \exp(-36,8489x)),$$

której parametry zostały dobrane w oparciu o kryterium najmniejszych kwadratów. Dla $\hat{T}_{zm}(x)$ przyjętej jako $T_{zm}(x)$, uzyskano aproksymowany tą samą liczbą T-funkcji rozkład temperatury w folii przedstawiony na rysunku 5.4.



Rys. 5.4. Przybliżony rozkład temperatury w folii, uzyskany na podstawie danych wygładzonych $\hat{T}_{zm}(x)$ (jednostki na osiach podane są w centymetrach)

B.3: Walec kołowy

W pracy [F99] rozważano zagadnienie odwrotne w nieskończenie długim walcu kołowym przy temperaturze brzegu zmieniającej się wg nieznanej funkcji $T_0(t)$. Poszukiwane pole temperatury spełnia równanie różniczkowe w bezwymiarowych współrzędnych $\xi = r/R$ i $\tau = at/R^2$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad \tau > 0, \xi \in (0,1),$$

z warunkami:

$$T(1, \tau) = T_0(\tau) = ?, \quad \tau > 0,$$

$$T(\xi, 0) = 0, \quad \xi \in (0,1),$$

gdzie a jest współczynnikiem wyrównywania temperatury (dyfuzyjnością termiczną), r – zmienna promieniowa, zaś R opisuje promień walca.

Przyjmując $T(1, \tau) = T_0(\tau) = A\tau$, gdzie A jest dodatnią stałą, otrzymuje się rozwiązanie tego zagadnienia w postaci:

$$T(\xi, \tau) = A \left(\tau - \frac{1 - \xi^2}{4} \right) + 2A \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 \tau} \frac{J_0(\alpha_n \xi)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)},$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(\alpha) = 0$.

Znajomość rozwiązania dokładnego pozwala wygenerować „pomiar” temperatury w punkcie wewnętrznym $0 < \xi^* < 1$ w chwilach $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$, tzn. wyznaczyć wartości wewnętrznych odpowiedzi $T_m = T(\xi^*, \tau_m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Do wyznaczenia temperatury na poboczniczy walca (dla $\xi = 1$) wykorzystane zostaną T-funkcje g_n , określone wzorem (3.39). Tak więc przyjmuje się, że:

$$T(\xi, \tau) \cong \theta^k(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^N c_n^k g_n(\xi, \tau),$$

dla $k\Delta\tau < \tau < (k+1)\Delta\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Nieznane współczynniki c_n^k wyznacza się minimalizując funkcjonal celu:

$$I^{(k)} = \int_0^1 \left(\theta^{(k)}(\xi, k\Delta\tau) - \theta^{(k-1)}(\xi, k\Delta\tau) \right)^2 d\xi + \sum_m \left(\theta^{(k)}(\xi^*, \tau_m) - T_m \right)^2,$$

gdzie $\theta^{-1}(\xi, 0) = T(\xi, 0) = 0$, całka opisuje zgodność temperatury początkowej w przedziale $(k+1)$ -szym i temperatury końcowej w przedziale k -tym, zaś sumowanie odbywa się po wszystkich m , takich że $k\Delta\tau \leq \tau_m \leq (k+1)\Delta\tau$, dla $k = 0, 1, 2, \dots$. Występująca w funkcjonale skończona suma wynika z tego, że dane są wartości temperatury w punkcie ξ^* w skończonej liczbie chwil czasu. W kolejnych przedziałach czasowych za przybliżenie nieznanymi wyrażen $T(1, \xi)$

i $\frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}$ przyjmuje się $\theta^{(k)}(1, \tau)$ i $\frac{\partial \theta^{(k)}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}$, tzn.:

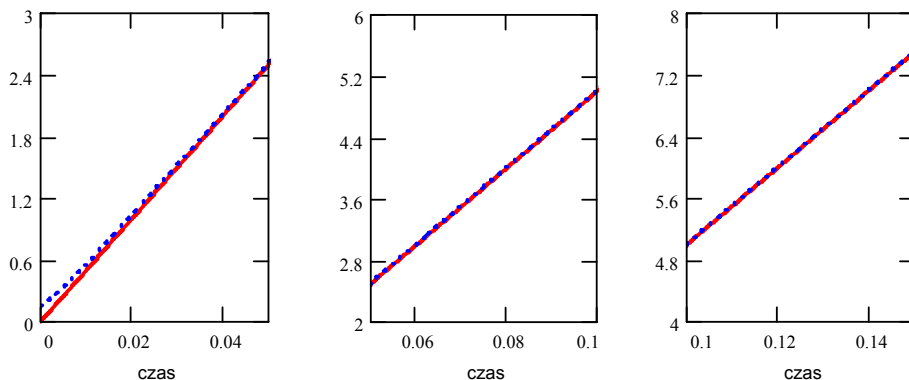
$$T(1, \tau) \cong \theta^{(k)}(1, \tau) \quad \text{i} \quad \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \cong \frac{\partial \theta^{(k)}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1},$$

dla $k\Delta\tau < \tau \leq (k+1)\Delta\tau$.

Do obliczeń przyjęto $R = 0,02$ m, $a = 14,4 \cdot 10^{-7}$ m²/s, $A = 50$ (założenie to ma sens fizyczny jedynie dla krótkich czasów), $\Delta\tau = 0,05$ Fouriera (wtedy długość przedziału czasowego w sekundach $\Delta t = \frac{R^2}{a} \Delta\tau = 1,3(8)$). Obliczenia wykonano

dla trzech pierwszych przedziałów czasowych, tzn. dla $k = 0, 1, 2$. Punkt pomiarowy znajdował się w odległości 2 mm od brzegu (bezwymiarowo $\xi^* = 0,9$). Symulowane pomiary dokonywano ze stałym krokiem czasowym $\tau_m - \tau_{m-1} = 0,005$, co oznacza, że do obliczeń przyjęto po 10 pomiarów temperatury w każdym z rozważanych trzech przedziałów czasu.

Wyniki na brzegu walca ($\xi = 1$) dla aproksymacji temperatury jedenastoma funkcjami Trefftza przedstawiono na rysunku 5.5. Widoczna jest duża zgodność rozwiązania dokładnego i przybliżonego.



Rys. 5.5. Wykres dokładnej i przybliżonej temperatury dla $\xi = 1$ i bezwymiarowego czasu z przedziału a) $(0, \Delta\tau)$, b) $(\Delta\tau, 2\Delta\tau)$, c) $(2\Delta\tau, 3\Delta\tau)$. Linia ciągła – rozwiązanie dokładne, linia przerywana – rozwiązanie przybliżone

B.4: Kwadrat, metoda Becka

W pracy [K01] do rozwiązania zagadnienia odwrotnego w kwadracie jednostkowym zastosowano metodę Trefftza oraz metodę współczynników wrażliwości (metodę Becka, [B79, BBC85, KN95]). Temperatura w kwadracie opisana była równaniem Laplace'a, zaś warunki brzegowe przyjęto następujące:

$$\begin{aligned}
 T(0, y) &= 1 \quad \text{dla } y \in \langle 0, 1 \rangle, \\
 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(1, y)} &= 0 \quad \text{dla } y \in \langle 0, 1 \rangle, \\
 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x, 0)} &= 0 \quad \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Na brzegu $y = 1$ warunek brzegowy nie był znany, a do wyznaczenia była wartość strumienia ciepła na tym brzegu, tzn.:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x, 1)} = q(x) = ? \quad \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle. \tag{5.3}$$

Rozwiązanie ściśle $T_{ex}(x, y)$ tego zagadnienia dla warunku na brzegu $y = 1$ określonym jako $\frac{\partial T}{\partial y} + T \Big|_{(x,1)} = 0$ jest znane, [CJ59]:

$$T_{ex}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_k \cosh(\mu_k(1-x)) \cos(\mu_k y)}{(\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k) \cosh \mu_k}.$$

gdzie μ_k , $k=1,2,\dots$, to rozwiązania równania $\operatorname{ctg} \mu = \mu$. Korzystając z tego rozwiązania wygenerowano wewnętrzne odpowiedzi temperaturowe na linii $y = \delta$ w jednym, dwóch lub trzech punktach, położonych wewnątrz kwadratu.

W dalszych rozważaniach wykorzystano metodę Becka, [B79, BBC85, KN95]. W tym celu podzielono brzeg $y = 1$, na którym był nieznany warunek strumieniowy, na J części. Ze względów numerycznych były to części o równych długościach. W każdym przedziale przyjęto stały strumień q_j . Wtedy warunek (5.3) przyjął postać:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1} = q_j, \quad \frac{j-1}{J} \leq x \leq \frac{j}{J}, \quad \text{dla } x \in \langle 0,1 \rangle \quad \text{oraz } j=1,\dots,J.$$

Funkcję opisującą temperaturę traktuje się teraz jako funkcję zależną od zmiennych x, y oraz q , gdzie $q \in \{q_j\}_{j=1}^J$, tzn. $T(x, y) = \theta(x, y, q_1, \dots, q_J)$. Następnie funkcję θ rozwija się w szereg Taylora względem $q_j = 0$, $j=1,\dots,J$ i pomija się wyrazy od drugiej pochodnej włącznie. Stąd:

$$\tilde{T}(x, y) = T^*(x, y) + \sum_{j=1}^J Z^j(x, y) q_j, \quad (5.4)$$

gdzie oznaczono:

$$\tilde{T}(x, y) = \theta(x, y, q_1, \dots, q_J),$$

$$T^*(x, y) = \theta(x, y, 0, \dots, 0),$$

$$Z^j(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y, q_1, \dots, q_J)}{\partial q_j} \Big|_{q_j=0} \quad \text{dla } j=1,\dots,J.$$

Funkcje $Z^j(x, y)$ nazywa się współczynnikami wrażliwości; opisują one wpływ nieznanych strumieni ciepła q_j na brzegu $y = 1$ na wartość temperatury w dowolnym punkcie rozważanego obszaru.

Wstawiając funkcję opisaną związkiem (5.4) do równania Laplace'a i do warunków (5.2) i grupując wyrażenia zawierające funkcje T^* oraz Z^j otrzymuje się równanie:

$$\frac{\partial^2 T^*(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*(x, y)}{\partial y^2} + \sum_{j=1}^J \left(\frac{\partial^2 Z^j(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z^j(x, y)}{\partial y^2} \right) q_j = 0,$$

z warunkami brzegowymi i warunkiem opisującym nieznaną strumień ciepła na brzegu:

$$T^*(0, y) + \sum_{j=1}^J Z^j(0, y) q_j = 1 \quad \text{dla } y \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\left. \frac{\partial T^*(x, y)}{\partial x} + \sum_{j=1}^J \frac{\partial Z^j(x, y)}{\partial x} q_j \right|_{(1, y)} = 0 \quad \text{dla } y \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\left. \frac{\partial T^*(x, y)}{\partial y} + \sum_{j=1}^J \frac{\partial Z^j(x, y)}{\partial y} q_j \right|_{(x, 0)} = 0 \quad \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\left. \frac{\partial T^*(x, y)}{\partial y} + \sum_{k=1}^J \frac{\partial Z^k(x, y)}{\partial y} q_k \right|_{(x, 1)} = q_j = ? \quad \frac{j-1}{J} \leq x \leq \frac{j}{J}, \quad j = 1, \dots, J.$$

Rozseparowując to zagadnienie ze względu na T^* oraz Z^j , [B79, BBC85, KN95], otrzymuje się dwa odrębne zagadnienia: jedno dla funkcji T^* , drugie dla współczynników wrażliwości Z^j . Pierwsze z nich opisane jest równaniem Laplace'a i warunkami (5.2) oraz (5.3), z tym, że ten ostatni przyjmuje postać:

$$\left. \frac{\partial T^*(x, y)}{\partial y} \right|_{(x, 1)} = 0 \quad \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Drugie zagadnienie, ze względu na dowolność q_j , opisane jest dla $j = 1, \dots, J$ następująco:

$$\frac{\partial^2 Z^j(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z^j(x, y)}{\partial y^2} = 0,$$

$$Z^j(0, y) = 0 \quad \text{dla } y \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\left. \frac{\partial Z^j(x, y)}{\partial x} \right|_{(1, y)} = 0 \quad \text{dla } y \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\left. \frac{\partial Z^j(x, y)}{\partial x} \right|_{(x, 0)} = 0 \quad \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\left. \frac{\partial Z^j(x, y)}{\partial y} \right|_{(x, 1)} = \begin{cases} 1 & x \in \left(\frac{j-1}{J}, \frac{j}{J} \right) \\ 0 & x \notin \left(\frac{j-1}{J}, \frac{j}{J} \right) \end{cases}, \quad \frac{j-1}{J} \leq x \leq \frac{j}{J}.$$

Oba zagadnienia, dla funkcji T^* oraz Z^j , rozwiązuje się w zbiorze funkcji $v = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i$, gdzie ψ_i należą do zbioru T-funkcji dla równania Laplace'a (por. część 3.2.1), minimalizując funkcjonały typu (4.15). Następnie nieznane strumienie ciepła na J odcinkach brzegu $y = 1$ wyznacza się, minimalizując funkcjonał:

$$I(q_1, \dots, q_J) = \sum_{i=1}^I (U_i - T(x_i, y_i))^2 = \sum_{i=1}^I \left(U_i - T^*(x_i, y_i) - \sum_{j=1}^J Z^j(x_i, y_i) q_j \right)^2,$$

gdzie U_i to wyniki pomiaru temperatury w i -tym punkcie na linii $y = \delta$ (tutaj – wartości wygenerowane z rozwiązania ścisłego). Podstawiając obliczone strumienie ciepła oraz funkcje T^* oraz Z^j do wzoru (5.4) otrzymuje się rozwiązanie rozważanego problemu.

Na rysunku 5.6 przedstawiono porównanie rozwiązania ścisłego z rozwiązaniem przybliżonym zagadnienia odwrotnego, uzyskanym przy znajomości pomiarów temperatury w jednym, dwóch i trzech punktach wewnętrznych w kwadracie.

Przy znajomości rozwiązania ścisłego błąd względny rozwiązania przybliżonego można obliczyć z w normie L^2 ze wzoru:

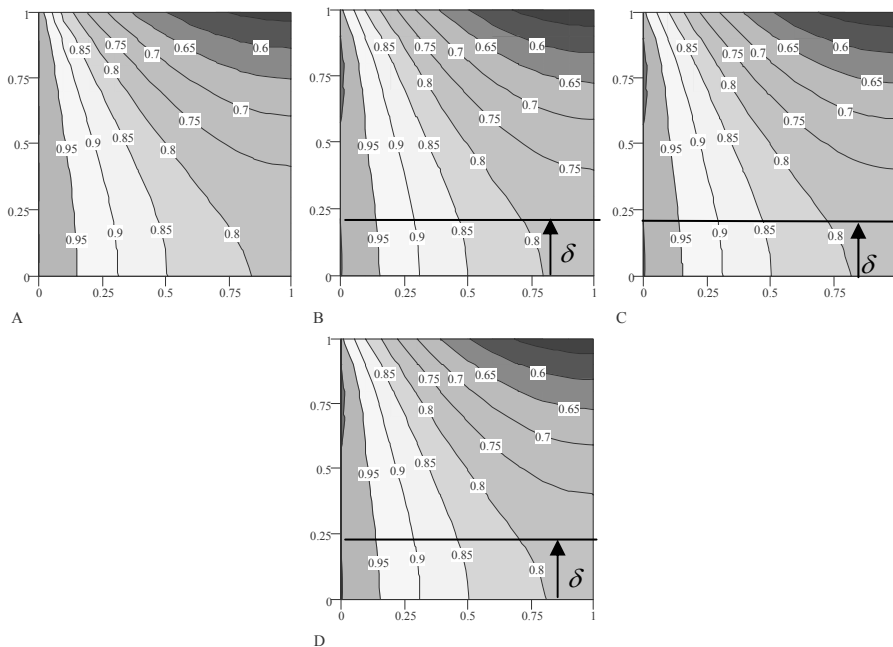
$$\delta_L = \frac{\|T - T_{ex}\|_{L^2}}{\|T_{ex}\|_{L^2}} \cdot 100\%,$$

gdzie:

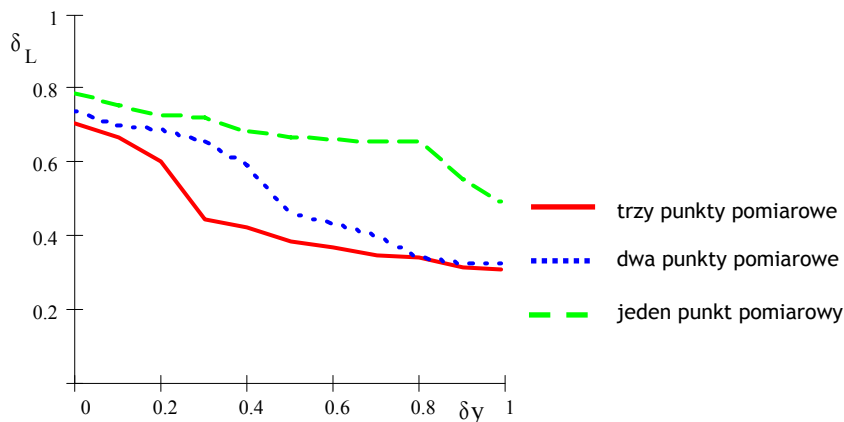
$$\|f(x, y)\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y))^2 dx dy.$$

Błąd względny w rozważanym przypadku zależy od liczby punktów pomiarowych oraz od odległości δ od osi $0x$. Jego wartość przedstawiono na rysunku 5.7.

Obszerna analiza tego zagadnienia zawarta jest w pracy [K01].



Rys. 5.6. Porównanie izoterm uzyskanych z rozwiązania analitycznego (A) z rozwiązaniem numerycznym metodą Becka-Treffitza w przypadku jednego (B), dwóch (C) i trzech (D) pomiarów temperatury na linii $y = \delta$



Rys. 5.7. Wpływ położenia δ i liczby punktów pomiarowych na dokładność rozwiązania (w procentach)

5.1.2. Rozwiązania uzyskane z podziałem obszaru na elementy skończone

Rozwiązanie zagadnień odwrotnych, uzyskane bez podziału badanego obszaru na elementy skończone, jest możliwe tylko w obszarach o prostych kształtach. W przypadku bardziej złożonych kształtów obszaru, szczególnie gdy rozważane jest zagadnienie niestacjonarne, liczba T-funkcji, potrzebnych do opisu rozwiązania przybliżonego, gwałtownie rośnie, co powoduje pogorszenie uwarunkowania macierzy kwadratowych, pojawiających się na różnych etapach rozwiązywania, oraz zwiększa błąd obciążeń. W efekcie zbyt duże zwiększenie liczby T-funkcji nie polepsza jakości rozwiązania, a nawet może ją – ze względów numerycznych – pogorszyć.

Poniżej przedstawione są przykłady ilustrujące ideę wykorzystania metody elementów skończonych, z funkcjami Trefftza jako funkcjami bazowymi, do rozwiązywania zagadnień odwrotnych. W omówionych niżej przykładach pokazano zastosowania MES dla zagadnień opisanych równaniem Laplace'a; w dalszych rozdziałach pokazane będą zastosowania tej metody także do zagadnień opisanych innymi równaniami.

B.5: Kwadrat, podział na cztery elementy

W monografii [CF00] rozważany był ustalony rozkład temperatury w kwadracie. Do rozwiązania zagadnienia odwrotnego w kwadracie zastosowano podział obszaru $\Omega = \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$ na 4 duże elementy skończone z 8 węzłami, usytuowanymi w narożach i na środkach boków kwadratu. Jako funkcje bazowe w metodzie elementów skończonych przyjęto kombinację T-funkcji dla równania Laplace'a (funkcji harmonicznych, por. (3.6)). Szczegóły uzyskania funkcji bazowych pokazano w przykładzie B8. Metoda elementów skończonych (MES) z T-funkcjami wykorzystanymi do budowy funkcji bazowych w skrócie nazywana będzie MEST.

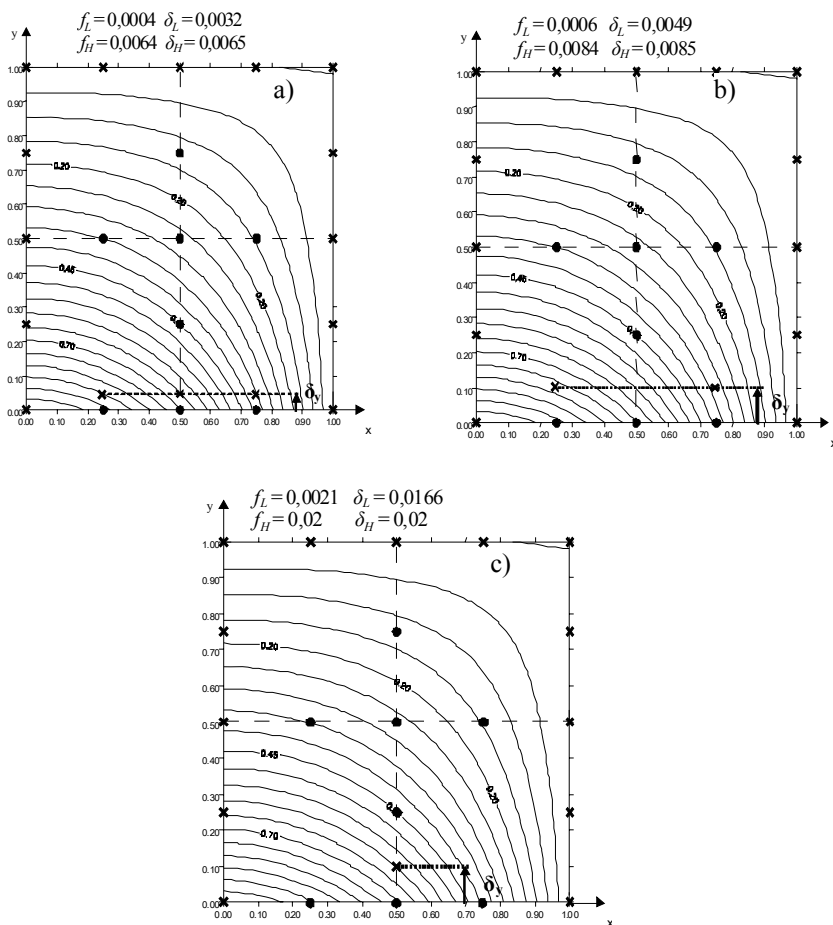
Warunki brzegowe typu Dirichleta zadano na brzegach $x = 0$, $x = 1$ i $y = 1$, zgodnie z wartościami funkcji:

$$T(x, y) = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{\pi(1-y)}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \quad (5.5)$$

Według tej funkcji dokonano także symulacji pomiarów temperatury w punktach wewnętrznych kwadratu, usytuowanych na linii $y = \delta_y$. Na rysunku 5.8 zaznaczono na krzyżykiem wewnętrzne punkty pomiarowe.

Na rysunku 5.8 przedstawiono także analizę wpływu położenia odległości δ_y i liczby punktów wewnętrznych, w których mierzono temperaturę, na dokładność

rozwiązania zagadnienia odwrotnego, czyli na nieznaną wartość temperatury na brzegu $y = 0$, tzn. na $T(x, 0)$.



Rys. 5.8. Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego dla: a) trzech, b) dwóch, c) jednego wewnętrznego punktu pomiarowego

Rozwiązanie analityczne (5.5) porównano z rozwiązaniem numerycznym w normie L^2 i H^1 :

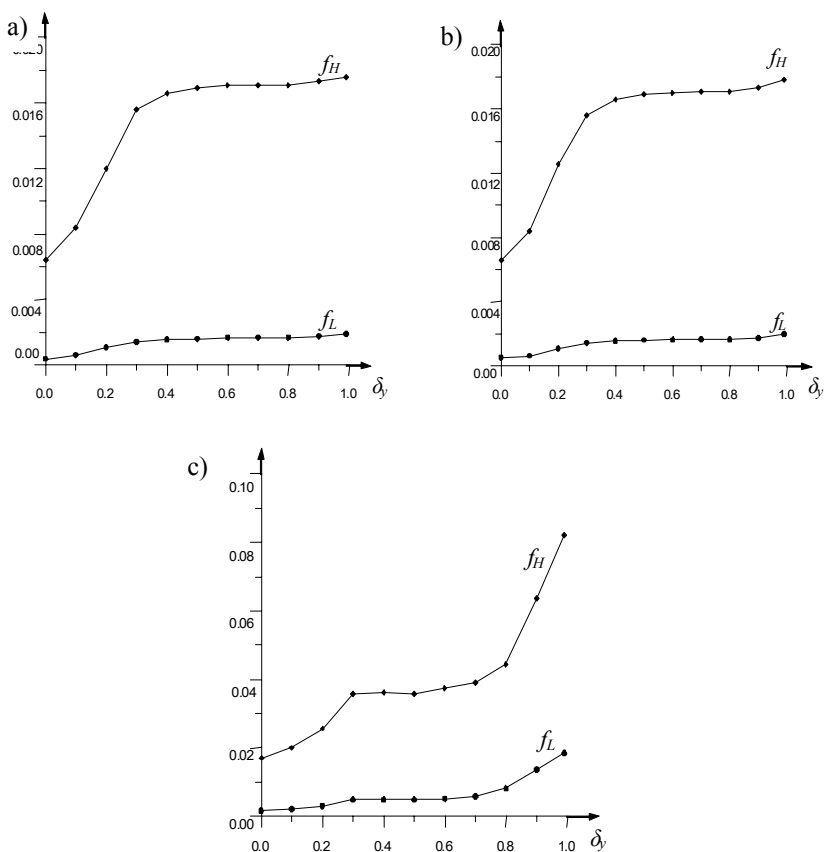
$$f_L = \|T - \tilde{T}\|_{L^2}, \quad \delta_L = \frac{\|T - \tilde{T}\|_{L^2}}{\|T\|_{L^2}},$$

$$f_H = \|T - \tilde{T}\|_{H^1}, \quad \delta_H = \frac{\|T - \tilde{T}\|_{H^1}}{\|T\|_{H^1}},$$
(5.6)

gdzie przez $\tilde{T}$ oznaczono rozwiązanie przybliżone, a normy określone są wzorami:

$$\|T\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} T(x,y)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|T\|_{H^1} = \left(\int_{\Omega} (T(x,y)^2 + (\nabla T(x,y))^2) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.7)$$

Przedstawione na rysunku 5.8 wykresy, jak i normy (5.6), świadczą o dużej dokładności rozwiązania zagadnienia odwrotnego z zastosowaniem harmonicznych funkcji bazowych. Wykres błędów f_L i f_H w normie L^2 i H^1 jako funkcji położenia wewnętrznych punktów pomiarowych przedstawiono na rysunku 5.9.



Rys. 5.9. Wpływ położenia δ_y i liczby wewnętrznych punktów pomiarowych na dokładność rozwiązania zagadnienia odwrotnego; a) 3 punkty, b) 2 punkty, c) 1 punkt pomiarowy

Wartości norm błędów względnych δ_L i δ_H zestawiono w tabelicy 5.2. Oczywiście najmniejsze błędy względne otrzymano dla $\delta_y = 0,0$.

TABLICA 5.2. Normy względne δ_L i δ_H jako funkcje położenia δ_y wewnętrznych punktów pomiarowych

δ_y	3 punkty pomiarowe		2 punkty pomiarowe		1 punkt pomiarowy	
	δ_H	δ_L	δ_H	δ_L	δ_H	δ_L
0,00	0,00651	0,00301	0,00672	0,00420	0,01740	0,01290
0,10	0,00855	0,00491	0,00855	0,00499	0,02035	0,01686
0,20	0,01221	0,00871	0,01282	0,00871	0,02615	0,02414
0,30	0,01588	0,01132	0,01588	0,01140	0,03633	0,03839
0,40	0,01689	0,01235	0,01689	0,01235	0,03694	0,03879
0,50	0,01720	0,01267	0,01720	0,01274	0,03643	0,03847
0,60	0,01740	0,01330	0,01730	0,01290	0,03816	0,04053
0,70	0,01740	0,01330	0,01740	0,01314	0,03969	0,04615
0,80	0,01740	0,01338	0,01740	0,01298	0,04518	0,06475
0,90	0,01761	0,01401	0,01761	0,01369	0,06462	0,10853
0,99	0,01791	0,01504	0,01811	0,01559	0,08365	0,14597

Błędy względne świadczą o niewielkiej wrażliwości rozwiązania zagadnienia odwrotnego na położenie wewnętrznych punktów pomiarowych. Przy jednym punkcie pomiarowym dla ekstremalnego położenia wewnętrznego punktu pomiarowego procentowy błąd względny rozwiązania w normie H^1 jest równy $\delta_H = 8,365\%$. Tak więc przyjęcie T-funkcji jako funkcji bazowych metody elementów skończonych dało – przy danych nieobarczonych błędami – bardzo dobre wyniki.

Obszerna analiza tego problemu zawarta jest w monografii [CF00] i pracy [CF02].

B.6: Kwadrat, cztery elementy, analiza ciągłości rozwiązania między elementami

W pracy [CFG07a] rozważano zagadnienie odwrotne rozkładu temperatury w kwadracie, wykorzystując MEST oraz badając rozwiązania w zależności od tego, czy na granicach pomiędzy elementami funkcja opisująca temperaturę była ciągła czy też dopuszczano jej nieciągłość. Przybliżonego rozwiązania poszukiwano

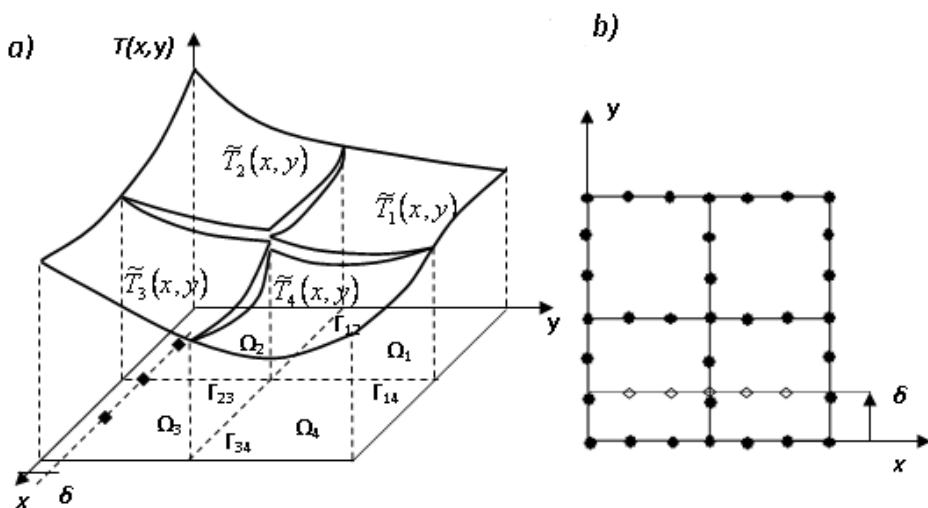
w zbiorze funkcji $v = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i$, gdzie funkcje ψ_i należą do zbioru T-funkcji dla rów-

niania Laplace'a (por. część 3.2.1). W przypadku dopuszczenia nieciągłości pomiędzy elementami w celu znalezienia przybliżonego rozwiązania zagadnienia minimalizowano funkcjonal:

$$I(T) = \sum_{ij} \left[\int_{\Gamma_{ij}} (q_{n+} - q_{n-})^2 d\Gamma_{ij} + \alpha_{ij} \int_{\Gamma_{ij}} (T_+ - T_-)^2 d\Gamma_{ij} \right], \quad \alpha_{ij} > 0, \quad (5.8)$$

gdzie Γ_{ij} to granica pomiędzy elementem i -tym i j -tym lub część brzegu obszaru, zaś T_+ i T_- (q_{n+} i q_{n-}) to wartości temperatury (strumienia ciepła) po obu stronach granicy pomiędzy elementami, lub wartość wyliczona w elemencie i wartość brzegowa temperatury (strumienia ciepła). Funkcjonał ten zbudowany jest analogicznie do funkcjonału (4.20).

Procedura znalezienia rozwiązania zagadnienia odwrotnego polega na rekonstrukcji nieznanego warunku brzegowego na podstawie zmierzonych lub zadanych wartości temperatury na pewnej linii wewnątrz kwadratu (zagadnienie ciągłe) lub w wybranych punktach na tej linii (zagadnienie dyskretne). Linia ta jest narysowana na rysunku 5.10, gdzie także pokazano podział kwadratu na 12-węzłowe elementy skończone i przedstawiono ideę nieciągłości rozwiązania pomiędzy elementami. Jako funkcje kształtu przyjęto T-funkcje (wielomiany harmoniczne, por. (3.6)).



Rys. 5.10. a) przybliżony rozkład temperatury przy jej nieciągłości pomiędzy elementami; b) węzły (czarne punkty) i punkty pomiaru temperatury (białe punkty)

Aby znaleźć przybliżone rozwiązanie zagadnienia, rozważa się dwa funkcjonały:

- dla punktowo ciągłej temperatury pomiędzy elementami:

$$I(T) = \sum_{ij} \int_{\Gamma_{ij}} (q_{n+} - q_{n-})^2 d\Gamma_{ij}, \quad (5.9)$$

- dla temperatury nieciągłej pomiędzy elementami (przyjęto $\alpha_{ij} = \alpha = \text{const}$, por. (5.8)):

$$Q(T) = \sum_{ij} \left[\int_{\Gamma_{ij}} (q_{n+} - q_{n-})^2 d\Gamma_{ij} + \alpha \int_{\Gamma_{ij}} (T_+ - T_-)^2 d\Gamma_{ij} \right], \quad \alpha > 0. \quad (5.10)$$

W węzłach brzegowych rozwiązanie przybliżone spełnia zadane warunki.

Wartości temperatury w punktach wewnętrznych i na brzegu wyliczono, posługując się następującym wzorem, opisującym temperaturę w kwadracie:

$$T_e(x, y) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{2}(1-y)\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Dokładność rozwiązania przybliżonego $\tilde{T}$, czyli $\delta\tilde{T}$, badano w normie H^1 . Badano także dokładność obliczenia strumienia ciepła δq_n , produkcji entropii $\delta\sigma_c$ oraz dyssypacji energii $\delta\Psi_c$. Opisujące je wzory mają postać następującą:

- dokładność rozwiązania przybliżonego:

$$\delta\tilde{T} = \left(\frac{\int_{\Omega} \left[(\tilde{T} - T_e)^2 + \left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x} - \frac{\partial T_e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y} - \frac{\partial T_e}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega}{\int_{\Omega} \left[T_e^2 + \left(\frac{\partial T_e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_e}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega} \right)^{1/2} \cdot 100\%, \quad (5.11)$$

- dokładność obliczenia strumienia ciepła:

$$\delta q_n = \left(\frac{\int_{\Gamma_w} \left[\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial n} \right)_+ - \left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial n} \right)_- \right]^2 d\Gamma}{\int_{\Gamma_w} \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial n} \right)_+ + \left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial n} \right)_- \right) \right]^2 d\Gamma} \right)^{1/2} \cdot 100\%, \quad (5.12)$$

- dokładność obliczenia produkcji entropii:

$$\delta\sigma_c = \frac{\left(\int_{\Gamma_w} \left[\left(\frac{1}{\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \right)_+ - \left(\frac{1}{\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \right)_- \right]^2 d\Gamma \right)^{1/2}}{\left(\int_{\Gamma_w} \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \right)_+ + \left(\frac{1}{\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \right)_- \right) \right]^2 d\Gamma \right)^{1/2}} \cdot 100\%, \quad (5.13)$$

- dokładność obliczenia dyssypacji energii:

$$\delta\Psi_c = \frac{\left(\int_{\Gamma_w} \left[\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \ln(\tilde{T}) \right)_+ - \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \ln(\tilde{T}) \right)_- \right]^2 d\Gamma \right)^{1/2}}{\left(\int_{\Gamma_w} \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \ln(\tilde{T}) \right)_+ + \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \ln(\tilde{T}) \right)_- \right) \right]^2 d\Gamma \right)^{1/2}} \cdot 100\%. \quad (5.14)$$

Znaki plus i minus oznaczają strony granic pomiędzy elementami, a Γ_w jest sumą wszystkich granic pomiędzy sąsiadującymi elementami.

Przykład numeryczny przeliczono dla funkcjonu $Q(T)$, określonego wzorem (5.10). Minimalizuje on nieciągłości temperatury na Γ_w pomiędzy węzłami. Wartości normy $\delta\tilde{T}$ jako funkcji parametru (wagi) α i odległości δ punktów pomiaru temperatury od osi $0x$ ($\delta=0$ oznacza zagadnienie proste) dla zagadnienia ciągłego i nieciągłego przedstawiono w tablicy 5.3.

W przypadku MEST punktowo ciągłej waga α praktycznie nie wpływa na rozwiązanie dla $\delta < 0,5$ (punkty zadaną temperaturą są wówczas w pierwszej – licząc od osi $0x$ – warstwie elementów). W przypadku MEST nieciągłej mała wartość parametru α na ogół zwiększa niedokładności temperatury, podczas gdy duża – zmniejsza. Duże wartości normy $\delta\tilde{T}$ dla $\alpha=0,001$ i $\delta=0,2$, jak również dla $\alpha=1000$ i $\delta=0,6$ wynikają z nieciągłości temperatury dla $x=0,5$ i zbyt małej liczby funkcji bazowych.

Badanie norm δq_n , $\delta\sigma_c$ i $\delta\Psi_c$ dla różnych wartości parametru α jako funkcja odległości δ od brzegu $y=0$ w przypadku MEST ciągłej i nieciągłej przy 12 funkcjach bazowych prowadzi do podobnych wyników jak badanie normy $\delta\tilde{T}$.

Zwiększenie liczby węzłów i funkcji bazowych w elemencie do 24 radykalnie zwiększa dokładność obliczeń. Normy δq_n , $\delta\sigma_c$ i $\delta\Psi_c$, które w przypadku elementów 12-węzłowych osiągały – poza sytuacjami wskazanymi także w tablicy 5.3 dla normy $\delta\tilde{T}$ – wartości na ogół nieco poniżej 0,05%, w przypadku elementów 24-

węzłowych osiągały wartości o dwa rzędy mniejsze. Wyniki dotyczące dokładności obliczenia produkcji entropii przedstawiono w tablicy 5.4.

TABLICA 5.3. Norma $\delta\tilde{T}$ jako funkcja odległości δ od brzegu $y=0$ (12 funkcji bazowych w elemencie). Dane z pomiaru temperatury – dokładne

δ	MEST punktowo ciągła			MEST nieciągła		
	$\alpha = 0,001$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1000$	$\alpha = 0,001$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1000$
0,00	0,0042	0,0042	0,0042	0,0207	0,0141	0,0161
0,10	0,0046	0,0046	0,0047	0,0852	0,0153	0,0168
0,20	0,0081	0,0081	0,0081	45,7378	0,0208	0,0204
0,30	0,0184	0,0184	0,0178	0,1805	0,0376	0,0333
0,40	0,0199	0,0199	0,0115	0,3494	0,0603	0,0749
0,50	0,3471	0,3471	0,3471	0,1856	0,0383	0,0523
0,60	0,1459	0,1460	0,5723	0,7475	1,2637	15,2711
0,70	0,1655	0,1656	0,3076	0,3954	0,1711	0,3990
0,80	0,1479	0,1479	0,2220	0,1931	0,0786	0,1323
0,90	0,3426	0,3425	0,3153	0,2029	0,0753	0,3492
0,95	0,7568	0,7527	0,2762	0,1052	0,0679	0,5004
0,99	0,2097	0,2101	0,0958	0,3669	0,1173	0,7800

TABLICA 5.4. Błąd obliczenia produkcji entropii $\delta\sigma_e$ jako funkcja odległości δ od brzegu $y=0$ (24 funkcje bazowe w elemencie). We wzorze (5.13) Γ_w jest przekrojem $y=0,5$

δ	MEST punktowo ciągła			MEST nieciągła		
	$\alpha = 0,001$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1000$	$\alpha = 0,001$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1000$
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00038	0,00000	0,00000
0,20	0,00000	0,00000	0,00000	0,00048	0,00004	0,00000
0,30	0,00000	0,00000	0,00000	0,00006	0,00000	0,00000
0,40	0,00000	0,00000	0,00000	0,00040	0,00000	0,00000
0,50	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,60	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

cd. tablicy 5.4

δ	MEST punktowo ciągła			MEST nieciągła		
	$\alpha = 0,001$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1000$	$\alpha = 0,001$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1000$
0,70	0,00000	0,00000	0,00000	0,00030	0,00000	0,00001
0,80	0,00000	0,00000	0,00000	0,00004	0,00000	0,00000
0,90	0,00000	0,00000	0,00000	0,00006	0,00003	0,00000
0,95	0,00000	0,00000	0,00000	0,00428	0,00004	0,00001
0,99	0,00000	0,00000	0,00000	0,00002	0,00001	0,00000

Rozważane zagadnienie odwrotne identyfikacji nieznanej temperatury na brzegu $y = 0$ rozwiązano także przy wykorzystaniu klasycznej MES. Rozważono podział kwadratu na 16, 36 i 144 czterowęzłowe elementy z funkcjami bazowymi $\{1, x, y, xy\}$. Jako kryterium porównawcze dla wyników osiągniętych przy stosowaniu MES i MEST przyjęto liczbę węzłów na brzegu lub wewnątrz badanego kwadratu (por. tablica 5.5).

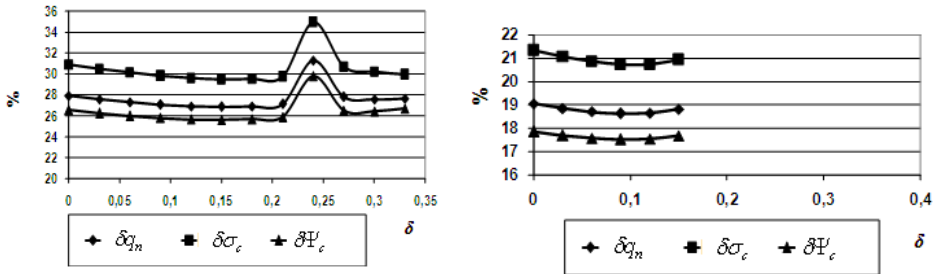
TABLICA 5.5. Liczba elementów w MES i MEST dla porównania wyników obliczeń, dotyczących zagadnienia odwrotnego w kwadracie

Całkowita liczba elementów		Liczba węzłów brzegowych		Liczba węzłów wewnętrznych		Kryterium podobieństwa
MEST 12 T-funkcji	MES	MEST 12 T-funkcji	MES	MEST 12 T-funkcji	MES	
4	16	24	16	9	9	Liczba węzłów wewnętrznych
4	36	24	24	9	25	Liczba węzłów brzegowych
MEST 24 T-funkcje	MES	MEST 24 T-funkcje	MES	MEST 24 T-funkcje	MES	Liczba węzłów brzegowych
4	144	48	48	21	121	

Wykorzystanie MES do rozwiązania zagadnienia odwrotnego dawało zadowalające wyniki tylko w przypadku, gdy wyniki pomiarów temperatury znajdowały się w pierwszym rzędzie elementów licząc od osi Ox . Umieszczenie danych temperaturowych w dalszych rzędach elementów powodowało gwałtowne pogorszenie wyników, a błąd obliczeń sięgał 300% nawet dla danych dokładnych. Innymi słowy, gdy odległość δ była większa niż bok kwadratowego elementu skończonego, pojawiały

się niestabilności obliczeń numerycznych niezależnie od wielkości użytych elementów. Paradoksalnie, im większa była liczba elementów skończonych, tym szybciej pojawiały się niestabilności obliczeń. Normy δq_n , $\delta \sigma_c$ i $\delta \Psi_c$ obliczone wzdłuż przekroju $x = 0,5$ jako funkcje odległości δ od brzegu $y = 0$ dla MES z 16 i 36 elementami przedstawiono na rysunku 5.11. Sytuacja dla MES z 144 elementami jest podobna do tej, która dotyczy 36 elementów, jedynie wartości norm są mniejsze.

Zaburzenie symulowanych pomiarów temperatury wykazało, iż jest ono silnie wzmacniane w trakcie obliczeń. Błąd obliczeń jest tym większy, im większa jest odległość δ od brzegu $y = 0$. Dla otrzymania zadowalających wyników niezbędne jest wygładzenie danych wejściowych, wykorzystując do tego celu kombinację liniową T-funkcji dobraną do danych przy zastosowaniu np. metody najmniejszych kwadratów.



Rys. 5.11. Normy δq_n , $\delta \sigma_c$ i $\delta \Psi_c$ jako funkcje odległości δ od brzegu $y = 0$ obliczone wzdłuż przekroju $x = 0,5$. Obliczenia – MES z 16 (po lewej) i 36 (po prawej) elementami

Obszerna analiza tego problemu zawarta jest w pracy [CFG07a], a porównanie MEST i MES z wnioskami analogicznymi do przedstawionych wyżej dokonano także m.in. w monografii [M09].

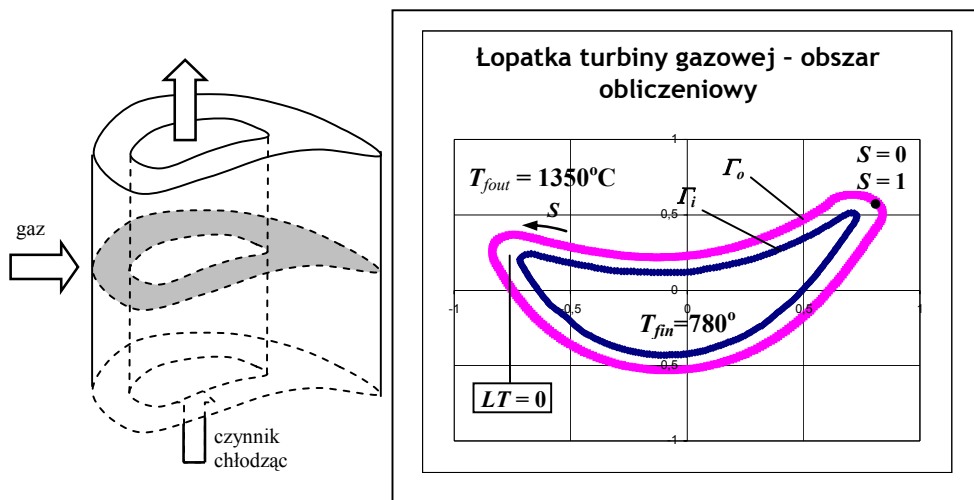
B.7: Łopátka turbiny, MEST

W pracy [CFG07] rozważano stacjonarne pole temperatury w łopátce turbiny cieplnej. Łopátkę, jak również pole temperatur w jej otoczeniu, przedstawiono na rysunku 5.12. Badane zagadnienie sformułowano następująco:

Znaleźć rozkład temperatury na wewnętrznym brzegu Γ_i przekroju łopátki turbiny, $T|_{\Gamma_i}$ i rozkład wartości współczynnika przejmowania ciepła na tym brzegu, $\alpha|_{\Gamma_i}$, przy warunku:

$$T_0 - \varepsilon_T \leq T(s) \leq T_0 + \varepsilon_T, \quad (5.15)$$

gdzie ε_T jest dokładnością pomiaru temperatury.



Rys. 5.12. Szkic łopátki turbiny cieplnej i obszar obliczeniowy

Rozkład wartości współczynnika przejmowania ciepła na zewnętrznej powierzchni łopátki, $\alpha|_{\Gamma_o}$, jest znany. Ponadto znane są temperatury otoczenia zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni łopátki, które dla uproszczenia przyjęto stałe, T_{fout} i T_{fin} .

Parametr s , stanowiący argument funkcji $T(s)$ w nierówności (5.15), jest znormalizowaną współrzędną opisującą długość zewnętrznego i wewnętrznego obrysu przekroju łopátki turbiny. Punkt początkowy i końcowy tej współrzędnej zaznaczono czarną kropką na krawędzi spływu (rys. 5.12). Normalizacji dokonano w taki sposób, że tylko dla $s=0$ ($s=1$) punkty na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni odpowiadają sobie. Ponieważ podział obu konturów następował ze stałym krokiem, a liczba kroków była dla obu konturów taka sama, pozostałe punkty o tych samych wartościach parametru s są nieco przesunięte względem siebie. W przypadku wartości ekstremalnych temperatur to przesunięcie wyraża się bezwymiarowo jako 0,02. Jest ono widoczne na rysunkach 6.3 i 6.4, na których przedstawiono wyniki obliczeń współczynników przejmowania ciepła, które także były wyznaczone dla rozważanej łopátki.

Rozwiązanie było poszukiwane w klasie funkcji spełniających równanie Laplace'a. Innymi słowy, rozważany był następujący problem:

Dane:

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = 0, \text{ tzn. } L = \nabla \cdot (\lambda \nabla),$$

$$T_{fout} = 1350^\circ\text{C}, \quad T_{fin} = 780^\circ\text{C},$$

$\alpha|_{\Gamma_o}$ – znany współczynnik przejmowania ciepła na powierzchni zewnętrznej łopátki,

$$T_0 - \varepsilon_T \leq T(s) \leq T_0 + \varepsilon_T,$$

$$T_0 = 1100^\circ\text{C},$$

ε_T – tolerancja pomiaru temperatury, nieprzekraczająca 1°C .

Poszukiwane:

$T|_{\Gamma_i} = ?$ – temperatura powierzchni wewnętrznej,

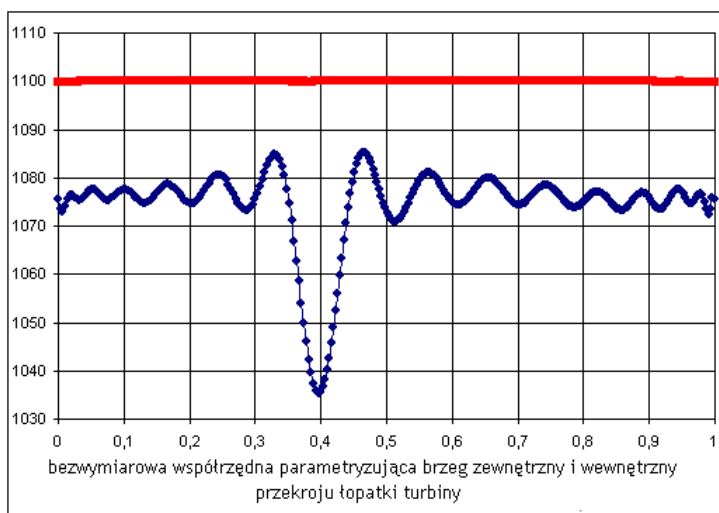
$\alpha|_{\Gamma_i} = ?$ – współczynnik przejmowania ciepła na powierzchni wewnętrznej łopatki.

W przedstawionych tu rozważaniach omówiono tylko zagadnienie identyfikacji temperatury. Problem dotyczący identyfikacji rozkładu współczynnika przejmowania ciepła na powierzchni wewnętrznej łopatki przedstawiono w rozdziale szóstym, przykład W.3.

Aby określić pole temperatury wewnątrz i na brzegu Γ_i łopatki, minimalizuje się funkcjonal $Q(T)$ określony wzorem (5.10), przy czym aproksymaty pola temperatury poszukuje się w zbiorze funkcji $v = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i$, gdzie funkcje ψ_i należą do zbioru

T-funkcji dla równania Laplace'a (por. część 3.2.1).

Aby uprościć opis numeryczny zagadnienia, temperaturę zewnętrzną powierzchni łopatki aproksymowano pięcioma, a temperaturę powierzchni wewnętrznej – 30 wielomianami Bernsteina, [L53].



Rys. 5.13. Rozkład temperatury na zewnętrznym (linia górna) i wewnętrznym (linia dolna) brzegu przekroju łopatki turbiny, $^\circ\text{C}$

Do rozwiązania zagadnienia wykorzystano MEST. Obszar przekroju łopatki turbiny podzielono na 99 prostokątnych 16-węzłowych elementów (12 węzłów na brzegach i 4 wewnątrz elementu). Jako funkcje bazowe wykorzystano 16 T-funkcji. Liczba niewiadomych wynosiła łącznie 4×297 .

Obliczenia przeprowadzono przy wykorzystaniu programu, napisanego w języku Fortran F90. Wyniki obliczeń dotyczące rozkładu temperatury na zewnętrznym i wewnętrznym brzegu łopatki przedstawiono na rysunku 5.13.

Falowanie temperatury wewnętrznej powierzchni łopatki to rezultat przybliżenia temperatury tej powierzchni zbyt małą liczbą wielomianów Bernsteina. Jednak dzięki temu liczba niewiadomych do wyznaczenia także była stosunkowo niewielka.

Obszerna analiza tego problemu zawarta jest w pracy [CFG07]. Podobne zagadnienia rozważano w pracach [CFR01, C04a].

B.8: Kwadrat, trzy rodzaje MEST, regularyzacja energetyczna

Stosowana w rozwiązywaniu kilku wcześniejszych zagadnień metoda elementów skończonych z funkcjami Trefftza (MEST) ma bogatą historię. Jej prekursorem jest J. Jiroušek, który w pracach [JL77, J78] zapoczątkował to podejście do metody elementów skończonych. Była ona wówczas zastosowana do równań biharmonicznych, a następnie pojawiły się rozwiązania wykorzystujące MEST w płaskich zagadnieniach dotyczących elastostatyki, [JT82], płyt Kirchhoffa, [JN90, P90], cienkich powłok, [JV91], grubych płyt, [P92], osiowo-symetrycznych zagadnień mechaniki ciała stałego, [WJ93], a także zagadnień niestacjonarnych przewodzenia ciepła, [H99, CF00, M04a, M04b], drgań belek i płyt, [M04, M05, AGM08, M09], zagadnień elastokinytyki, [M07, GMM09] i innych.

W stosowanych tutaj odmianach MEST zakłada się, że aproksymacja rozwiązania T-funkcjami $\{\psi_i\}$ w j -tym elemencie, Ω_j , ma postać, por. (4.11):

$$u^j = \sum_{k=1}^N a_k^j \psi_k. \quad (5.16)$$

W zagadnieniu B.6 wspomniano o dwóch rodzajach MEST – ciągłej i nieciągłej. W pracach [CFG07, GLM08, M09] wspomniano jeszcze o metodzie bezwęzłowej (ang. *substructuring*).

Ciągła i nieciągła MEST wymaga wprowadzenia funkcji bazowych. Nie jest to konieczne dla metody bezwęzłowej.

Rozważmy najpierw ciągłą MEST. W tym przypadku zakłada się, że rozwiązanie jest ciągłe we wspólnych węzłach pomiędzy elementami. Procedurę otrzymania funkcji bazowych opisano m.in. w [C99, CF00]. Zakłada się, że w elemencie Ω_j znane są wartości poszukiwanej funkcji $u_1^j, \dots, u_N^j$ w węzłach $P_1, \dots, P_N$. Funkcję u^j

w elemencie aproksymuje się kombinacją liniową T-funkcji, (5.16). Założenie ciągłości rozwiązania w węzłach prowadzi do zależności (z pominięciem indeksu j):

$$\Psi \mathbf{a} = \mathbf{U},$$

gdzie Ψ jest macierzą kwadratową o wyrazach $\psi_m(P_n)$, $\mathbf{a}$ to kolumna współczynników a_m , zaś $\mathbf{U}$ jest kolumną wartości funkcji u w węzłach $P_1, P_2, \dots, P_N$. Stąd:

$$\mathbf{a} = \Psi^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{U},$$

gdzie $\mathbf{V} = \Psi^{-1}$. Stąd:

$$a_m = \sum_{i=1}^N V_{mi} u_i.$$

Wstawiając a_m do (5.16) dostaje się:

$$u = \sum_{m=1}^N a_m \psi_m = \sum_{m=1}^N \left(\sum_{i=1}^N V_{mi} u_i \right) \psi_m = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{m=1}^N V_{mi} \psi_m \right) u_i = \sum_{i=1}^N \phi_i u_i,$$

gdzie:

$$\phi_i = \sum_{m=1}^N V_{mi} \psi_m$$

są funkcjami bazowymi, określonymi w elemencie Ω_j . W ten sposób funkcja u w elemencie Ω_j jest aproksymowana kombinacją liniową swoich wartości w węzłach, $P_1, P_2, \dots, P_N$.

Warunek ciągłości poszukiwanej aproksymaty rozwiązania w węzłach może być pominięty. Otrzymuje się wtedy wariant nieciągłej MEST, [CFG07]. Wówczas, aby zapewnić fizyczny sens rozwiązania, żąda się średniokwadratowej minimalizacji różnicy wartości poszukiwanej aproksymaty we wspólnych węzłach lub na wspólnych brzegach elementów, (por. zagadnienie B.6).

W przypadku bezwęzłowej MEST (*substructuring*) aproksymata w elementach Ω_j przybliżana jest zgodnie z formułą (5.16), ale kombinacja liniowa T-funkcji nie ma tu charakteru interpolacyjnego. Z tego względu żąda się średniokwadratowej minimalizacji różnicy wartości poszukiwanej aproksymaty na wspólnych brzegach elementów.

Ponadto we wszystkich wariantach MEST minimalizuje się różnicę pomiędzy wartościami przybliżonego rozwiązania lub jego pochodnej a danymi wartościami brzegowymi.

Aby poprawić jakość rozwiązania w stosunku do klasycznej MES, oprócz wykorzystania T-funkcji uwzględnia się jeszcze fizyczny aspekt zagadnienia. Zostanie on tu przedstawiony na przykładzie wymiany ciepła, [CFG07, GLM08].

W części 4.2.3 pokazano regularyzację polegającą na uwzględnieniu minimalizacji różnicy pochodnych normalnych poszukiwanego rozwiązania na granicach pomiędzy elementami (wzory (4.19) i (4.20)). Warunek ten w odniesieniu do wymiany ciepła można nazwać minimalizacją defektu strumienia ciepła i zapisać w postaci następującej:

$$J_F = \sum_{i,j} \int_{\Gamma_{ij}} (\tilde{q}_{n+} - \tilde{q}_{n-})^2 d\Gamma, \quad (5.17)$$

gdzie $\tilde{q}_{n+}$ i $\tilde{q}_{n-}$ oznaczają aproksymaty strumienia ciepła po obu stronach granicy pomiędzy elementami.

Do fizycznej regularyzacji można ponadto wykorzystać minimalizację defektu produkcji entropii:

$$J_E = \sum_{i,j} \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{\tilde{q}_{n+}}{\tilde{T}_+} - \frac{\tilde{q}_{n-}}{\tilde{T}_-} \right)^2 d\Gamma, \quad (5.18)$$

gdzie $\tilde{T}_+$ i $\tilde{T}_-$ oznaczają aproksymaty temperatury po obu stronach granicy pomiędzy elementami, lub minimalizację defektu rozproszenia energii:

$$J_D = \sum_{i,j} \int_{\Gamma_{ij}} (\tilde{q}_{n+} \ln \tilde{T}_+ - \tilde{q}_{n-} \ln \tilde{T}_-)^2 d\Gamma. \quad (5.19)$$

Przy wykorzystaniu regularyzacji energetycznej często wprowadza się wspomniane wyżej czynniki regularyzujące jako funkcje kary, ze współczynnikami wagowymi (regularyzującymi).

W celu przetestowania omówionych wyżej trzech rodzajów MEST oraz czynników regularyzacji energetycznej, w monografii [M09] przeanalizowano stacjonarne zagadnienie odwrotne wymiany ciepła w kwadracie $\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$. Jest ono opisane równaniem Laplace'a (3.4) i warunkami:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(0,y)} = h_1(y) = e^y + e^{-y} \quad \text{dla } y \in \langle 0,1 \rangle,$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(x,0)} = h_2(x) = 0 \quad \text{dla } x \in \langle 0,1 \rangle,$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(x,1)} = h_3(x) = (\cos x + \sin x)(e - e^{-1}) \quad \text{dla } x \in \langle 0,1 \rangle.$$

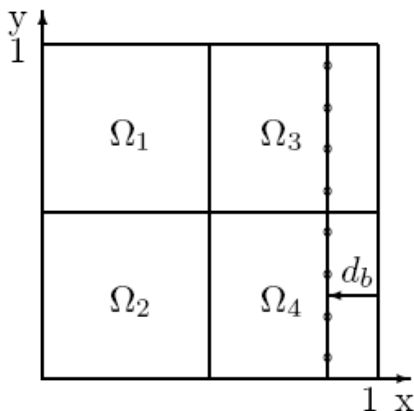
Dodatkowo założono znajomość wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych (np. wyników pomiarów) w ośmiu punktach wewnętrznych rozmieszczonych równomiernie w odległości d_b od brzegu $x = 1$:

$$T(1 - d_b, y_i) = T_i, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Temperaturę w tych punktach wyznaczono w oparciu o rozwiązanie dokładne:

$$T(x, y) = (\cos x + \sin x)(e^y - e^{-y}).$$

Zagadnienie to rozwiązano w [M09] ciągłą, nieciągłą i bezwęzłową MEST. Obszar kwadratu podzielono na 4 elementy, jak pokazano na rysunku 5.14, na którym przedstawiono także lokalizację punktów, w których znane były wewnętrzne odpowiedzi temperaturowe.

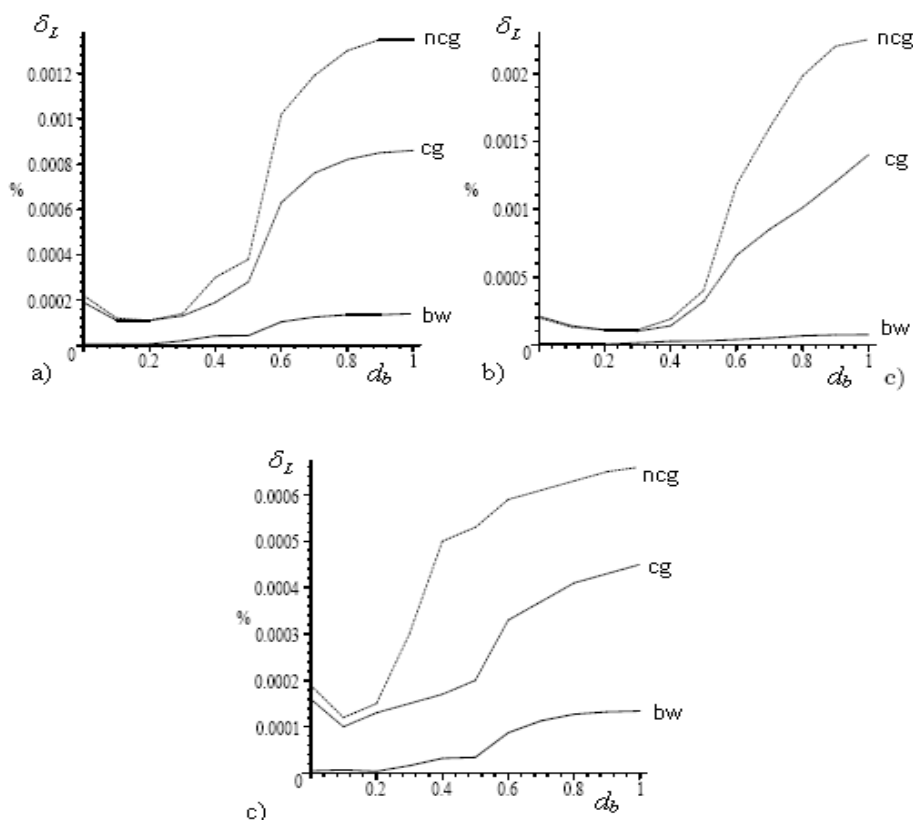


Rys. 5.14. Podział kwadratu na elementy skończone oraz lokalizacja wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych

W każdym elemencie wykorzystano 13 T-funkcji (wielomianów harmonicznych). W ciągłej i nieciągłej MEST oznaczało to uwzględnienie 12 węzłów na brzegach elementów i jednego w środku.

W każdym z trzech wariantów MEST wykorzystano wszystkie trzy metody energetycznej regularyzacji. Funkcjonał celu miał postać (4.20) z dodatkowymi członami uwzględniającymi minimalizację defektu produkcji entropii i minimalizację defektu rozproszenia energii.

Błąd aproksymacji rozwiązania obliczano wykorzystując wzory (5.6) dotyczące błędów δ_L i δ_H . Wyniki przedstawiono na rysunku 5.15.



Rys. 5.15. Błąd względny δ_L rozwiązania w zależności od odległości d_b od brzegu $x=1$ w przypadku minimalizacji defektu: a) strumienia ciepła, b) produkcji entropii, c) rozproszenia energii dla MEST bezwęzłowej (bw), ciągłej (cg) i nieciągłej (ncg)

Jak wynika z rysunku 5.15, całkowity błąd aproksymacji jest bardzo mały, nawet dla dużych wartości d_b . Wartości błędów sugerują równoważność trzech metod regularyzacji w sytuacji, gdy odległość ta nie przekracza długości boku elementu skończonego. Potwierdzają to wyniki pracy [CFG07], w której jednak metoda bezwęzłowa nie była rozważana.

Z przedstawionych wartości błędów wynika także, że MEST bezwęzłowa daje lepsze wyniki niż dwie pozostałe, gdyż błąd przybliżenia przy każdej metodzie regularyzacji jest przynajmniej o rząd wielkości mniejszy niż w przypadku MEST ciągłej i nieciągłej.

Najmniejsze błędy δ_L otrzymano stosując MEST bezwęzłową i minimalizację defektu wzrostu entropii. Analiza błędów δ_H pokazuje jednak, że nieco skuteczniejsza jest minimalizacja defektu strumienia ciepła, [M09].

5.2. ZAGADNIENIA OPISANE RÓWNANIEM PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

Zastosowanie funkcji Trefftza do badania niestacjonarnych zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła mają stosunkowo krótką historię. Pierwsze prace związane z takim podejściem do tych zagadnień pojawiły się w drugiej połowie lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku, ale związane były one z dyskretyzacją po czasie, w związku z czym dotyczyły bardziej zastosowań funkcji Trefftza do zagadnień opisanych równaniem Helmholtza niż do niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego, [JQ96, Q00].

Funkcje Trefftza dla zagadnień niestacjonarnych przewodnictwa cieplnego zostały wprowadzone dopiero w latach 1999-2000, [H99, F99, CF00]. Poniżej przedstawione są przykłady zagadnień odwrotnych, rozwiązanych przy zastosowaniu T-funkcji.

Poniżej przedstawiono kilka przykładów rozwiązań niestacjonarnych zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła. Podobnie jak w części 5.1 jako pierwszy przykład przedstawiono zagadnienie początkowo-brzegowe (zagadnienie proste).

B.9: Warstwa płaska, zagadnienie początkowo-brzegowe, stygnięcie

W pracy [G03] rozważano dwa zagadnienia początkowo-brzegowe przewodzenia ciepła w warstwie płaskiej we współrzędnych bezwymiarowych (zagadnienia stygnięcia):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (5.20)$$

$$T(0, t) = 0 = T(1, t),$$

a ponadto w pierwszym zagadnieniu przyjęto warunek początkowy w postaci:

$$T(x, 0) = T_0, \quad (5.21)$$

a w drugim w postaci:

$$T(x, 0) = bx. \quad (5.22)$$

Rozwiązanie ściśle zagadnienia z warunkiem (5.21) ma postać, [CJ59]:

$$T(x, t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{(2n+1)} \exp(-(2n+1)^2 \pi^2 t),$$

zaś dla zagadnienia z warunkiem (5.22) jest ono opisane funkcją, [CJ59]:

$$T(x, t) = \frac{2b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(n\pi x) \exp(-n^2 \pi^2 t).$$

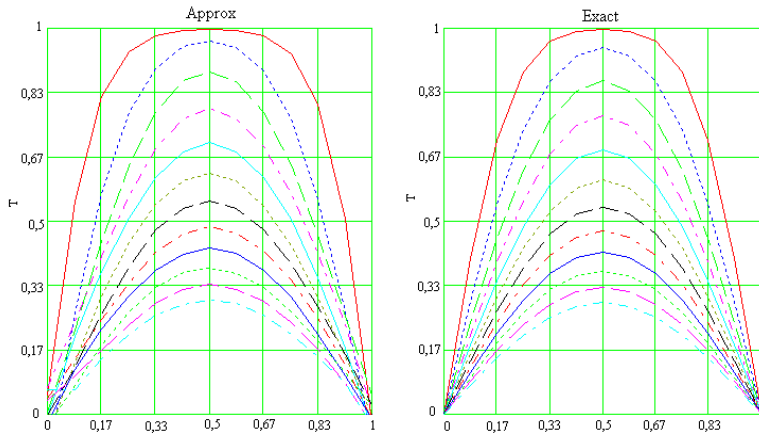
Rozwiązanie przybliżone tego zagadnienia $\theta_k(x, t)$ w k -tym przedziale czasu $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$, $k = 1, 2, \dots$, poszukiwane było w postaci kombinacji liniowej T-funkcji dla równania (5.20), określonych wzorami (4.30). Stąd:

$$\theta_k(x, t) = \sum_{n=0}^N c_n^k v_n(x, t),$$

gdzie $v_n(x, t)$ oznacza n -tą T-funkcję dla równania (5.20), Δt to długość przedziału czasu, zaś c_n^k to nieznane współczynniki tej kombinacji liniowej. Współczynniki c_n^k wyznacza się minimalizując funkcjonal błędu, [G03], (por. (4.31)):

$$I_k = \int_0^1 (\theta_k(x, 0) - \theta_{k-1}(x, \Delta \tau))^2 dx + \int_0^{\Delta \tau} (\theta_k(0, t)^2 + \theta_k(1, t)^2) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

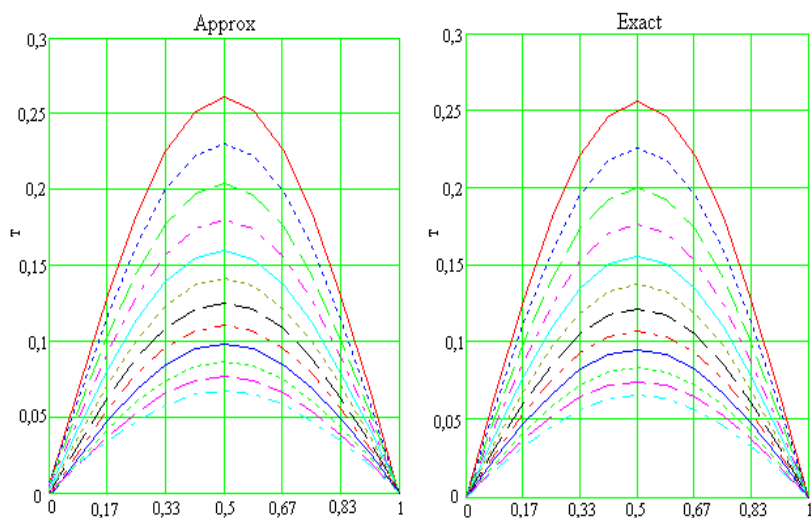
gdzie $\theta_0(x, \Delta t) = T_0$.



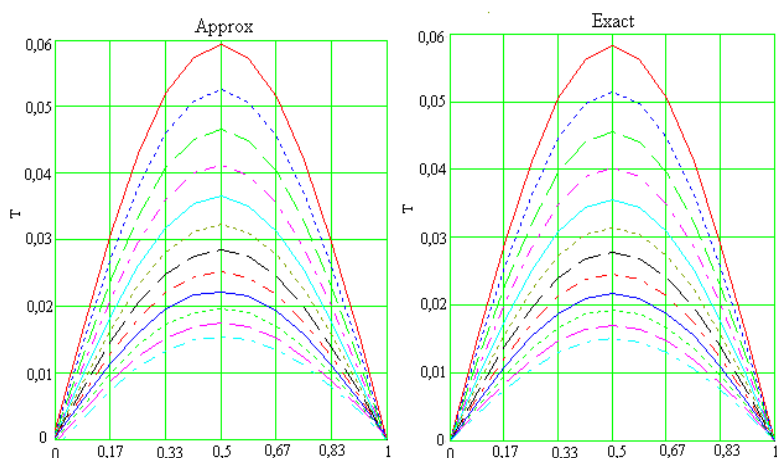
Rys. 5.16. Rozwiązanie ściśle (Exact) i przybliżone (Approx), uzyskane przy 30 T-funkcjach dla $t \in (0; 0,15)$ dla zagadnienia stygnięcia z warunkiem początkowym (5.21)

Rozwiązanie zagadnienia stygnięcia z warunkiem początkowym (5.21) dla $T_0 = 1$ przedstawiono na rysunkach 5.16, 5.17 i 5.18, zaś rozwiązanie z warunkiem (5.22) dla $b = 1,0$ – tylko na rysunku 5.18, gdyż pokazanie sytuacji w pierwszym

przedziale czasu wystarcza do oceny przybliżenia opisu procesu stygnięcia. Długość przedziałów czasu przyjęto równą $\Delta t = 0,15$ (bezwymiarowo). Na każdym rysunku zaznaczono 12 krzywych obrazujących temperaturę w kolejnych chwilach czasu od chwili $(k-1)\Delta t + 0,0125$ do końca danego przedziału czasu co 0,0125 (czas jest bezwymiarowy). Wyżej położona krzywa oznacza temperaturę w chwili bliższej początku danego przedziału czasowego.



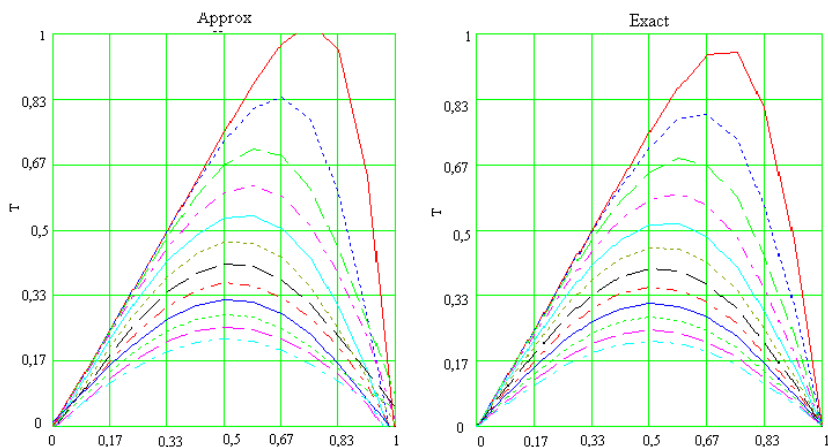
Rys. 5.17. Rozwiązanie ściśle (*Exact*) i przybliżone (*Approx*), uzyskane przy 8 T-funkcjach dla $t \in (0,15;0,30)$ dla zagadnienia stygnięcia z warunkiem początkowym (5.21)



Rys. 5.18. Rozwiązanie ściśle (*Exact*) i przybliżone (*Approx*), uzyskane przy 6 T-funkcjach dla $t \in (0,30;0,45)$ dla zagadnienia stygnięcia z warunkiem początkowym (5.21)

Największe trudności z otrzymaniem dobrej aproksymacji rozwiązania dokładnego występowały w początkowych chwilach czasu. Obrazują to rysunki 5.16 i 5.19. Do otrzymania zadowalających rezultatów konieczne było wykorzystanie 30 T-funkcji (nazywanych także wielomianami cieplnymi) do zbudowania aproksymaty rozwiązania dokładnego. W dalszych przedziałach czasu wystarczała mniejsza liczba T-funkcji.

Rysunek 5.19 wskazuje, że w dalszych przedziałach czasu stygnięcie w przypadku procesu opisanego warunkiem początkowym (5.22) przebiega w sposób podobny do przedstawionego dla procesu opisanego warunkiem (5.21).



Rys. 5.19. Rozwiązanie ściśle (*Exact*) i przybliżone (*Approx*), uzyskane przy 30 T-funkcjach dla $t \in (0; 0,15)$ dla zagadnienia stygnięcia z warunkiem początkowym (5.22)

Obszerniejsza analiza tych przykładów zawarta jest w pracy [G03].

B.10: Korpus turbiny

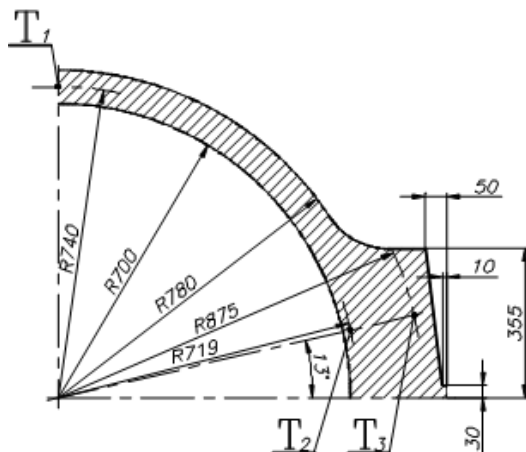
W pracy [G89] przedstawiono rozważania dotyczące identyfikacji temperatury wewnętrznej powierzchni korpusu turbiny cieplnej. Rozwiązań postawionych tam zagadnień odwrotnych szukano metodą potencjałów dla równania Helmholtza. Zagadnienie to rozważane było także w pracach [H99, F99, FMGA00] przy wykorzystaniu funkcji Trefftza.

Korpus turbiny wykonany był ze stali o parametrach fizycznych: ciepło właściwe $c_p = 576 \text{ J/(kgK)}$, gęstość $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$, współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda = 30 \text{ W/(m K)}$. Przekrój poprzeczny korpusu turbiny przedstawiono na rysunku 5.20.

Rozważono dwa przypadki.

Pierwszy przypadek dotyczył identyfikacji temperatury wewnętrznego brzegu korpusu turbiny na podstawie pomiaru temperatury w punkcie pierwszym (pomiar ozna-

czony na rysunku 5.20 jako T_1) przy założeniu, że brzeg zewnętrzny jest cieplnie izolowany, [F99]. Do obliczeń przyjęto tu opis przekroju korpusu turbiny równaniem we współrzędnych walcowych, czyli równaniem (3.32).



Rys. 5.20. Przekrój poprzeczny korpusu turbiny

Drugi przypadek dotyczył „grubej” części korpusu, gdzie dokonano dwóch pomiarów, których wyniki zaznaczono na rysunku 5.20 jako T_2 i T_3 . W tym przypadku identyfikowano temperatury obu brzegów ścianki korpusu, zewnętrznego i wewnętrznego. Jako model ścianki turbiny przyjęto tutaj warstwę płaską, [H99].

Przypadek 1

Czas rzeczywisty, w którym prowadzono pomiary temperatury T_1 , wynosił 900 s, przy czym krok czasowy był nierówny i wynosił od 45 s do 180 s, a dane były niedokładne. Dane te wygładzono i zagęszczono, przybliżając zmienność funkcji splajnami trzeciego stopnia dobranymi tak, aby w punktach pomiarowych funkcja T_1 była klasy C^2 .

Temperatura początkowa korpusu wynosiła 250°C .

Obliczenia prowadzono we współrzędnych bezwymiarowych. Jako wymiar charakterystyczny przyjęto grubość warstwy walcowej, równą 0,08 m (por. dane z rysunku 5.20). Do obliczeń przyjęto następujące dane:

- bezwymiarowa grubość warstwy równa 1,
- promień wewnętrzny: $r_w = 0,7 / 0,08 = 8,75$,
- promień zewnętrzny: $r_z = 0,78 / 0,08 = 9,75$,
- odległość od środka do punktu pomiarowego: $r^* = 0,74 / 0,08 = 9,25$,

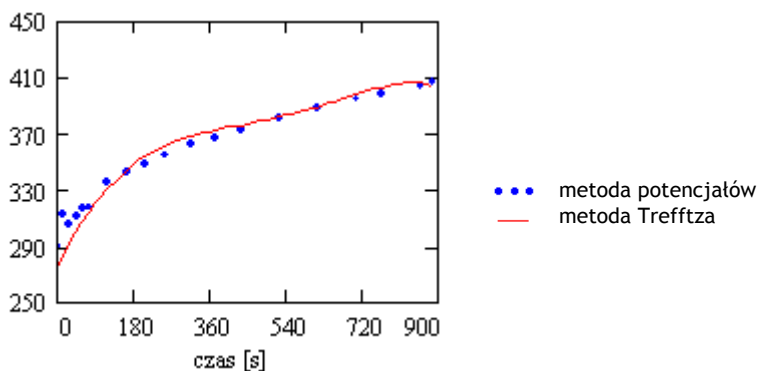
- bezwymiarowy czas (jednej sekundzie odpowiadała liczba Fouriera (Fo) o wartości 0,001031); przedziałowi czasowemu, w którym dokonywano obliczeń, czyli przedziałowi (0; 900) sekund odpowiadał bezwymiarowy przedział (0; 0,9279) Fo .

Zmierzone i skorygowane dane temperaturowe przedstawiono w tablicy 5.6.

TABLICA 5.6. Zmierzone i skorygowane wartości temperatury T_1

Czas, s	Temperatura zmierzona, °C	Temperatura skorygowana, °C	Czas, s	Temperatura zmierzona, °C	Temperatura skorygowana, °C
15	–	250,71	330	–	305,08
30	–	252,52	390	–	313,92
45	250,0	255,00	450	322,27	322,27
60	–	257,74	540	333,94	333,94
75	–	260,57	630	344,69	344,69
90	265,97	263,37	720	354,60	354,60
135	271,46	271,46	780	–	360,77
180	281,33	280,33	870	–	369,41
225	288,13	288,13	900	372,14	372,14
270	295,96	295,56			

Obliczenia temperatury wewnętrznej brzegu korpusu turbiny dokonano, wykorzystując T-funkcje pierwszego i drugiego rodzaju (wzory (3.39) i (3.42)) i stosując metodę najmniejszych kwadratów. Wyniki przedstawiono na rysunku 5.21. Porównanie ich z wynikami osiągniętymi metodą potencjałów w pracy [G89] wskazuje na dużą zgodność wyników, jakkolwiek rezultaty osiągnięte przy zastosowaniu metody Trefftza mają bardziej fizyczny charakter (por. rys. 5.21).



RYŚ. 5.21. Temperatura wewnętrznej powierzchni korpusu turbiny dla aproksymacji rozwiązania dziesięcioma T-funkcjami (po 5 pierwszego i drugiego rodzaju)

Przypadek 2

Czas rzeczywisty, w którym prowadzono pomiary temperatur T_2 i T_3 , wynosił 7200 s, przy czym krok czasowy był równy 600 s, a dane były niedokładne.

Temperatura początkowa korpusu wynosiła 100°C .

Dane do obliczeń były następujące:

- promień wewnętrzny: $r_w = 0,700$ m,
- promień zewnętrzny: $r_z = 0,925$ m,
- krok czasowy pomiarów: 600 s,
- temperatura początkowa: $T_0 = 100^\circ\text{C}$,
- odległości od środka do punktów pomiarowych, gdzie mierzono temperatury T_2 i T_3 : $r_2 = 0,719$ m, $r_3 = 0,875$ m.

Wprowadzenie współrzędnych bezwymiarowych:

$$x = \frac{r - r_w}{r_z - r_w} \quad \text{oraz} \quad \tau = \frac{at}{(r_z - r_w)^2},$$

gdzie t oznacza czas rzeczywisty, zaś $a = \lambda / \rho c_p$, pozwala utożsamiać rozpatrywany obszar z przedziałem $0 \leq x \leq 1$. Punkty, w których mierzono temperaturę z krokiem czasowym wynoszącym 0,079 (bezwymiarowo), mają współrzędne odpowiednio $x_2 = 0,084$ i $x_3 = 0,778$. Wartości pomiarów zestawione zostały w tablicy 5.7.

TABLICA 5.7. Zmierzone wartości temperatury T_2 i T_3

Czas [s]	Temperatura T_2 , $^\circ\text{C}$	Temperatura T_3 , $^\circ\text{C}$
600	358	186
1200	404	258
1800	431	311
2400	449	347
3000	460	371
3600	467	387
4200	472	397
4800	475	403
5400	477	408
6000	479	411
6600	479	412
7200	479	412

Do obliczeń wykorzystano 20 T-funkcji (wielomianów cieplnych) określonych wzorami (3.31). Współczynniki kombinacji liniowej określającej rozwiązanie przybliżone, $\theta(x, \tau)$, wyznaczono minimalizując funkcjonal błędu przybliżenia warunku początkowego i pomiarów w punktach wewnętrznych:

$$I = \int_0^1 [\theta(x, 0) - T_0]^2 dx + \sum_m [\theta(x_2, \tau_m) - T_2(\tau_m)]^2 + \sum_m [\theta(x_3, \tau_m) - T_3(\tau_m)]^2,$$

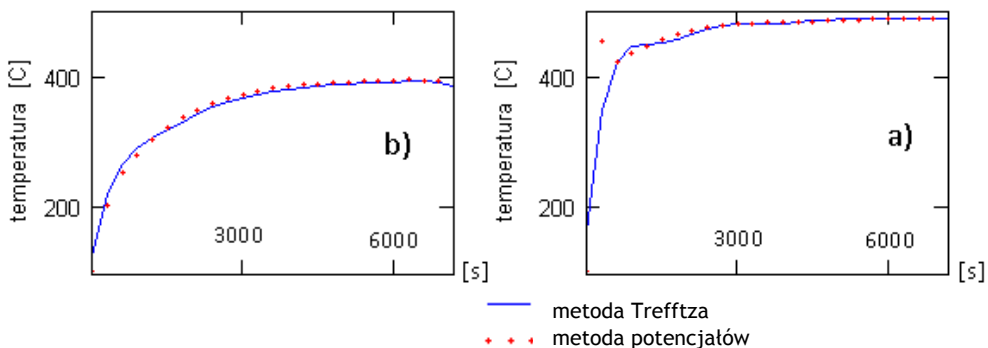
gdzie $\tau_1, \tau_2, \dots$ są kolejnymi chwilami, w których dokonywano pomiaru (ostatni pomiar miał miejsce w chwili $\tau_{12} = \Delta\tau = 0,942$). Zagadnienie rozważane było w całym przedziale $0 \leq t \leq \Delta t$.

Otrzymane rozwiązanie dla chwil czasu powyżej 1000 s silnie falowało, co było spowodowane niedokładnością danych pomiarowych. W związku z tym dane te estymowano krzywymi regresji. Metodą najmniejszych kwadratów otrzymano następujące wielomiany czwartego stopnia, estymujące wyniki pomiarów, [H99]:

$$T(x_2, t) \approx 295,7879 + 947,808t - 2008,295t^2 + 1982,268t^3 - 742,970t^4,$$

$$T(x_3, t) \approx 86,89646 + 1450,3355t - 2602,465t^2 + 2199,9075t^3 - 724,779t^4.$$

Duża wartość współczynnika korelacji wielorakiej (wynosząca 0,9999) zdaje się potwierdzać słuszność wyboru takiej postaci krzywej regresji. Dla tak „uciąglonych” i wygładzonych danych, identyfikacja temperatury na brzegu zewnętrznym dała dla 20 T-funkcji zadowalające rezultaty. Przedstawiono je na rysunku 5.22, gdzie także porównano wyniki z rezultatami otrzymanymi w pracy [G89] metodą potencjałów dla równania Helmholtza.

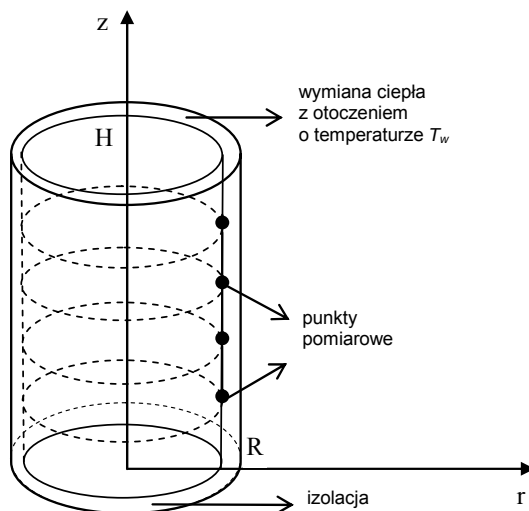


Rys. 5.22. Temperatura: a) wewnętrznego, b) zewnętrznego brzegu korpusu turbiny aproksymowana T-funkcjami ($N = 20$) oraz obliczona metodą potencjałów dla równania Helmholtza

Na rysunku 5.22 zauważa się dużą zgodność wyników uzyskanych metodą Trefftza i metodą potencjałów, jakkolwiek wielomiany cieplne zdają się posiadać przewagę przy identyfikacji temperatury brzegu wewnętrznego korpusu turbiny. W profilu temperatury obliczonej metodą potencjałów dla równania Helmholtza widoczne jest bowiem „zafalowanie” wartości temperatury dla małych czasów, dla którego trudno znaleźć wytłumaczenie fizyczne.

B.11: Walec

W pracy [S04] rozważano zagadnienie odwrotne w walcu kołowym o promieniu R i wysokości H . Rozkład warunków brzegowych i przykładowe położenie punktów pomiarowych przedstawiono na rysunku 5.23.



Rys. 5.23. Rozkład warunków brzegowych i przykładowe położenie punktów pomiarowych

Pole temperatury $T(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t})$ zapisano we współrzędnych bezwymiarowych jako $\mathcal{G}(r, z, t)$, przy czym ubezwymiarowanie przebiegało zgodnie ze wzorami:

$$r = \frac{\bar{r}}{R}, \quad r \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$z = \frac{\bar{z}}{R}, \quad z \in \left\langle 0, \frac{H}{R} \right\rangle$$

$$t = \frac{a\bar{t}}{R^2} \text{ (liczba Fouriera),}$$

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} \text{ (liczba Biota),}$$

$$\mathcal{G} = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad a = \frac{\lambda}{\rho c},$$

gdzie: T_0 – temperatura początkowa, T_w – temperatura otoczenia walca, λ – współczynnik przewodzenia ciepła, ρ – gęstość, c – ciepło właściwe, α – współczynnik przejmowania ciepła.

Bezwymiarowa temperatura $\mathcal{G}(r, z, t)$ spełniała we współrzędnych bezwymiarowych równanie (3.49) dla $(r, z) \in (0, 1) \times \left(0, \frac{H}{R}\right)$ i $t > 0$. Przyjęto dla niej następujące warunki początkowy i brzegowe:

$$\mathcal{G}(r, z, 0) = 1 \quad \text{dla } (r, z) \in (0, 1) \times \left(0, \frac{H}{R}\right),$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \right|_{(r, 0, t)} = 0 \quad \text{dla } r \in (0, 1) \text{ i } t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} + Bi \mathcal{G} \right|_{\left(r, \frac{H}{R}, t\right)} = 0 \quad \text{dla } r \in (0, 1) \text{ i } t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right|_{(0, z, t)} = 0 \quad \text{dla } z \in \left(0, \frac{H}{R}\right) \text{ i } t > 0,$$

przy czym ostatni warunek wynika z symetrycznego rozkładu temperatury względem

osi walca. $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ oznacza liczbę Biota, gdzie α to współczynnik przejmowania

ciepła. Ponadto znane są pomiary temperatury T_m^p ($p = 1, 2, \dots, P$) w P punktach wewnętrznych walca dla wybranych chwil t_m wygenerowane numerycznie z rozwiązania dokładnego, [G84]:

$$\mathcal{G}(r, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4J_1(\mu_k) \sin(\gamma_m)}{\mu_k (J_0(\mu_k))^2 + \mu_k (J_0(\mu_k))^2} \frac{J_0(r\mu_k) \cos(z\gamma_m) e^{-(\gamma_m^2 + \mu_k^2)t}}{\gamma_m + 0,5 \sin(2\gamma_m)},$$

gdzie μ_k są dodatnimi pierwiastkami równania $Bi \operatorname{ctg} \mu = \mu$, zaś γ_m są pierwiastkami równania $J_0(\gamma) Bi = J_1(\gamma) \gamma$, gdzie $J_n(z)$ to funkcje Bessela I rodzaju, rzędu n , [M64].

Poszukuje się rozkładu pola temperatury $\vartheta(r, z, t)$ i strumienia ciepła $\frac{\partial \vartheta(r, z, t)}{\partial r}$ na brzegu walca $r = 1$.

Aproksymację rozwiązania w kolejnych przedziałach czasowych $\langle (k-1)\Delta t, k\Delta t \rangle$, $k = 1, 2, \dots$ konstruuje się w postaci kombinacji liniowej T-funkcji:

$$\theta^k(r, z, t) \approx \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^n a_{np}^k \varphi_{np}(r, z, t).$$

Nieznane współczynniki tej kombinacji wyznaczane są poprzez minimalizację funkcjonału I_k dopasowania aproksymaty do warunków brzegowych, wyników pomiarów i warunku początkowego:

$$\begin{aligned} I_k = & \int_0^1 \int_0^{H/R} \left(\theta^k(r, z, (k-1)\Delta t) - \theta^{k-1}(r, z, (k-1)\Delta t) \right)^2 dr dz + \\ & + \int_0^1 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \left(\left. \frac{\partial \theta^k}{\partial z} \right|_{(r,0,t)} - \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{(r,0,t)} \right)^2 dt dr + \\ & + \int_0^1 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \left(\left. \frac{\partial \theta^k}{\partial z} \right|_{(r,1,t)} + Bi \theta^k(r, 1, t) - \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{(r,1,t)} - Bi \vartheta(r, 1, t) \right)^2 dt dr + \\ & + \int_0^{H/R} \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \left(\left. \frac{\partial \theta^k}{\partial r} \right|_{(0,z,t)} - \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right|_{(0,z,t)} \right)^2 dt dz + \sum_p \sum_m \left(\theta^k(r^*, z_p, t_m) - T_m^p \right)^2, \end{aligned}$$

gdzie r^* oznacza powierzchnię cylindryczną wewnątrz walca, na której symulowano pomiary temperatury.

Wartość błędu względnego δ_T identyfikacji temperatury w walcu dla ustalonej chwili czasu ($t = \text{const}$) policzono w normie L^2 (por. (5.6)):

$$\delta_T = \frac{\|\theta - U\|_{L^2}}{\|U\|_{L^2}}.$$

Do obliczeń przyjęto następujące wartości:

- $R = H = 0,05$ m,
- $\lambda = 42$ W/m²,

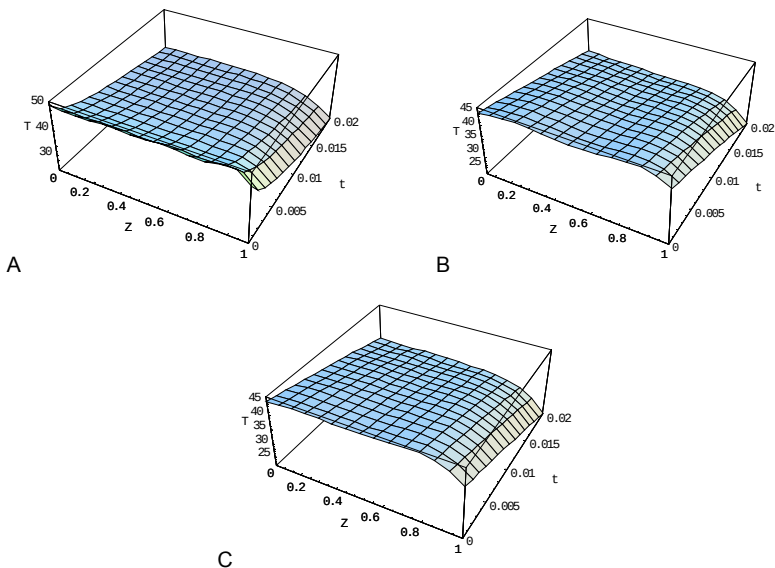
- $a = 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$,
- $\alpha = 2000 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$, co oznacza $Bi = 2,381$,
- 1 s odpowiada liczbie Fouriera $Fo = 0,00464$,
- temperatura otoczenia $T_w = 0^\circ\text{C}$,
- temperatura początkowa $T_0 = 50^\circ\text{C}$,
- bezwymiarowy krok czasowy $\Delta t = 0,002$ (około 0,43 s).

Rozważono dwa przypadki położenia punktów pomiarowych:

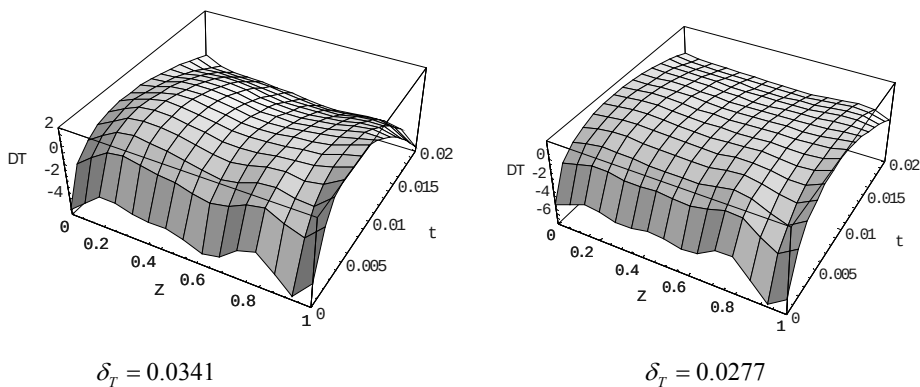
- punkty pomiarowe w odległości 5 mm od brzegu walca ($r^* = 0,9$),
- punkty pomiarowe w odległości 2 mm od brzegu walca ($r^{**} = 0,96$).

Wyniki pomiarów symulowano numerycznie dla pięciu czujników symetrycznie rozmieszczonych równolegle do osi $0z$ ($r^* = 0,9$ lub $r^{**} = 0,96$), a następnie zaburzone błędem losowym o rozkładzie normalnym, o średniej zero i odchyleniu standardowym 0,02, tzn. $N(0; 0,2)$. Obliczenia wykonano dla pierwszych czterech przedziałów czasowych ($k = 1, 2, 3, 4$).

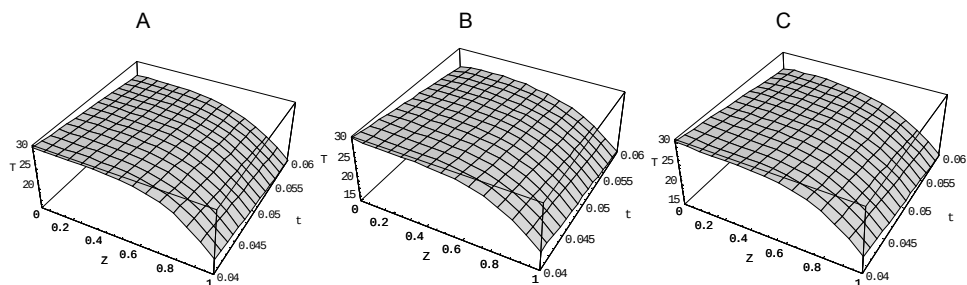
Rozwiązanie przybliżano kombinacją 18 T-funkcji pierwszego rodzaju. Rozkład temperatury w czasie na pobocznicę walca o bezwymiarowym równaniu $r = 1$ dla dwóch wybranych przedziałów czasowych (pierwszego i trzeciego) przedstawiono na rysunkach 5.24, 5.25, 5.26 i 5.27.



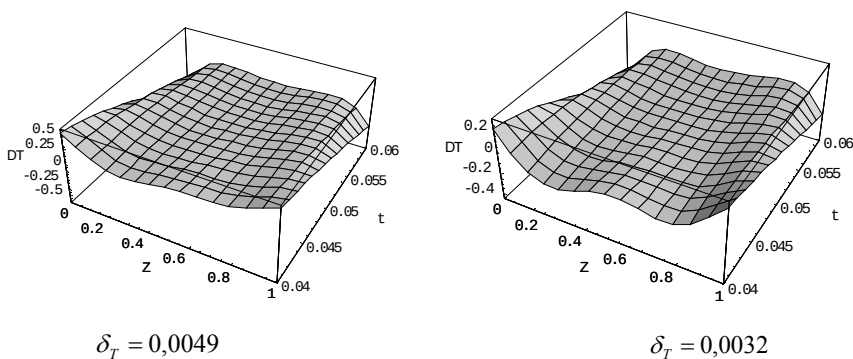
Rys. 5.24. Rozkład temperatury na brzegu walca $r = 1$ w przedziale czasu $\langle 0; 0,02 \rangle$. A – temperatura dokładna U , B – aproksymata θ dla $r^* = 0,9$, C – aproksymata θ dla $r^{**} = 0,96$. Dane obciążone błędem losowym, 5 punktów pomiarowych



Rys. 5.25. Różnica pomiędzy dokładnym i przybliżonym rozwiązaniem na brzegu walca $r = 1$ w przedziale czasu $\langle 0; 0,02 \rangle$. Po lewej – dla $r^* = 0,9$, po prawej – dla $r^{**} = 0,96$



Rys. 5.26. Rozkład temperatury na brzegu walca $r = 1$ w przedziale czasu $\langle 0,04; 0,06 \rangle$. A – temperatura dokładna U , B – aproksymata θ dla $r^* = 0,9$, C – aproksymata θ dla $r^{**} = 0,96$. Dane obarczone błędem losowym, 5 punktów pomiarowych



Rys. 5.27. Różnica pomiędzy dokładnym i przybliżonym rozwiązaniem na brzegu walca $r = 1$ w przedziale czasu $\langle 0,04; 0,06 \rangle$. Po lewej – dla $r^* = 0,9$, po prawej – dla $r^{**} = 0,96$

B.12: Kwadrat, trzy rodzaje MEST, regularyzacja energetyczna

W pracy [GL10] rozważono zagadnienie odwrotne wymiany ciepła w kwadracie, stosując MEST. Celem pracy było porównanie dokładności identyfikowanej temperatury w przypadku wykonania obliczeń przy zastosowaniu MEST ciągłej, nieciągłej oraz bezwęzłowej, oraz przy zastosowaniu regularyzacji energetycznej (minimalizacja defektu strumienia ciepła, wzrostu entropii oraz rozproszenia energii, por. przykład B8).

Rozważane jest równanie przewodnictwa cieplnego w kwadracie:

$$\Delta T = \partial T / \partial t \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad t \in (0, t_K), \quad (5.23)$$

z warunkami:

$$T(x, y, t)|_{t=0} = T_0(x, y),$$

$$T(x, y, t)|_{x=0} = h_1(y, t) = e^{y+2t}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y}(x, y, t) \right|_{y=1} = h_2(x, t) = e^{x+1+2t}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y}(x, y, t) \right|_{y=0} = h_3(x, t) = e^{x+2t}$$

$$T(1 - \delta_b, y_i, t_k) = T_{ik}.$$

T_{ik} oznaczają wartości zmierzonych temperatur w I punktach odległych o $\delta_b \in (0; 0,99)$ od brzegu $x = 1$ kwadratu w chwilach t_k , $i = 1, \dots, I$; $k = 1, \dots, K$.

Rozwiązania poszukuje się przy pomocy MEST osobno w każdym elemencie, aproksymując je w j -tym elemencie kombinacją liniową T-funkcji $V_m(x, y, t)$ określonych wzorem (3.35):

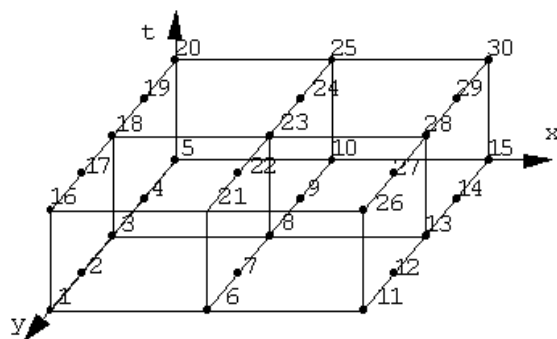
$$T^j(x, y, t) \approx \tilde{T}^j(x, y, t) = \sum_{m=1}^N c_m^j V_m(x, y, t), \quad (5.24)$$

co w efekcie prowadzi do funkcji bazowych typu pokazanego w przykładzie B8.

Rozważane będą, podobnie jak w przykładzie B8, trzy rodzaje MEST:

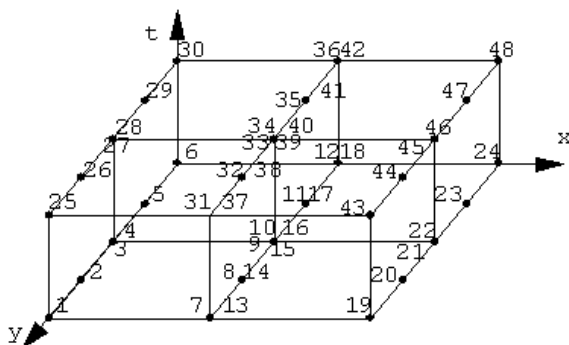
1. Ciągła we wspólnych węzłach. Elementy skończone są czasoprzestrzenne, jak pokazano na rysunku 5.28. Poza przyjęciem funkcji Trefftza za funkcje bazowe

MEST nie różni się od MES. Jednak takie przyjęcie funkcji bazowych powoduje, że rozwiązanie poszukuje się w klasie funkcji, spełniających równanie (5.23).



Rys. 5.28. Czasoprzestrzenny element skończony w przypadku temperatur ciągłych w węzłach

2. Brak ciągłości temperatur w węzłach pomiędzy elementami (rys. 5.29). W tym przypadku, aby zachować fizyczny sens rozwiązania, konieczne jest minimalizowanie nieciągłości temperatury pomiędzy elementami.



Rys. 5.29. Czasoprzestrzenny element skończony w przypadku temperatur nieciągłych w węzłach

3. MEST bezwęzłowa. Przedział czasu dzielony jest na podprzedziały. W każdym podprzedziale czasowym obszar Ω dzielony jest na elementy Ω_j , $j = 1, \dots, J$. W każdym elemencie temperatura jest aproksymowana liniową kombinacją T-funkcji. Wartości końcowe w przedziale czasowym poprzedzających rozważany przedział czasu są dla niego wartościami początkowymi. Dla pierwszego przedziału czasowego wartości początkowe wynikają z warunku początkowego. Współczynniki kombinacji liniowej T-funkcji określa się minimalizując funkcjonal opisujący niedokładność przybliżenia, mający postać zbliżoną do (4.31). Można w nim uwzględnić człony związane z regularyzacją energetyczną.

W celu polepszenia wyników obliczeń funkcjonał celu może zawierać jeden z trzech członów (lub wszystkie trzy z wagami) regularyzacji energetycznej, które w przypadku zagadnienia niestacjonarnego przyjmują następującą postać:

- defekt strumienia ciepła na granicach pomiędzy elementami:

$$\sum_{i,j} \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_{i,j}} \left(\frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial n_i} - \frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial n_j} \right)^2 d\Gamma, \quad (5.25)$$

- defekt produkcji entropii na granicach pomiędzy elementami:

$$\sum_{i,j} \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_{i,j}} \left(\frac{1}{\tilde{T}_i} \frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial n_i} - \frac{1}{\tilde{T}_j} \frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial n_j} \right)^2 d\Gamma, \quad (5.26)$$

- defekt rozproszenia energii na granicach pomiędzy elementami:

$$\sum_{i,j} \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_{i,j}} \left(\frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial n_i} \ln |\tilde{T}_i| - \frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial n_j} \ln |\tilde{T}_j| \right)^2 d\Gamma. \quad (5.27)$$

gdzie t_e jest momentem końcowym rozważanego przedziału czasowego, a $\Gamma_{i,j}$ jest wspólnym brzegiem sąsiadujących elementów, i -tego i j -tego.

Funkcjonał opisujący niedokładność przybliżenia w elementach rozwiązania dokładnego kombinacją liniową T-funkcji z jednym z członów regularyzacji energetycznej ma postać:

$$\begin{aligned} J = & \sum_i \int_{D_i} (\tilde{T}_i(x, y, 0) - f(x, y))^2 dD + \sum_i \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_i} (\tilde{T}_i(0, y, t) - h_1(y, t))^2 d\Gamma + \\ & + \sum_i \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial y}(x, 1, t) - h_2(x, t) \right)^2 d\Gamma + \\ & + \sum_i \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial y}(x, 0, t) - h_3(x, t) \right)^2 d\Gamma + \sum_{i,j} \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_{i,j}} (\tilde{T}_i - \tilde{T}_j)^2 d\Gamma + \\ & + \sum_j \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K (\tilde{T}_i(x_k, y_k, t_k) - T_{ik})^2 \Big|_{x=1-\delta_b} + J_{HF} \text{ albo } J_{EP} \text{ albo } J_{DE}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 J_{HF} &= \sum_{i,j} \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial x} \right)^2 d\Gamma + \sum_{i,j} \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial y} \right)^2 d\Gamma, \\
 J_{EP} &= \sum_{i,j} \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{1}{\tilde{T}_i} \frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial x} - \frac{1}{\tilde{T}_j} \frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial x} \right)^2 d\Gamma + \sum_{i,j} \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{1}{\tilde{T}_i} \frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial y} - \frac{1}{\tilde{T}_j} \frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial y} \right)^2 d\Gamma, \\
 J_{DE} &= \sum_{i,j} \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial x} \ln T_i - \frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial x} \ln T_j \right)^2 d\Gamma + \sum_{i,j} \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial y} \ln T_i - \frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial y} \ln T_j \right)^2 d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Minimalizacja tego funkcjonału prowadzi do wyznaczenia przybliżonego rozwiązania problemu.

Gdy jako dodatkowy człon wybrany jest funkcjonał J_{HF} , warunek konieczny minimum funkcjonału prowadzi do układu równań algebraicznych. W przypadku gdy układ ten jest źle uwarunkowany, można do jego rozwiązania wykorzystać metodę regularyzacji Tichonowa, [TA77].

Sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana, gdy jako dodatkowy człon wybiera się jeden z dwóch pozostałych funkcjonałów, gdyż zawierają one składniki nieliniowe. W takim przypadku całki można zastąpić sumami. Otrzymany w procesie minimalizacji funkcjonału układ równań algebraicznych jest nieliniowy. W celu jego rozwiązania stosuje się wtedy metodę Newtona, przyjmując jako przybliżenie zerowe rozwiązanie otrzymane dla funkcjonału J_{HF} .

Błędy rozwiązania bada się w normie maksimum oraz w normie L^2 i H^1 :

$$\begin{aligned}
 \delta &= \max_{(x,y,t) \in \Omega} |\tilde{T}(x,y,t_e) - T(x,y,t_e)|, \\
 \delta L_2 &= \left[\frac{\int_{\Omega} (\tilde{T}(x,y,t) - T(x,y,t))^2 d\Omega}{\int_{\Omega} T(x,y,t)^2 d\Omega} \right]^{1/2} \cdot 100\%, \\
 \delta H^1 &= \left[\frac{\int_{\Omega} \left[(\tilde{T}(x,y,t) - T(x,y,t))^2 + \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega}{\int_{\Omega} \left[T(x,y,t)^2 + \left(\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega} \right]^{1/2} \cdot 100\%
 \end{aligned}$$

zaś błąd na brzegu, gdzie identyfikowana jest temperatura, jest obliczany zgodnie ze wzorem:

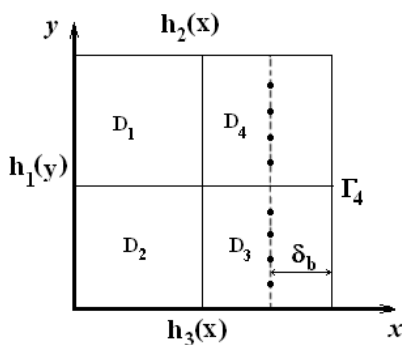
$$\delta L_2|_{x=1} = \left[\frac{\int_0^{t_e} dt \int_0^1 (\tilde{T}(1, y, t) - T(t, y, t))^2 dy}{\int_0^{t_e} dt \int_0^1 T(1, y, t)^2 dy} \right]^{1/2} \cdot 100\%.$$

Wyniki pomiarów w wewnętrznych punktach kwadratu symulowane są na podstawie rozwiązania ścisłego, które w rozważanym zagadnieniu ma postać:

$$T(x, y, t) = \exp(x + y + 2t).$$

Jako bezwymiarowy przedział czasu przyjęto $(0; 0,01)$. Wartości „zmierzonych” temperatur w punktach $(1 - \delta_b, y_i)$, gdzie $y_i \in \{0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9\}$, obliczono z rozwiązania dokładnego dla chwil $t \in \{0,0025, 0,0050, 0,0075, 0,01\}$. Przyjęto $\delta_b \in (0, 0,99)$. Dla $\delta_b = 0$ zagadnienie staje się problemem początkowo-brzegowym.

Rozważany kwadrat podzielono na 4 dwunastowęzłowe czasoprzestrzenne elementy typu pokazanego na rysunkach 5.28 i 5.29. Położenie punktów pomiarowych zaznaczono na rysunku 5.30, gdzie pokazano tylko przestrzenny wymiar elementów skończonych.



RYŚ. 5.30. Przestrzenny wymiar elementów skończonych, warunki brzegowe i położenie punktów pomiarowych

Błędy identyfikowanej temperatury na podstawie niezaburzonych danych w punktach wewnętrznych przy wykorzystaniu trzech typów MEST oraz trzech rodzajów regularyzacji energetycznej przedstawione są w tabelicy 5.8.

Z tabelicy 5.8 wynika, że poszczególne rodzaje regularyzacji dają bardzo podobne efekty, ale po uważnym przeanalizowaniu wyników wydaje się, że najlepsze wyniki daje MEST bezwęzłowa.

TABLICA 5.8. Błędy identyfikowanej temperatury na brzegu $x = 1$ dla $\delta_b \in (0, 0,99)$

δ_b	$\delta L_2 _{x=1}$			δ_b	$\delta L_2 _{x=1}$			δ_b	$\delta L_2 _{x=1}$		
	J_{HF}	J_{EP}	J_{DE}		J_{HF}	J_{EP}	J_{DE}		J_{HF}	J_{EP}	J_{DE}
0	0,0795	0,0796	0,0795	0	0,0795	0,0796	0,0795	0	0,0074	0,0063	0,0072
0,1	0,0745	0,0767	0,0746	0,1	0,0745	0,0767	0,0746	0,1	0,0192	0,0198	0,0182
0,2	0,0746	0,0827	0,0747	0,2	0,0746	0,0827	0,0747	0,2	0,0452	0,0388	0,0408
0,3	0,0833	0,0888	0,0835	0,3	0,0833	0,0888	0,0835	0,3	0,0844	0,0812	0,0784
0,4	0,1012	0,1012	0,1020	0,4	0,1012	0,1012	0,1020	0,4	0,0711	0,0757	0,0766
0,5	0,0991	0,0990	0,0999	0,5	0,0991	0,0990	0,0999	0,5	0,0825	0,0853	0,0910
0,6	0,0937	0,0942	0,0938	0,6	0,0937	0,0942	0,0938	0,6	0,0793	0,0747	0,0820
0,7	0,0932	0,0939	0,0932	0,7	0,0932	0,0939	0,0932	0,7	0,0809	0,0765	0,0796
0,8	0,0911	0,0917	0,0912	0,8	0,0911	0,0917	0,0912	0,8	0,0814	0,0793	0,0821
0,9	0,0890	0,0892	0,0891	0,9	0,0809	0,0892	0,0891	0,9	0,0911	0,0831	0,0946
0,99	0,0884	0,0884	0,0883	0,99	0,0884	0,0884	0,0883	0,99	0,0994	0,0867	0,1056
MEST z temperaturą ciągłą w węzłach			MEST z temperaturą nieciągłą w węzłach			Bezwęzłowa MEST					

W dalszej analizie zaburzono wyniki symulacji numerycznej pomiarów w punktach wewnętrznych kwadratu błędem losowym o rozkładzie normalnym, wartością średnią zero i odchyleniem standardowym równym 0,05. Normy błędów przybliżenia temperatury w kwadracie, δL_2 , oraz temperatury na brzegu $x=1$, $\delta L_2|_{x=1}$, zaburzonymi temperaturami w punktach pomiarowych przedstawiono w tabelicy 5.9.

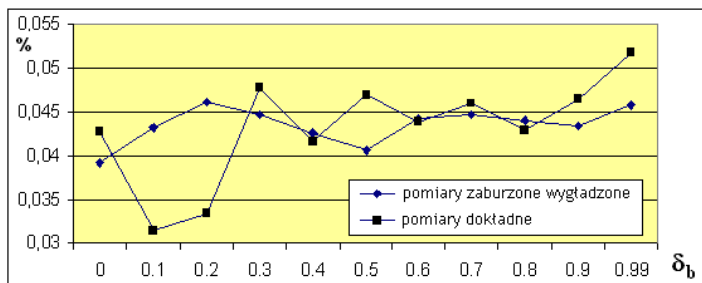
TABLICA 5.9. Błąd δL_2 jako funkcja odległości δ_b od brzegu $x = 1$ i błąd przybliżenia temperatury na brzegu $x = 1$ dla zaburzonych danych pomiarowych

δ_b	MEST bezwęzłowa		MEST ciągła w węzłach		MEST nieciągła w węzłach	
	δL_2 , %	$\delta L_2 _{x=1}$, %	δL_2 , %	$\delta L_2 _{x=1}$, %	δL_2 , %	$\delta L_2 _{x=1}$, %
0	0,3916	0,5071	0,3138	0,1969	0,3097	0,2177
0,1	0,7204	1,4844	0,3065	2,4440	0,3332	0,3082
0,2	1,2183	2,5965	0,2509	0,2001	0,4766	0,5640
0,3	1,0455	0,6235	0,2532	0,1345	0,4735	0,5200
0,4	0,9212	0,8840	0,3239	0,1462	0,3289	0,2339
0,5	0,6929	0,4371	0,3787	0,1505	0,4398	0,1588
0,6	0,9228	0,8737	0,2949	0,1299	0,3094	0,0892
0,7	1,1008	0,9198	0,2464	0,0994	0,3015	0,0898
0,8	1,1216	0,3904	0,2471	0,0961	0,3121	0,0896
0,9	0,7263	0,4261	0,2935	0,1293	0,3186	0,0889
0,99	0,4265	0,3864	0,4372	0,2206	0,4371	0,0879

Widoczne jest, że zaburzenie danych pomiarowych znacznie zwiększyło błąd $\delta L_2|_{x=1}$ (o rząd lub nawet o dwa rzędy wielkości). Podobna sytuacja miała miejsce dla błędu δL_2 , którego wartości są przedstawione w pracy [GL10].

Dane te następnie wygładzono kombinacją liniową osiemnastu T-funkcji. Obliczenia prowadzono przy wykorzystaniu MEST bezwęzłowej. Porównanie rozwiązania dla danych dokładnych i dla danych zaburzonych wygładzonych przedstawiono na rysunku 5.31. Widoczne jest, że wygładzenie radykalnie poprawiło dokładność obliczeń.

Szersza analiza przedstawionego problemu zawarta jest w pracy [GL10].



Rys. 5.31. Błąd δL_2 pola temperatury dla danych pomiarowych dokładnych i zaburzonych wygładzonych

5.3. ZAGADNIENIA OPISANE RÓWNANIEM FALOWYM

Zagadnienia odwrotne dotyczące identyfikacji warunków brzegowych rozwiązywane metodą Trefftza przy pełnym uwzględnieniu zależności rozwiązania od czasu dla równania falowego pojawiły się w literaturze dopiero w pierwszej dekadzie XXI wieku. Wcześniej zagadnienia tego typu rozwiązywano metodą Trefftza przy uprzednim sprowadzeniu równania falowego do równania Helmholtza, nazywanego czasami zredukowanym równaniem falowym, [SHA82, BS87, CLKY03, LLHC07]. Zagadnienia identyfikacji warunków brzegowych dla równania falowego bez sprowadzania ich do postaci równania Helmholtza były wcześniej rozważane [G82, G85], nawet z uzyskaniem rozwiązania dokładnego, [G82], ale bez stosowania metody Trefftza. Pierwsze wyniki dotyczące przybliżonego rozwiązywania zagadnień początkowo-brzegowych i zagadnień identyfikacji warunków brzegowych metodą Trefftza dla równania falowego opublikowane zostały przez Maciągą, [M09, M09a]. Pewne warunki dotyczące stabilności rozwiązania zagadnienia odwrotnego dla równania falowego dyskutowano w pracy [BY09].

B.13: Drgania kwadratowej membrany, zagadnienie początkowo-brzegowe

W monografii [M09] przedstawiono rozwiązanie zagadnienia drgań kwadratowej membrany. Problem opisany jest równaniem (3.54) dla $(x, y) \in \Omega$ i $t > 0$, gdzie $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Warunki początkowe i brzegowe przyjęto w postaci:

$$u(x, y, 0) = 0,05 \sin(\pi x) \sin(\pi y),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(x,y,0)} = 0,$$

$$u(x, y, t)|_{(x,y) \in \partial\Omega} = 0.$$

Rozwiązanie ściśle problemu jest znane i ma postać, [M09]:

$$U(x, y, t) = 0,05 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi \sqrt{2} t).$$

Zagadnienie rozwiązano bezwęzłową MEST. W każdym elemencie rozwiązanie przybliżone przyjmowano w postaci analogicznej do (5.24), tzn.:

$$u^j(x, y, t) = \sum_{n=1}^N c_m^j V_m(x, y, t), \quad j = 1, \dots, K, \quad (5.28)$$

w której wykorzystano T-funkcje (wielomiany falowe) przedstawione w części 3.4.1. Ponieważ wśród nich jest 1 wielomian stopnia zerowego, 3 stopnia pierwszego, 5 stopnia drugiego, 7 stopnia trzeciego itd., więc we wzorze (5.24) przyjmowano $N = 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$. Przykładowo $N = 25$ oznacza wykorzystanie wszystkich T-funkcji od stopnia zerowego do stopnia piątego włącznie.

Funkcjonał opisujący średniokwadratowe dopasowanie rozwiązania przybliżonego kombinacją liniową T-funkcji do warunków początkowych i brzegowych w elementach ma w tym przypadku postać następującą:

$$\begin{aligned} J = & \sum_i \int_{D_i} (u_i(x, y, 0) - 0,05 \sin(\pi x) \sin(\pi y))^2 dD + \\ & + \sum_i \int_{D_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \bigg|_{(x, y, 0)} \right)^2 dD + \sum_i \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_i} (u_i(x, y, t))^2 d\Gamma + \\ & + \sum_{i,j} \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_{i,j}} (u_i - u_j)^2 d\Gamma + \sum_{i,j} \int_0^{t_e} dt \int_{\Gamma_{i,j}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} - \frac{\partial u_j}{\partial n} \right)^2 d\Gamma, \end{aligned}$$

gdzie D_i to elementy skończone, zaś Γ_i to ich brzegi.

Dla punktu $(0,5; 0,5)$, będącego środkiem membrany, zbadano następnie błąd przybliżenia, określony wzorem:

$$E = \sqrt{\frac{\int_0^{K\Delta t} [U(0,5;0,5;t) - u(0,5;0,5;t)]^2 dt}{\int_0^{K\Delta t} [U(0,5;0,5;t)]^2 dt}},$$

gdzie K jest liczbą kroków czasowych.

Wielkość błędu E w zależności od liczby elementów $J = n_x \cdot n_y$ w jednym kroku czasowym, liczby T-funkcji N , długości kroku czasowego Δt oraz liczby kroków czasowych K przedstawia tablica 5.10.

TABLICA 5.10. Błąd aproksymacji w punkcie $(0,5; 0,5)$ (w środku membrany) w zależności od liczby elementów J , T-funkcji N , kroków czasowych K i wielkości kroków czasowych Δt

		$\Delta t = 0,1$		$\Delta t = 0,5$	
$J = n_x \cdot n_y$	N	$K = 2$	$K = 3$	$K = 2$	$K = 3$
$4 = 2 \cdot 2$	4	0,67	0,67	0,98	0,99
	16	0,13	0,13	0,456	0,599
	36	0,0025	0,0027	0,266	0,022
$9 = 3 \cdot 3$	4	0,4	0,4	0,99	1
	16	0,0059	0,127	0,33	0,456
	36	0,00009	0,00022	0,0064	0,0073
$25 = 5 \cdot 5$	4	0,27	0,268	1,04	1,02
	16	0,0013	0,0027	0,295	0,415
	36	0,00006	0,00008	0,0022	0,0024

Widoczne jest, że bardzo dobrą aproksymację rozwiązania otrzymuje się dla niewielkiej liczby elementów skończonych, jeśli liczba T-funkcji, wykorzystanych do zbudowania rozwiązania przybliżonego, jest wystarczająco duża.

Zależność błędu E od liczby kroków czasowych K w przypadku podziału obszaru na $J = 3 \cdot 3 = 9$ elementów dla $N = 49$ T-funkcji oraz dla $\Delta t = 0,5$ przedstawia tablica 5.11.

TABLICA 5.11. Błąd aproksymacji E w punkcie $(0,5; 0,5)$ (w środku membrany) w zależności od liczby kroków czasowych K

K	1	3	5	7	9	10
E	0,0003	0,001	0,0014	0,0017	0,0021	0,0023

Widoczne jest, że dokładność przybliżenia rozwiązania ścisłego rozwiązaniem przybliżonym jest bardzo dobra nawet dla dużej liczby kroków czasowych. Warto

dodać, że w monografii [M09] dokonano także obliczeń stosując MEST ciągłą i MEST nieciągłą; otrzymane wyniki dla tych samych danych opisujących rozwiązanie były znacznie gorsze.

B.14: Drgania kwadratowej membrany, identyfikacja warunków brzegowych

W pracy [M09a] rozwiązano zagadnienie odwrotne dotyczące drgania kwadratowej membrany zajmującej obszar $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ przy następujących warunkach początkowych, brzegowych i wynikających z symulowanych pomiarów:

$$u(x, y, 0) = x(x-1)y(y-1),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(x,y,0)} = 0,$$

$$u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0.$$

W celu zasymulowania pomiarów w wewnętrznych punktach kwadratu przyjęto jednorodny warunek także na boku $x = 1$:

$$u(1, y, t) = 0.$$

Zakłada się, że ten warunek nie jest znany, lecz znane są ugięcia membrany w trzech wewnętrznych punktach oddalonych o ε od boku $x = 1$:

$$u(1-\varepsilon, 0,25, t) = u_1(t),$$

$$u(1-\varepsilon, 0,50, t) = u_2(t),$$

$$u(1-\varepsilon, 0,75, t) = u_3(t).$$

Gdy $\varepsilon > 0$, mamy do czynienia z zagadnieniem odwrotnym, dla którego poszukiwane będzie rozwiązanie w całym obszarze, w szczególności zaś na brzegu $x = 1$. W ogólnym przypadku ugięcia membrany mogą być znane na całej linii $x = 1 - \varepsilon$.

Wartości funkcji $u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, otrzymuje się z rozwiązania dokładnego, [M09a]:

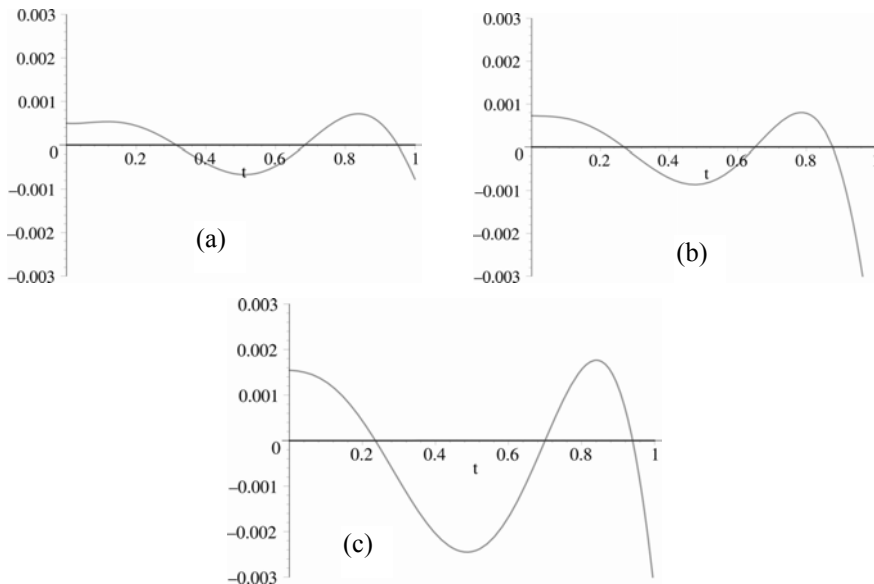
$$u(x, y, t) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(\frac{[(-1)^k - 1][(-1)^l - 1]}{k^3 l^3} \sin(k\pi x) \sin(l\pi y) \cos\left(\sqrt{k^2 + l^2} \pi t\right) \right).$$

Warto zauważyć, że rozwiązanie dokładne jest wyrażone przez szereg nieskończony. Przy obliczaniu jego wartości dla konkretnych wartości zmiennych x, y, t wystąpi w sposób nieunikniony błąd związany z uwzględnieniem skończonej liczby wyrazów.

Rozwiązanie przybliżone, poszukiwane w całym obszarze w j -tym przedziale czasu, ma postać (5.28). Współczynniki przy T-funkcjach oblicza się minimalizując funkcjonal:

$$\begin{aligned}
 I = & \int_0^1 \int_0^1 [u(x, y, 0) - x(x-1)y(y-1)]^2 dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x, y, 0)} \right]^2 dx dy + \\
 & + \int_0^{\Delta t} \int_0^1 (u(0, y, t))^2 dy dt + \int_0^{\Delta t} \int_0^1 (u(x, 0, t))^2 dx dt + \\
 & + \int_0^{\Delta t} \int_0^1 (u(x, 1, t))^2 dx dt + \int_0^{\Delta t} \left\{ \sum_{k=1}^3 (u(1 - \varepsilon, 0, 25k, t) - u_k(t))^2 \right\} dt.
 \end{aligned}$$

Wartości ugięć brzegu $x=1$ otrzymane w wyniku rozwiązania tego zagadnienia dla niezaburzonych danych wejściowych przedstawiono na rysunku 5.32. Widoczne jest, że im dalej są wewnętrzne odpowiedzi temperaturowe od brzegu, tym gorzej jest on przybliżany, jakkolwiek i tak odchyłki od wartości zero są bardzo małe.



Rys. 5.32. Dokładne i przybliżone wartości ugięć w czasie w punkcie brzegowym (1;0,5) w przypadku wykorzystania T-funkcji do stopnia siódmego dla (a) $\varepsilon = 0$, (b) $\varepsilon = 0,05$, (c) $\varepsilon = 0,3$

W przypadku danych zaburzonych, do ich wygładzenia używa się także T-funkcji. Załóżmy, że dane w punktach wewnętrznych są określone wzorem:

$$u_{kl}^d = u_{kl}(1 + \xi_{kl}),$$

gdzie $u_{kl} = u(1 - \varepsilon; (k-1) \cdot 0,1; (l-1) \cdot 0,1)$, zaś ξ_{kl} to zaburzenia wyrażające się ułamkiem nieprzekraczającym, powiedzmy, wielkości $\pm 0,02$ (czyli zaburzenie miało rozkład normalny $N(0, 0,02)$). W pracy [M09a] wykazano, że wyniki otrzymane na podstawie danych zaburzonych i niewygładzonych są praktycznie bezużyteczne, gdyż błędy rozwiązań przybliżonych są rzędu tysięcy procent.

Wygładzenie danych zaburzonych osiąga się, opisując kombinacją liniową u_ε T-funkcji zgodnie z formułą (5.28) i wyznaczając współczynniki tej kombinacji z warunku minimum funkcjonau:

$$\sum_{kl} (u_\varepsilon(1 - \varepsilon; (k-1) \cdot 0,1; (l-1) \cdot 0,1) - u_{kl}^d)^2.$$

Wyniki otrzymane na podstawie danych wygładzonych są obarczone błędem nieprzekraczającym błędu danych wejściowych.

Szczegóły analiz można znaleźć w pracy [M09a].

5.4. ZAGADNIENIA SPRĘŻYSTOŚCI

Zagadnienia odwrotne sprężystości (a także termosprężystości i innych przypadków pól, sprężonych z polem naprężeń i odkształceń) są głównie wywołane koniecznością pozyskania informacji dotyczących własności odkształcalnych ciał lub struktur. Matematyczne i numeryczne techniki identyfikacji danych natury geometrycznej, takich jak: szczeliny, ubytki kawitacyjne czy inkluzje były przedmiotem badań wielu autorów, np. [AHD99, ABB99, FOP04, K95, NK95, BD02, NG04] i in. Badano fale mechaniczne, [L00a], wyznaczano parametry fizyczne, takie jak: moduł sprężystości, gęstość, prędkość fal w powiązaniu np. z badaniami sejsmicznymi, [W03], zajmowano się identyfikacją źródeł lub niedostępnych warunków na brzegach (tzw. problem Cauchy'ego w sprężystości), [CDJP01, KMF91, ML02, ML03, HHS05] i wieloma innymi. Szeroki przegląd takich artykułów zawarto w pracy [BC05]. Nie sygnalizowano jednak wykorzystania funkcji Trefftza do rozwiązywania zagadnień identyfikacji obciążeń brzegu, a ponadto zajmowano się tylko zagadnieniami stacjonarnymi lub sprowadzonymi do postaci niezawierającej zmiennej czasowej.

Pierwsze prace, stosujące metodę Trefftza do zagadnień odwrotnych elastokinetyki, pojawiły się dopiero w pierwszej dekadzie XXI wieku. Na ogół były one sprowadzane do równań niezawierających *explicite* zmiennej czasowej, por. np. [JL99,

BJK05, MP05, GM07]. Zagadnienia odwrotne identyfikacji obciążenia brzegu, uwzględniające zmienną czasową, są nieliczne, [JMRY03, M09, M09a, GMM09]. Jedno z takich zagadnień, rozważane w pracy [M09a], przedstawiono poniżej.

B.15: Kwadrat, identyfikacja przemieszczeń na części brzegu

Rozważany jest płaski stan odkształcenia w kwadracie:

$$(x, y) \in \Omega = (-1, 1) \times (-1, 1).$$

Względem równania (3.121a) stosuje się podstawienie Lamégo, (3.122). Otrzymuje się równania falowe (3.123), opisujące potencjał skalarny φ i potencjał wektorowy ψ . W przypadku płaskiego stanu odkształcenia potencjał wektorowy ma różną od zera tylko składową $\psi(x, y, t)$ w kierunku osi $0z$. Przemieszczenie wyraża się przez potencjały wzorem:

$$\mathbf{u} = [u_x(x, y, t), u_y(x, y, t)] = \left[\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y}, \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial y} - \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x} \right],$$

a naprężenia przez przemieszczenia wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \sigma_{yx}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \sigma_{zz} &= \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Równania (3.123) to dwa oddzielne równania falowe, lecz dla rozważanego obszaru są one sprzężone poprzez warunki początkowe i brzegowe. Przybliżone rozwiązania tych równań przyjmuje się w postaci:

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{n=1}^N a_n^1 V_n^1, \quad \psi \approx \hat{\psi} = \sum_{n=1}^N a_n^2 V_n^2,$$

gdzie V_n^i , $i = 1, 2$, są T-funkcjami (wielomianami falowymi) dla równania falowego, spełniającymi równania falowe z różnymi prędkościami fali. Wspomniane T-funkcje określone są w części 3.4.1 dla bezwymiarowej postaci równania falowego. W przypadku równań na potencjały φ i ψ T-funkcje uzyskuje się, kładąc w miejsce zmiennej t we wzorach z części 3.4.1 zmienną $c_i t$, $i = 1, 2$.

Przemieszczenie ma wówczas postać:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \left[\frac{\partial \hat{\phi}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}(x, y, t)}{\partial y}, \frac{\partial \hat{\phi}(x, y, t)}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\psi}(x, y, t)}{\partial x} \right].$$

W kwadracie $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ rozważa się następujące warunki początkowe i brzegowe:

$$u_x(x, y, 0) = u_y(x, y, 0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial t} \right|_{(x, y, 0)} = \frac{c_2 \sqrt{2}}{50000} \sin x \cos y, \quad \left. \frac{\partial u_y}{\partial t} \right|_{(x, y, 0)} = \frac{c_2 \sqrt{2}}{50000} \cos x \sin y,$$

$$u_x(-1, y, t) = -\frac{\sin(1)}{50000} \cos y \sin(c_2 t \sqrt{2}),$$

$$u_x(x, -1, t) = u_x(x, 1, t) = \frac{\cos(1)}{50000} \sin x \sin(c_2 t \sqrt{2}),$$

$$u_y(-1, y, t) = -\frac{\cos(1)}{50000} \sin y \sin(c_2 t \sqrt{2}),$$

$$u_y(x, \pm 1, t) = m \frac{\sin(1)}{50000} \cos x \sin(c_2 t \sqrt{2}).$$

Warunki dotyczące $u_x(1, y, t)$ oraz $u_y(1, y, t)$ nie są znane. Zamiast tego znane są wartości tych przemieszczeń w zbiorze punktów postaci $(x - \varepsilon, -1 + (k/5), l\Delta t/10)$, $k, l = 0, 1, \dots, 10$ (są to wewnętrzne odpowiedzi przemieszczeniowe). Dla $\varepsilon = 0$ są to wartości brzegowe – czyli dla $\varepsilon = 0$ problem staje się zagadnieniem początkowo-brzegowym. Dla $\varepsilon > 0$ rozważa się zagadnienie odwrotne, identyfikacji przemieszczeń na brzegu.

Wewnętrzne odpowiedzi przemieszczeniowe generowane są z rozwiązania dokładnego:

$$u_x(x, y, t) = \frac{1}{50000} \sin x \cos y \sin(c_2 t \sqrt{2}),$$

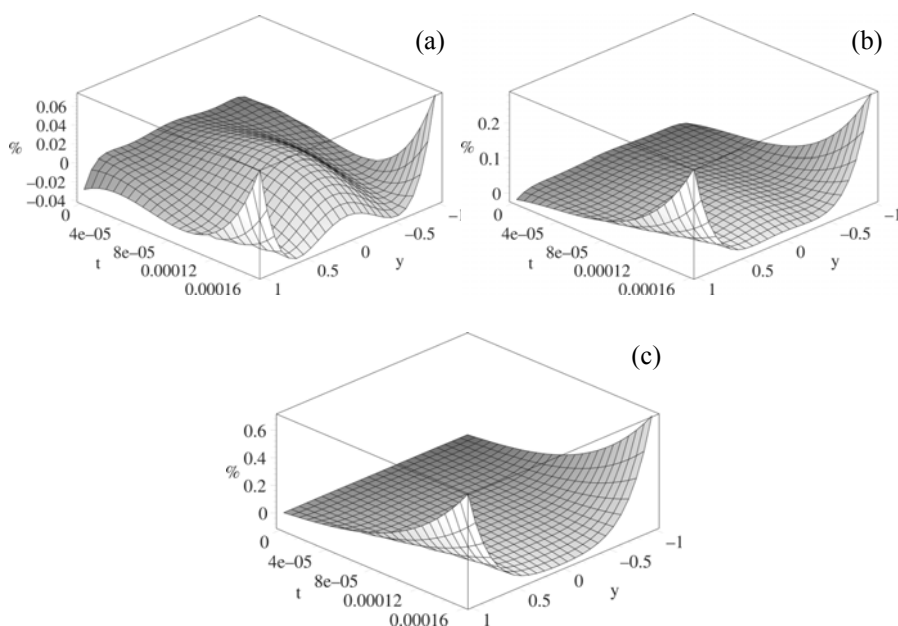
$$u_y(x, y, t) = \frac{1}{50000} \cos x \sin y \sin(c_2 t \sqrt{2}).$$

Warto dodać, że rozwiązanie dokładne zostało tak dobrane, aby równanie na potencjał ψ miało rozwiązanie zerowe.

Obliczenia przeprowadzono dla $\lambda = 10^{11}$ Pa, $\mu = 8 \cdot 10^{10}$ Pa, $\rho = 8000$ kg/m³ oraz $\Delta t = 16/100000$ s. Przy znanych wewnętrznych odpowiedziach przemieszczeniowych w punktach na linii $x = 1 - \varepsilon$ poszukiwano rozwiązania w całym kwadracie, a w szczególności na brzegu $x = 1$. Na rysunku 5.33 przedstawiono – odniesiony do maksymalnej wartości funkcji dla $(x, y, t) \in (-1, 1) \times (-1, 1) \times (0, \Delta t)$ – błąd względny $E(y, t)$ identyfikacji przemieszczenia $u_x(1, y, t)$ przy wykorzystaniu T-funkcji stopnia od 0 do 7. Obliczono go ze wzoru

$$E(y, t) = \frac{|u_x(1, y, t) - \hat{u}_x(1, y, t)|}{\max_{y, t \in (0, 1) \times (0, \Delta t)} |u_x(1, y, t)|}.$$

Przypadek (a) dotyczy zagadnienia początkowo-brzegowego, gdy $\varepsilon = 0$, przypadek (b) dotyczy zagadnienia odwrotnego, gdy $\varepsilon = 0,1$, zaś (c) opisuje zagadnienie odwrotne, gdy $\varepsilon = 0,5$. Jak widać z rysunku, nawet dla $\varepsilon = 0,5$ błąd aproksymacji warunku brzegowego na brzegu $x = 1$ nie przekracza 0,7% w całym rozważanym przedziale czasu.



Rys. 5.33. Różnica pomiędzy rozwiązaniem dokładnym a przybliżonym T-funkcjami stopnia od 0 do 7 na brzegu $x = 1$ dla (a) $\varepsilon = 0$, (b) $\varepsilon = 0,1$, (c) $\varepsilon = 0,5$

Największy błąd na rysunku 5.33 występuje dla $y = \pm 1$. W pracy [M09a] wykazano, że wraz ze zwiększaniem stopnia T-funkcji wykorzystanych do aproksymacji rozwiązania błąd względny procentowy rozwiązania w punkcie $(1, 1)$ maleje i przy zastosowaniu T-funkcji do 7 stopnia stopnia włącznie nawet dla $\varepsilon = 0,5$ wynosi tylko ok. 0,856%.

Przy zaburzeniu danych (wewnętrznych odpowiedzi przemieszczeniowych u_x oraz u_y) błędem przypadkowym o rozkładzie normalnym $N(0; 0,04)$ błąd obliczeń nieco się zwiększa, ale nadal tylko nieznacznie przekracza 1%. Oznacza to, że w tym przypadku nie jest konieczne wygładzanie danych.

Więcej uwag na temat rozważanego zagadnienia identyfikacji przemieszczeń można znaleźć w pracy [M09a].

Przykład zagadnienia odwrotnego elastokinetyki dotyczącego identyfikacji przemieszczeń brzegowych można także znaleźć w pracy [GMS09]. Interesującą analizę podobnych zagadnień odwrotnych elastostatyki zawarto w pracy [WZ06].

6. Funkcje Trefftza w zagadnieniach identyfikacji współczynników

Zagadnienia identyfikacji współczynników opisujących cechy fizyczne badanych ośrodków (ciał stałych, płynów) to temat bardzo często poruszany w artykułach naukowych. Znajomość współczynników pozwala przewidywać opisany modelem matematycznym przebieg procesów w tych ośrodkach lub ich stanów.

Prace poświęcone identyfikacji parametrów dotyczą bardzo różnych dziedzin. Dotyczą one identyfikacji parametrów termofizycznych ciał stałych, [B57, M79, G82a, B95a, G99, L02, BBP03, KKK03, KLKK03, K04, DKKC05, HTC05, T07, S07, OIL08, ABVD08, HGMS09, S09], współczynników termofizycznych w płynach, [H99, HGPP99, PPH05, PHHP06, HH09, HP09, HHP09, HPP09], sztywności w ciałach stałych, [SW02, SO91, SLG02, KSSB09, FMM05], współczynników w zagadnieniach dyfuzji, [LEI97], współczynnika tarcia, [SI99], współczynników w materiałach sprężysto-plastycznych, [H07, HE08], współczynnika mocy turbiny wiatrowej, [MA09], współczynników w równaniach różniczkowych, [H03, HDP06, HD08, HL08], i innych. Badano także wpływ niedokładności pomiarów na wynik obliczeń poszukiwanych współczynników, [B02, V05].

Poniżej przedstawiono analizę zagadnień współczynnikowych wykonaną przy zastosowaniu metody Trefftza. Poszczególne przypadki numerowane są jako W1, W2 itd.

W.1: Współczynnik przejmowania ciepła na powierzchni ścianki dwuwarstwowej

Przedstawione poniżej zagadnienie identyfikacji współczynnika przejmowania ciepła na powierzchni ścianki dwuwarstwowej było elementem większego zagadnienia, którego pierwszą część omówiono w przykładzie B1, a które omówiono szczegółowo w pracy [H99]. Dalsze wersje prac nad tym zagadnieniem były przedstawiane w wielu publikacjach, [HGPP99, PPH05, PHHP06, HP09, HHP09, HPP09]. Na rysunku 5.2 przedstawiono przekrój poprzeczny minikanалу z dwuwarstwową ścianką. Rozważa się układ, składający się z płynu (freonu-11) wpływającego do wąskiego kanału zadaną prędkością i temperaturą (niższą od jej temperatury wrzenia) oraz

przegród, oddzielających ten płyn od otoczenia laboratoryjnego. Jedna z przegród jest jednocześnie źródłem ciepła ogrzewającym płyn do temperatury wrzenia. Przy pewnych mocach tego źródła ciepła, temperatura wrzenia jest osiągana pomiędzy punktem wlotu płynu do kanału a wylotem kanału. Na wylocie kanału jest mierzona temperatura płynu (może to być tym razem zarówno ciecz, jak i mieszanina cieczy i pary lub – w skrajnym przypadku – para). Poszukiwany jest współczynnik przejmowania ciepła na powierzchni oddzielającej folię i płyn (zarówno w fazie ciekłej, jak i gazowej) jako funkcja temperatury tej powierzchni i temperatury freonu.

Poszukiwany współczynnik na części powierzchni ścianki od wlotu do punktu przemiany fazowej wyznaczono ze wzoru, [HGPP99]:

$$h(T_F, T_{fr}) = \frac{Nu \cdot \lambda}{d_h},$$

gdzie Nu oznacza bezwymiarową liczbę nazywaną liczbą Nusselta, d_h opisuje średnicę hydrauliczną kanału, zaś λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła przez freon.

Niezbędny w kolejnym etapie obliczeń punkt przemiany fazowej x_f otrzymuje się jako rozwiązanie równania algebraicznego:

$$-\lambda_F \frac{\partial T_F(x, y)}{\partial y} \bigg|_{y=\delta_G+\delta_F} = h(T_F, T_{fr}) (T_F(x, \delta_G + \delta_F) - T_{fr}(x)),$$

odpowiadającego warunkowi brzegowemu na powierzchni wewnętrznej ścianki (od strony kanału). Tutaj $T_{fr}(x)$ opisuje temperaturę freonu-11 jako funkcję odległości od wlotu do kanału. W równaniu tym λ_F oraz $T_{fr}(x_f)$ (temperatura przemiany fazowej freonu-11) są z założenia znane, funkcja T_F oraz jej pochodna uprzednio wyliczone (por. przykład B1), niewiadomą zaś jest x_f . Temperatura saturacji freonu-11 wynosi $T_{sat} = 323,15$ K. Rozwiązania szukano numerycznie w przedziale $x \in (0, L)$.

Powyżej punktu nasycenia x_f współczynnik $h(T_F, T_{fr})$ na powierzchni $y = \delta_G + \delta_F$ wyznacza się z warunku:

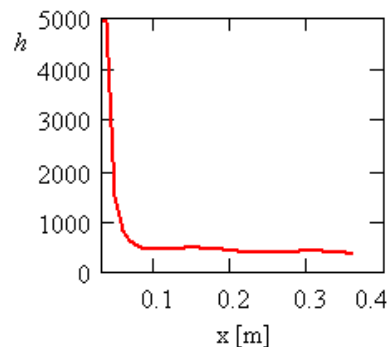
$$h(T_F, T_{fr}) = \frac{-\lambda_F \frac{\partial T_F(x, y)}{\partial y} \bigg|_{y=\delta_F+\delta_G}}{T_F(x, \delta_F + \delta_G) - T_{fr}(x)}, \quad (6.1)$$

przyjmując, że temperatura freonu ma wartość stałą równą temperaturze saturacji.

Jak wspomniano w przykładzie B1, wszystkie dane temperaturowe obliczono przy wykorzystaniu metody Trefftza. Dane do obliczeń przedstawiono także w tym

przykładzie. W pracy [HPGG99] wyliczono wartość $h(T_F, T_{fr})$ – otrzymano tam $h(T_F, T_{fr}) = 4911,607$. Wartość tę przyjęto jako stałą na odcinku od $x = 0$ do punktu saturacji $x = x_f$. Na odcinku od punktu saturacji do wylotu kanału współczynnik $h(T_F, T_{fr})$ obliczono na podstawie wzoru (6.1). Ponieważ pierwsze rezultaty, otrzymane na podstawie danych zamieszczonych w tablicy 5.1, miały niefizyczny charakter (wartość współczynnika „falowała”, dane te wygładzono, w sposób przedstawiony w przykładzie B1. Zmienność współczynnika $h(T_F, T_{fr})$ jako funkcję od punktu saturacji do wylotu kanału przedstawiono na rysunku 6.1.

Krzywa $h(T_F, T_{fr})$ ma przebieg zgodny z oczekiwanym. Przy obliczaniu jej wartości w pracy [H99] wykorzystywano różne warianty aproksymacji temperatur kombinacją liniową T-funkcji, uwzględniając od 20 do 30 funkcji. Większa liczba funkcji Trefftza powodowała wygładzanie wykresu i zbliżanie go do przewidywanego przez teorię kształtu.



Rys. 6.1. Współczynnik wnikania ciepła $h = h(T_F, T_{fr})$ na odcinku od punktu saturacji do wylotu kanału

W.2: Liczba Biota na powierzchni warstwy płaskiej

W pracy [G82] rozważano zagadnienie wyznaczenia liczby Biota (bezwymiarowego współczynnika przejmowania ciepła) na górnej powierzchni jednorodnej warstwy płaskiej o grubości h , przy założeniu, że powierzchnia dolna jest cieplnie izolowana, zaś na powierzchni górnej ma miejsce swobodna wymiana ciepła. Zakładając, że warunek początkowy jest zerowy i po przyjęciu zmiennych bezwymiarowych $\xi = x/h$, $\tau = at/h^2$, $Bi = \alpha h/\lambda$, gdzie a jest współczynnikiem dyfuzyjności temperaturowej, α to współczynnik przejmowania ciepła, λ opisuje współczynnik przewodnictwa cieplnego, zaś Bi jest liczbą Biota, otrzymuje się następujący bezwymiarowy model matematyczny tego zagadnienia:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \theta(\xi, \tau) = 0, \quad \xi \in (0, 1), \quad \tau > 0,$$

$$\theta(\xi, 0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{(0, \tau)} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{(1, \tau)} = -Bi(\theta(1, \tau) - T_f(\tau)),$$

gdzie $T_f(\tau)$ jest temperaturą otoczenia brzegu $\xi = 1$.

O liczbie Biota zakłada się, że jest stała. Aby ją wyznaczyć, przyjmuje się, że znana jest zmienność w czasie temperatury w pewnym punkcie o współrzędnej $\xi^* \in (0, 1)$. Może to więc być w szczególności temperatura jednego czy drugiego brzegu warstwy, znana z pomiarów (wewnętrzna odpowiedź temperaturowa, w skrócie WOT) lub antycypowana.

Rozwiązanie tego problemu ma postać, [G82]:

$$Bi = \frac{2\theta(\xi, \tau) * \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n^2 \tau)}{T_f(\tau) * \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \cos(\xi \lambda_n) \exp(-\lambda_n^2 \tau) \right] - \eta(\tau) * \theta(\xi, \tau)}, \quad (6.2)$$

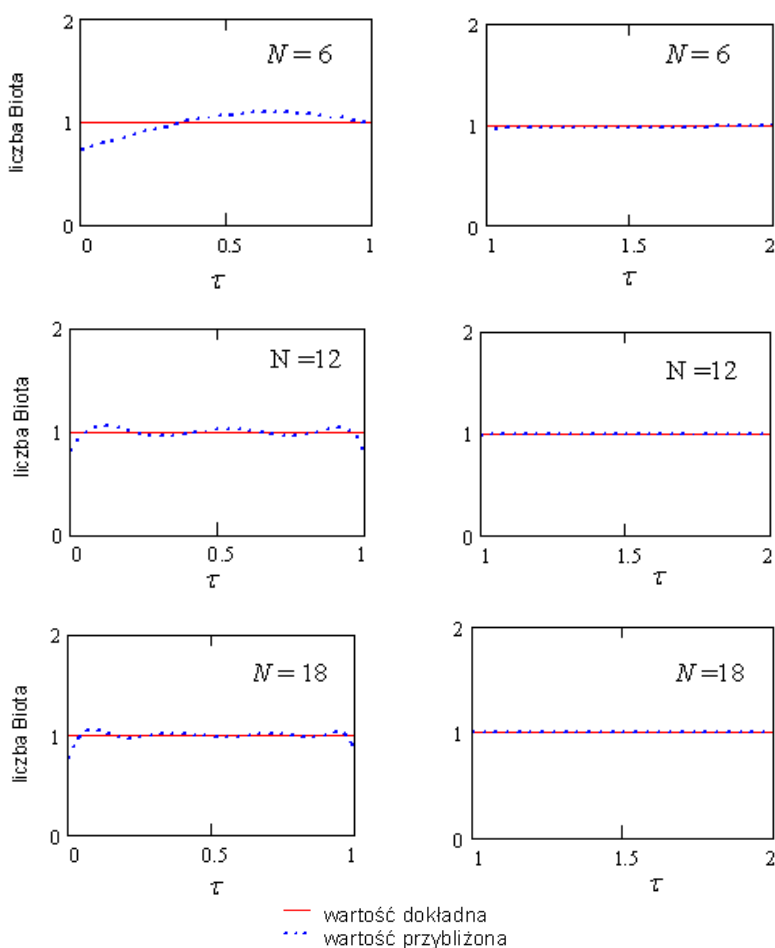
gdzie $\eta(\tau)$ jest funkcją Heaviside'a, zaś $\lambda_n = \frac{\pi}{2}(2n-1)$.

W szczególności, dla $\xi = 1$, można – przekształcając warunek brzegowy – otrzymać następujący wzór, z którego można wyznaczyć liczbę Biota:

$$Bi = \frac{\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{(1, \tau)}}{T_f(\tau) - \theta(1, \tau)}. \quad (6.3)$$

WOT, jak i $T_f(\tau)$, na ogół znane są w postaci zbiorów danych dyskretnych, pochodzących z pomiarów, rozpoczętych w tej samej chwili czasu i prowadzonych z tym samym, stałym krokiem czasowym.

Pole temperatury w warstwie płaskiej można bez trudu wyznaczyć w przybliżonej postaci, wykorzystując WOT oraz warunek początkowy i warunek na brzegu $\xi = 0$. Aproksymuje się wówczas funkcję opisującą temperaturę w warstwie kombinacją liniową T-funkcji przedstawionych wzorem (3.31) w sposób, jaki wykorzystano w przykładzie B9. Ponieważ uzyskane w ten sposób rozwiązanie jest funkcją co najmniej klasy C^1 względem obu zmiennych w przedziale czasu, dla którego zostało wyznaczone, można na jego podstawie wyznaczyć zarówno pochodną występującą w liczniku wzoru (6.3), jak i wartość $\theta(1, \tau)$. Następnie na podstawie tego wzoru łatwo można obliczyć liczbę Biota.



Rys. 6.2. Estymacja stałej liczby Biota na podstawie pomiaru temperatury w punkcie wewnętrznym w zależności od stopnia N wielomianu aproksymującego temperaturę

Można również WOT opisać w sposób przybliżony kombinacją liniową T-funkcji dobraną do danych przy zastosowaniu przykładowo metody najmniejszych kwadratów. Temperaturę otoczenia $T_f(\tau)$ brzegu $\xi=1$ można aproksymować splajnami lub wielomianami, także dobranymi na przykład metodą najmniejszych kwadratów. Wówczas możliwe jest zastosowanie bezpośrednio wzoru (6.2).

Wzór (6.3) wykorzystano do obliczenia liczby Biota w pracy [H99], przy czym przyjęto tam warunek początkowy niezerowy $F(x) = 100$ oraz równą zero temperaturę otoczenia brzegu $\xi=1$, tzn. $T_f(\tau)=0$. Identyfikowana wartość liczby Biota była równa jeden; na jej podstawie wygenerowano WOT dla $\xi^* = 0,9$.

Do aproksymacji temperatury wykorzystano T-funkcje stopnia $N = 6, 12$, oraz 18 . Wykresy przedstawione na rysunku 6.2 pokazują przybliżenie liczby Biota wyrażeniem (6.3) w pierwszych dwóch przedziałach czasowych (przyjęto krok czasowy równy jeden). Zafalowania na końcach przedziału, szczególnie widoczne w przedziale $(0,1)$, wynikają z opisu funkcji stałą ilorazem wielomianów.

W.3: Współczynnik przejmowania ciepła na powierzchni wewnętrznej łopatki turbiny

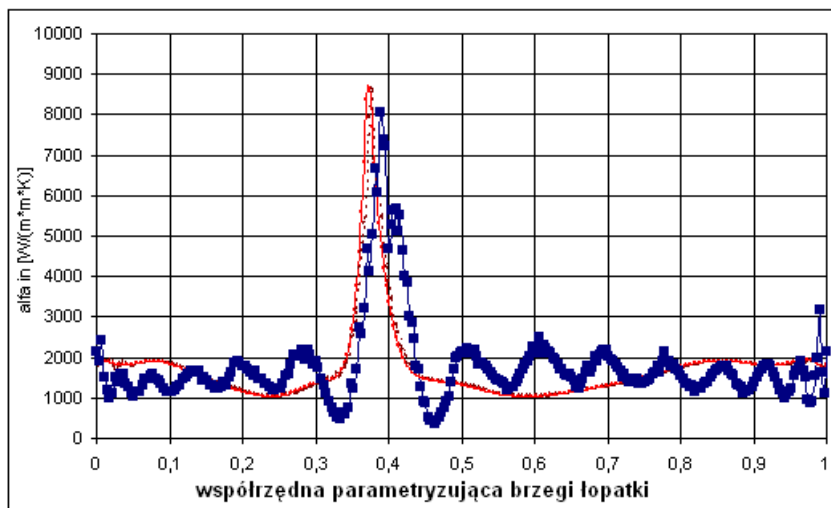
W przykładzie B7 przedstawiono zagadnienie wyznaczenia rozkładu temperatury θ na zewnętrznym i wewnętrznym brzegu łopatki turbiny. W pracy [CFG07], w której analizowano to zagadnienie, wyznaczono także współczynnik przejmowania ciepła na powierzchni wewnętrznej łopatki turbiny.

Ponieważ temperatura otoczenia brzegów zewnętrznego i wewnętrznego łopatki turbiny, T_{f_0} i T_{f_i} , były znane, a temperaturę obu brzegów wyznaczono przy wykorzystaniu funkcji Trefftza (rys. 5.12), do wyznaczenia współczynników przejmowania ciepła na obu brzegach, $\alpha|_{\Gamma_i}$, można wykorzystać wzór:

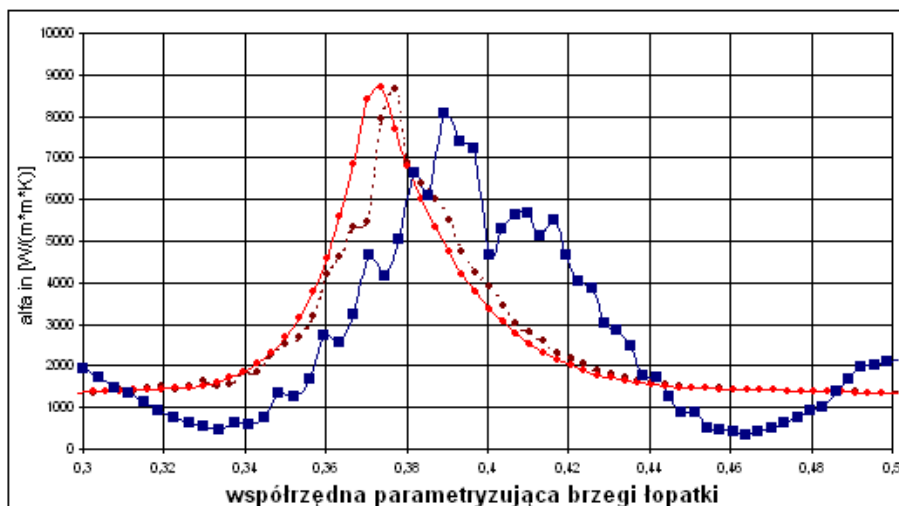
$$\alpha|_{\Gamma} = \frac{\lambda \partial \theta / \partial n|_{\Gamma}}{T_f(s)|_{\Gamma} - \theta(s)|_{\Gamma}},$$

gdzie Γ to brzeg zewnętrzny Γ_0 albo brzeg wewnętrzny Γ_i , n to normalna zewnętrzna, zaś λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła przez materiał, z którego wykonano łopatkę. Oba współczynniki przejmowania ciepła jako funkcje znormalizowanej zmiennej s , parametryzującej brzeg wewnętrzny i zewnętrzny, przedstawiono na rysunku 6.3. Na rysunku 6.4 pokazano środkową część wykresu 6.3, dla $s \in \langle 0,3; 0,5 \rangle$. Przesunięcie pików obu krzywych wynika z przyjęcia parametryzacji obu brzegów w ten sposób, że tylko punkty $s=0$ ($s=1$) odpowiadają sobie na obu wykresach; pozostałe są względem siebie nieco przesunięte,

przy czym przesunięcie narasta do krawędzi natarcia i potem maleje, osiągając wartość zero na krawędzi spływu.



Rys. 6.3. Rozkład współczynników przejmowania ciepła na zewnętrznym (linia cienka) i wewnętrznym (linia gruba, kwadraciki) brzegu łopatki turbiny. Temperatura otoczenia brzegu zewnętrznego $T_{f_0} = 1350^\circ\text{C}$, wewnętrznego $T_{f_i} = 780^\circ\text{C}$



Rys. 6.4. Rozkład współczynników przejmowania ciepła na zewnętrznym (linia cienka, przerywana) i wewnętrznym (linia gruba, kwadraciki) brzegu łopatki turbiny dla $s \in (0,3; 0,5)$

Na obu rysunkach zaznaczono także zadane wartości współczynnika przejmowania ciepła na zewnętrznej powierzchni (linia cienka, ciągła, z kropeczkami). Widoczna jest duża zgodność wartości zadanych i obliczonych.

Widoczne na rysunku 6.4 przesunięcie pików wynosi ok. 0,2 i jest spowodowane parametryzacją brzegów łopatki.

W.4: Wyznaczanie współczynnika dyfuzyjności cieplnej

Współczynnik dyfuzyjności cieplnej, nazywany także współczynnikiem wyrównywania temperatury i oznaczany zwykle literą a , zdefiniowany jest wzorem:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p},$$

gdzie λ – współczynnik przewodzenia ciepła, [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$], ρ – gęstość, [kgm^{-3}], c_p – ciepło właściwe, [$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$].

Szybkość, z jaką ciepło dociera do miejsc chłodniejszych i wywołuje tam efekt ogrzania materii, jest tym większa, im lepiej to ciepło jest przewodzone (duże λ) i im mniej tego ciepła jest akumulowane „po drodze” (mała pojemność $c_p\rho$).

Liczba znanych metod pomiarowych tego parametru jest bardzo duża (por. np. [ME86]). W pracy [S07] zaproponowano metodę opartą na wykorzystaniu T-funkcji. Koncepcja tam przedstawiona polega na minimalizacji funkcjonału błędu wynikającego ze średniokwadratowego dopasowania aproksymaty rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego do warunków początkowego i brzegowych rozważanego zagadnienia przewodzenia ciepła (metoda przeszukiwań z zawężaniem i jednocześnie zagęszczaniem obszaru przeszukiwań).

Rozwiązania przybliżonego zagadnienia przewodzenia ciepła, opisanego równaniem (3.32), poszukiwano w postaci kombinacji liniowej T-funkcji, opisanych w rozdziale 3.3 wzorami (3.39) i (3.42).

W celu wyznaczenia dyfuzyjności termicznej a , w wyrażeniu opisującym czas bezwymiarowy (liczbę Fouriera) $\tau = at/l^2$ przyjmowano różne wartości dla tego parametru i dla każdej z nich rozwiązywano rozważane zagadnienie przewodzenia ciepła. Innymi słowy, dla każdej wartości a budowano bezwymiarowe równanie przewodzenia ciepła we współrzędnych walcowych ($\xi = r/l$, gdzie l to grubość warstwy walcowej) z zadanymi warunkami dotyczącymi wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych, dla niego budowano funkcjonal celu i obliczano jego wartość. Za poszukiwaną wartość tego współczynnika przyjęto taką wartość a , dla której ten funkcjonal, opisujący różnicę pomiędzy rozwiązaniem ścisłym i przybliżonym, był najmniejszy.

Przedstawiony sposób postępowania zademonstrowano wykorzystując dane z przykładu B10, w których współczynnik wyrównywania temperatury był znany i równy $6,626 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, co pozwoliło ocenić dokładność uzyskanego wyniku. Przekrój poprzeczny korpusu turbiny pokazany jest na rysunku 5.19. Funkcjonał celu miał postać:

$$J = \int_{\xi_z}^{\xi_w} (\theta(\xi, 0) - T_0(\xi))^2 d\xi + \int_0^{\Delta\tau} (\theta(\xi_2, \tau) - \varphi(\tau))^2 d\tau + \int_0^{\Delta\tau} (\theta(\xi_3, \tau) - \psi(\tau))^2 d\tau,$$

gdzie $T_0(\xi) = 100^\circ\text{C}$ było funkcją opisującą warunki początkowe, zaś funkcje $\varphi(\tau)$ i $\psi(\tau)$ opisywały dane temperaturowe w punktach $r_2 = 0,719 \text{ m}$, $r_3 = 0,875 \text{ m}$ (por. rys. 5.19 i tablica 5.6). Ponieważ dane, przedstawione w tablicy 5.6 były niedokładne, estymowano je wielomianami stopnia trzeciego, podanymi w przykładzie B10 (przypadek 2).

Niestety, otrzymane wyniki nie były zadowalające, gdyż taki stopień wielomianu estymującego dane z tablicy 5.6 pozwolił na wykorzystanie tylko 12 funkcji Trefftza pierwszego i drugiego rodzaju (przy większej ich liczbie osiągane wyniki znacznie się pogarszały). Najbliższa rzeczywistej otrzymana wartość współczynnika dyfuzyjności termicznej α była równa $7,17 \cdot 10^{-6}$, (dla 10 funkcji Trefftza), tzn. błąd względny miał wartość 8,2%. Dla 12 T-funkcji (po 6 pierwszego i drugiego rodzaju) wynik był gorszy i wynosił $8,17 \cdot 10^{-6}$ (błąd względny był tu równy 23,3%).

W następnym kroku estymowano zatem niedokładne dane z tablicy 5.6 wielomianami stopnia czwartego:

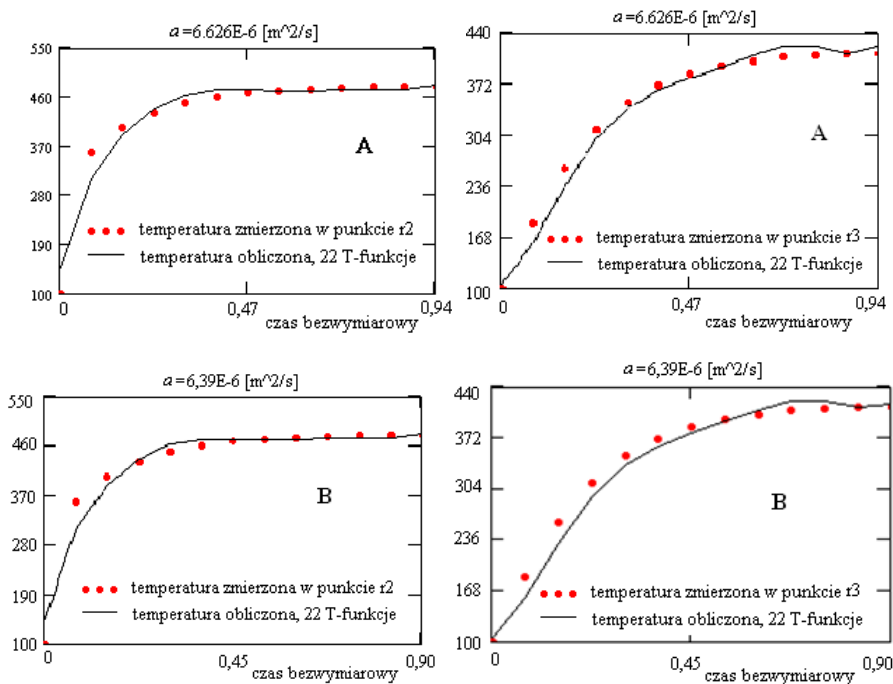
$$T_2(t) = -713,15t^4 + 1982,6t^3 - 2008,5t^2 + 947,86t + 295,79,$$

$$T_3(t) = -724,95t^4 + 2200,3t^3 - 2602,8t^2 + 1450,4t + 86,896.$$

Taki opis wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych pozwolił wykorzystać do opisu rozwiązania przybliżonego do 22 funkcji Trefftza (po 11 obu rodzajów). Dla współczynnika dyfuzyjności termicznej α otrzymano przy 22 T-funkcjach wartość $6,39 \cdot 10^{-6}$, czyli wynik obarczony błędem względnym 3,62%.

Na rysunku 6.5 przedstawiono aproksymację temperatury, otrzymanej jako przybliżone rozwiązanie metodą T-funkcji równania opisującego przewodzenie ciepła równaniem (3.32), w punktach, w których zadane były wewnętrzne odpowiedzi temperaturowe. W części A rysunku temperatury przybliżane funkcjami cieplnymi zostały obliczone wykorzystując wartość dyfuzyjności termicznej wynikającej z podanych własności termofizycznych, czyli dla $\alpha = 6,626 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, nato-

miast część B rysunku zawiera aproksymaty temperatur wyznaczone za pomocą funkcji ciepłych, gdy do obliczeń wykorzystano wyznaczoną wartość dyfuzyjności $a = 6,39 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.



Rys. 6.5. Aproksymacja temperatury w punktach r_2 i r_3 : A – aproksymata w przypadku gdy $a = 6,626 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, B – aproksymata w przypadku gdy $a = 6,39 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Także dla danych estymowanych wielomianami szóstego stopnia otrzymano $a = 6,39 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Być może otrzymano by lepszą dokładność, opisując temperatury w punktach r_2 i r_3 wielomianami ciepłymi. Jednak otrzymany taką, dość niewyszukaną metodą, rezultat przy bardzo niedokładnych danych wejściowych należy uznać za bardzo dobry.

W.5: Wyznaczanie współczynnika przewodnictwa cieplnego

W pracy [S07] rozważano badanie temperatury ośrodka sondą zaopatrzoną w 16 rezystorów, które mogły być miernikami temperatury lub grzałkami. Rezystory tworzyły serię szesnastu toroidalnych elementów rozmieszczonych na długości 325 mm. Dla celów obliczeniowych przyjęto – wobec małej średnicy sondy, mającej kształt walca o średnicy 10 mm – że ośrodek ma kształt walca o bardzo dużym w porównaniu ze średnicą sondy promieniu $r_{oś}$. Przyjęto, że oprócz warunku po-

czątkowego (którego rola jest dyskusyjna – o tym dalej) znana jest temperatura na zewnętrznym brzegu sondy na długości grzejącego rezystora. Dla tak postawionego zagadnienia początkowo-brzegowego wyznaczano przybliżone rozwiązanie $\Theta(r, z, t)$ metodą Trefftza (średniokwadratowego przybliżania warunków początkowego i brzegowego lub tylko brzegowego). Omówiony sposób zastosowano do identyfikowania gradientu temperatury na wspólnym brzegu ośrodka i sondy, przez co możliwe było wyznaczenie przewodności cieplnej ośrodka.

Obliczenia były oparte na danych doświadczalnych, [S07].

Rozważano proces nagrzewania k -tego rezystora sondy umieszczonej w jednorodnym i izotropowym ośrodku o promieniu $r_{oś}$, promieniu wewnętrznym sondy r_w , zewnętrznym r_z , jednorodnej temperaturze początkowej oraz temperaturze brzegu T_w danej w postaci dyskretnej (z pomiarów). Pole temperatury spełnia wówczas równanie przewodzenia:

$$\frac{\partial^2 T(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t},$$

$$t > 0, r \in (r_z, r_{oś}), z \in (0, z_k)$$

wraz z warunkami brzegowym $T(r_z, z, t_w) = T_{k,w}$ (gdzie k – numer rezystora, $w = 1, 2, \dots, W$, W to liczba pomiarów temperatury) i początkowym $T(r, z, 0) = T_0$, gdzie: t_w – czas pomiaru, [s], $r_{oś}$ – promień zewnętrzny ośrodka, [m], r_z – promień zewnętrzny sondy, [m], z_k – długość k -tego rezystora, mierzona wzdłuż osi sondy [m], $T_{k,w}$ – temperatura wyznaczona dla k -tego rezystora w kolejnych chwilach pomiaru, [°C], T_0 – pierwsza temperatura wyznaczona dla k -tego rezystora od chwili rozpoczęcia eksperymentu, [°C]. Ostatnia dana miała charakter dyskusyjny, w związku z czym zbadano problem dla sytuacji, gdy była ona uwzględniana i gdy się tę daną pominęło; wówczas uwzględniano tylko warunek brzegowy.

Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe $\xi = r/l$, $\eta = z/l$, $l = r_o - r_z$, $\tau = at/l^2$ sprowadzono równanie przewodzenia ciepła do postaci:

$$\frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \theta(\xi, \eta, \tau)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta^2} = \frac{\partial \theta(\xi, \eta, \tau)}{\partial \tau},$$

$$\tau > 0, \xi \in (\xi_z, \xi_{oś}), \eta \in (0, \eta_k)$$

z warunkami brzegowym $\theta(\xi_z, \eta, \tau_w) = T_{k,w}$ i początkowym $\theta(\xi, \eta, 0) = T_0$, przy czym funkcji $\theta(\xi, \eta, \tau)$ poszukiwano w postaci kombinacji liniowej T-funkcji (3.39) i (3.42).

Nieznane współczynniki tej kombinacji liniowej wyznaczono minimalizując funkcjonal błędu opisujący dostosowanie aproksymaty:

- do warunków brzegowego i początkowego

$$J = \int_0^{\eta_k} \sum_{w=1}^W (\theta(\xi_z, \eta, \tau_w) - T_{k,w})^2 d\eta + \int_{\xi_z}^{\xi_{o\delta}} \int_0^{\eta_k} (\theta(\xi, \eta, 0) - T_0)^2 d\eta d\xi, \quad (6.4)$$

- lub tylko do warunku brzegowego

$$J = \int_0^{\eta_k} \sum_{w=1}^W (\theta(\xi_z, \eta, t_w) - T_{k,w})^2 d\eta. \quad (6.5)$$

Otrzymane w ten sposób przybliżenie temperatury na brzegu $\xi = \xi_z$ pozwoliło, przy znajomości mocy P pobieranej przez k -ty rezystor w czasie τ_w , wyznaczyć współczynnik przewodzenia ciepła badanego ośrodka λ z warunku drugiego rodzaju na brzegu $\xi = \xi_z$. W przypadku ścianki cylindrycznej przyjmuje on postać:

$$q_l = -\lambda 2\pi r_z \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\xi_z, \eta, \tau), \quad (6.6)$$

gdzie $q_l = \frac{P}{z_k}$ to jednostkowa moc, generowana przez rezystor, [W/m].

Przyjęto równość strumienia ciepła po obu stronach granicy ośrodek-sonda, a ponieważ moc generowana na brzegu sondy jest znana, wzór (6.6) po przekształceniu do postaci:

$$\lambda \cong -\frac{q_l}{2\pi r_z \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(\xi_z, \eta, \tau)}, \quad (6.7)$$

pozwała wyznaczyć współczynnik przewodnictwa cieplnego λ badanego ośrodka.

Wyznaczona formuła przedstawia współczynnik przewodzenia ciepła formalnie zależny od czasu. Przy założeniu, że współczynnik ten jest w rozpatrywanym zagadnieniu stały, przyjęto jako jego wielkość wartość średnią wyrażenia (6.7). Gdy brano do obliczeń W danych pomiarowych, otrzymano:

$$\lambda \cong -\frac{1}{W} \sum_{w=1}^W \frac{q_l}{2\pi r_z \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(\xi_z, \eta, \tau_w)}. \quad (6.8)$$

Obliczenia wykonano dla teflonu, gleby i lodu dla następujących danych:

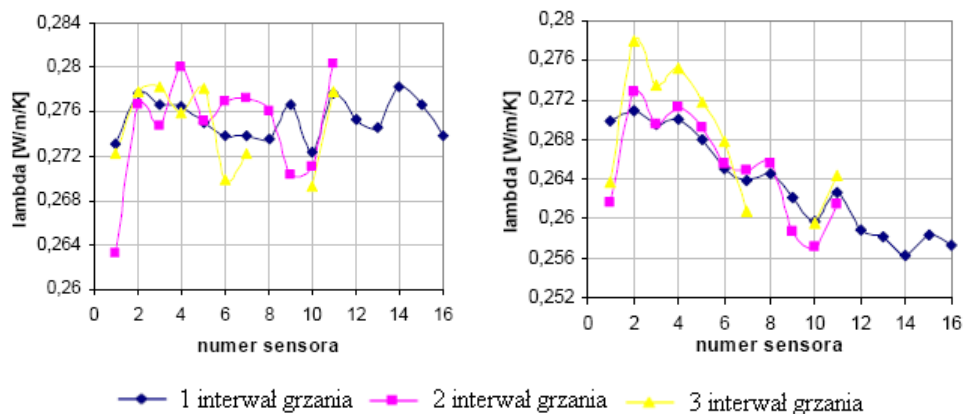
- promień zewnętrzny sondy: $r_z = 0,005$ m,
- promień zewnętrzny ośrodka: $r_{os} = 0,05$ m,
- długość rezystorów podano w tablicy 6.1,
- czas: od 10-tej do 900-tej sekundy,
- krok czasowy pomiarów 10 s (trzy interwały po 30 pomiarów),
- wymiar charakterystyczny: $l = r_{os} - r_z = 0,045$ m,
- moc grzania rezystorów $P = 0,55$ W.

TABLICA 6.1. Długość rezystorów sondy termicznej. Rezystory sondy tworzyły serię szesnastu toroidalnych elementów rozmieszczonych na długości 325 mm

Nr	L, mm	Nr	L, mm
1	9,13	9	18,90
2	9,75	10	21,03
3	11,01	11	23,20
4	12,29	12	26,47
5	13,03	13	27,98
6	15,01	14	29,98
7	16,19	15	34,10
8	17,42	16	39,17

Wyniki obliczeń dla obu przypadków (uwzględnienia i nieuwzględnienia warunku brzegowego) przedstawiono dla teflonu dla przybliżenia rozkładu temperatury w sondzie przy pomocy 20 wielomianów (po 10 pierwszego i drugiego rodzaju) na rysunku 6.6, a analizę błędu względnego w tablicach 6.2 i 6.3, gdzie do wyznaczenia współczynnika przewodzenia ciepła wykorzystano dane z trzech interwałów grzania ośrodka.

Przedstawione w tabelach 6.2 i 6.3 wyniki obliczeń dla teflonu wykazały, że przyjęcie danych z pierwszego pomiaru jako warunku początkowego (funkcjonał 6.5) nie było prawidłowe, gdyż otrzymane wyniki były mniej dokładne, bardziej odbiegały od wartości teoretycznych i miały raczej niefizyczny przebieg w porównaniu z tymi, które otrzymano w przypadku uwzględnienia tylko warunku brzegowego (funkcjonał 6.6).



RYS. 6.6. Przewodność cieplna teflonu. Do aproksymacji temperatury użyto po 10 T-funkcji pierwszego i drugiego rodzaju. Po lewej stronie wyniki otrzymane przy uwzględnieniu tylko warunku początkowego, po prawej – przy uwzględnieniu warunków brzegowego i początkowego

TABLICA 6.2. Błąd względny identyfikacji przewodności cieplnej teflonu. Do konstrukcji aproksymaty rozwiązywanego zagadnienia użyto po 10 T-funkcji pierwszego i drugiego rodzaju we współrzędnych (r, z, t) . Założono tylko warunek brzegowy I rodzaju dla r_z (funkcjonał (6.6))

	I interwał grzania	II interwał grzania	III interwał grzania
max błąd względny	2,31%	2,66%	2,29%
min błąd względny	0,07%	0,12%	0,12%

TABLICA 6.3. Błąd względny identyfikacji przewodności cieplnej teflonu. Do konstrukcji aproksymaty rozwiązywanego zagadnienia użyto po 10 T-funkcji pierwszego i drugiego rodzaju we współrzędnych (r, z, t) . Przyjęto warunki brzegowy i początkowy (funkcjonał (6.5))

	I interwał grzania	II interwał grzania	III interwał grzania
max błąd względny	4,59%	5,44%	5,80%
min błąd względny	0,10%	0,29%	0,41%

Dla lodu i gleby otrzymano wyniki obarczone podobnym błędem. Wartości współczynnika przewodzenia ciepła dla lodu i zmianę błędu względnego w II interwale grzania w zależności od rezystora, z którego pochodziły dane doświadczalne, przedstawiono w tablicy 6.4.

Wyznaczony błąd zawiera się między 2,51% a 0,00%, przy czym warto zwrócić uwagę na fakt, że największe wartości błędu wystąpiły dla rezystorów położonych najbliżej brzegów badanej próbki.

TABLICA 6.4. Współczynnik przewodzenia ciepła lodu i błąd względny wyznaczony na podstawie przebiegu temperatury rezystora grzanego (drugi interwał grzania)

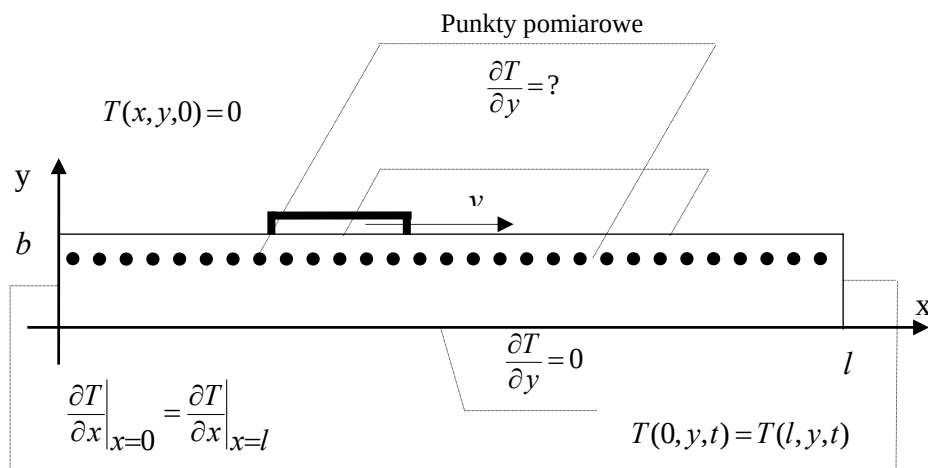
Numer rezystora, dla którego wykonano obliczenia	Do aproksymacji rozwiązania użyto po 10 T-funkcji pierwszego i drugiego rodzaju	
5	2,99331	0,50%
6	2,76268	0,01%
7	2,67122	0,02%
8	2,64852	0,03%
9	2,59550	0,10%
10	2,76942	0,02%
11	2,61678	0,07%
12	2,71329	0,00%
13	2,55152	0,19%
14	2,54536	0,21%
15	2,29565	1,22%
16	2,11266	2,49%

7. Funkcje Trefftza w zagadnieniach identyfikacji źródeł

Zagadnienia identyfikacji źródeł głównie skupiają się wokół problemów wyznaczenia źródeł ciepła, np. [DHS97, AJ01, WMM06, JM07, YDYL09], ale także dotyczą np. lokalizacji źródeł dźwięków, [HRG98], czy niejednorodności w równaniu Poissona, [LHY05]. Wykorzystanie funkcji Trefftza do identyfikacji źródła ciepła w zagadnieniach niestacjonarnych przedstawiono w dwóch pracach, [M06a, GM09]. Poniżej przedstawiono rozważania zawarte w drugiej z tych prac.

W pracy [GM09] identyfikowano gęstość strumienia ciepła wywołanego działaniem ruchomego źródła ciepła poruszającego się wzdłuż brzegu obszaru. Danymi wejściowymi były symulowane pomiary temperatury w punktach wewnętrznych obszaru. Zagadnienie rozwiązane jest w sposób przybliżony metodą elementów skończonych z wykorzystaniem funkcji Trefftza jako funkcji bazowych.

Przyjęto dwukierunkowe rozchodzenia się ciepła w obszarze o kształcie prostokąta o długości $\bar{l}$ [m] i szerokości $\bar{b}$ [m]. Założono, że źródło ciepła porusza się po jednym z boków prostokąta ze stałą prędkością $\bar{v}$ [m/s] w sposób periodyczny (rys. 7.1).



Rys. 7.1. Układ modelowy do identyfikacji warunku brzegowego w procesie

W pobliżu tego brzegu prostokąta, po którym porusza się źródło ciepła, dokonano pomiarów temperatury. Położenie prostokąta w układzie współrzędnych, punktów pomiarowych i działającego źródła pokazane jest na rysunku 7.1.

Otrzymano następującą postać zagadnienia we współrzędnych bezwymiarowych:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (7.1)$$

dla $(x, y) \in \Omega$, $t > 0$, $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < b\}$ z warunkami początkowym i brzegowymi:

$$\begin{aligned} T(x, y, 0) &= 0, & \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0, t) &= 0, \\ T(0, y, t) &= T(l, y, t), & \frac{\partial T}{\partial x}(0, y, t) &= \frac{\partial T}{\partial x}(l, y, t). \end{aligned}$$

Ponadto znane były pomiary temperatury w punktach wewnętrznych ciała blisko powierzchni działania ruchomego źródła ciepła w wybranych chwilach czasowych:

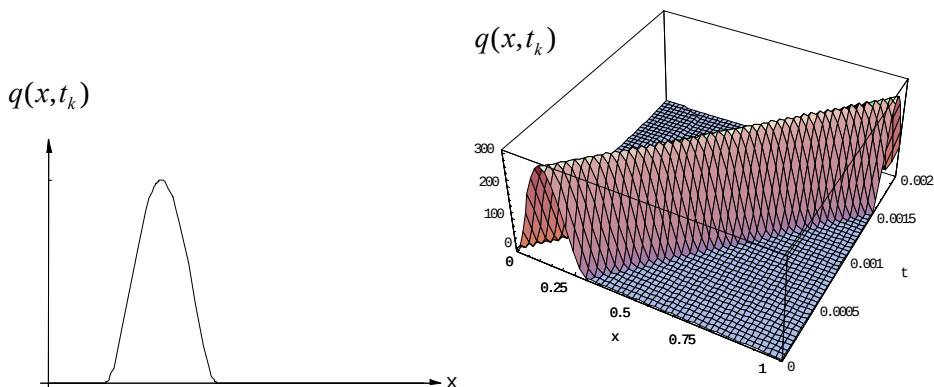
$$T(x_p, y_p, t_p) = W_p, \quad \text{dla } p = 1, 2 \dots P,$$

gdzie W_p oznacza temperaturę wygenerowaną numerycznie z rozwiązania dokładnego zagadnienia prostego opisanego równaniem (7.1), warunkami początkowym i brzegowymi podanymi wyżej i warunkiem (7.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y}(x, b, t) &= q(x, t) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x - vt \leq 0 \\ Q \left(\frac{2}{w} \right)^4 ((x - vt) \bmod l - w)^2 ((x - vt) \bmod l)^2 & \text{dla } 0 \leq x - vt \leq w \\ 0 & \text{dla } w \leq x - vt \leq l \end{cases} \quad (7.2) \end{aligned}$$

gdzie $(x - vt) \bmod l$ oznacza resztę z dzielenia $(x - vt)$ przez l , $w = \frac{\bar{w}}{d}$ to bezwymiarowa szerokość źródła, $\bar{w}$ – szerokość źródła, m, d – charakterystyczny wymiar liniowy, m.

Wykres funkcji wykorzystanej w warunku brzegowym (7.1) w ustalonej chwili czasowej przedstawia rysunek 7.2.



Rys. 7.2. Po lewej: rozkład gęstości strumienia ciepła (bezwymiarowo) na brzegu $y = b$ w ustalonej chwili czasowej; po prawej: rozkład gęstości strumienia ciepła (bezwymiarowo) na brzegu $y = b$ w czasie przejścia źródła przez długość całego ciała

Analityczne rozwiązanie problemu prostego jest następujące, [CJ59]:

$$\begin{aligned}
 T(x, y, t) = & \frac{q_0 t}{bl} + \frac{2}{bl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k q_0 \cos \alpha_k y}{\alpha_k^2} (1 - e^{-\alpha_k^2 t}) + \\
 & + \frac{2}{bl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{n1} \cos \gamma_{n0}}{\lambda_n^2} \left(\cos(\lambda_n(x - vt) + \gamma_{n0}) - e^{-\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x + \gamma_{n0}) \right) + \\
 & + \frac{4}{bl} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k q_{n1} \cos \gamma_{nk} \cos \alpha_k y}{\lambda_n^2 + \alpha_k^2} \times \\
 & \times \left(\cos(\lambda_n(x - vt) + \gamma_{nk}) - e^{-(\lambda_n^2 + \alpha_k^2)t} \cos(\lambda_n x + \gamma_{nk}) \right),
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\cos \gamma_{nk} = \frac{\alpha_k^2 + \lambda_n^2}{\sqrt{v^2 \lambda_n^2 + (\alpha_k^2 + \lambda_n^2)^2}},$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{b}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad q_0 = \frac{8Qw}{15},$$

$$q_{n1} = - \frac{8Ql^3 \cos n\pi \left(3w \ln \pi \cos \frac{wn\pi}{l} + (w^2 n^2 \pi^2 - 3l^2) \sin \frac{wn\pi}{l} \right)}{w^4 n^5 \pi^5}.$$

Obszar Ω podzielono na prostokąty Ω_j dla $j = 1, 2, \dots, J$. Przedział czasowy $< 0, t >$ podzielono na podprzedziały $\langle r \Delta t, (r+1)\Delta t \rangle$ dla $r = 0, 1, \dots, R$. W każdym elemencie $\bar{\Omega}_j = \Omega_j \times \langle t_0, t_0 + \Delta t \rangle$, gdzie dla ustalonego r jest $t_0 = r\Delta t$, rozwiązanie przybliżone równania (7.1) przyjęto w postaci kombinacji liniowej funkcji Trefftza:

$$\tilde{T}_j(x, y, t) = \sum_{n=1}^N A_{jn} v_n(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}),$$

gdzie: $\hat{x} = x - x_{0j}$, $\hat{y} = y - y_{0j}$, $\hat{t} = t - t_{0j}$, (x_{0j}, y_{0j}, t_{0j}) – dowolny, ale ustalony punkt należący do $\bar{\Omega}_j$ (najczęściej środek elementu $\bar{\Omega}_j$), $v_n(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$ – funkcje Trefftza (wielomiany ciepłne) opisane wzorami (3.35), A_{jn} – współczynniki, które należy wyznaczyć.

Sposób rozwiązania zagadnienia jest uogólnieniem metody zaprezentowanej w pracy [A85] i sprowadza się do sekwencyjnego rozwiązywania tego zagadnienia w kolejnych przedziałach czasowych.

W elemencie $\bar{\Omega}_j$ ustala się liczbę odpowiednio ułożonych węzłów. Każdemu węzłowi przyporządkowuje się trzy współrzędne (x_k, y_k, t_k) . W celu wyznaczenia stałych A_{jn} , przy założeniu, że znane są temperatury w węzłach elementu skończonego $\bar{\Omega}_j$, rozwiązuje się układ równań:

$$\tilde{T}_j(x_k, y_k, t_k) = T_{jk} = \sum_{n=1}^N A_{jn} v_n(\hat{x}_k, \hat{y}_k, \hat{t}_k), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

który w postaci macierzowej można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} v_1(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{t}_1) & v_2(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{t}_1) & \cdots & v_N(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{t}_1) \\ v_1(\hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{t}_2) & v_2(\hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{t}_2) & \cdots & v_N(\hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{t}_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1(\hat{x}_N, \hat{y}_N, \hat{t}_N) & v_2(\hat{x}_N, \hat{y}_N, \hat{t}_N) & \cdots & v_N(\hat{x}_N, \hat{y}_N, \hat{t}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \cdots \\ A_{jN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{j1} \\ T_{j2} \\ \cdots \\ T_{jN} \end{bmatrix}$$

lub

$$[v][A] = [T].$$

Po odwróceniu macierzy $[v]$ otrzymuje się:

$$[A] = [v]^{-1}[T] = [V][T], \quad A_{jn} = \sum_{k=1}^N V_{nk} T_{jk}$$

Stąd uzyskuje się funkcje bazowe φ_j charakterystyczne dla elementu $\overline{\Omega}_j$:

$$\tilde{T}_j(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=1}^N V_{nk} T_{jk} \right) v_n(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) = \sum_{k=1}^N \varphi_{jk}(x, y, t) T_{jk},$$

gdzie $\varphi_{jk}(x, y, t) = \sum_{n=1}^N V_{nk} v_n(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$.

Funkcje bazowe mają następujące własności:

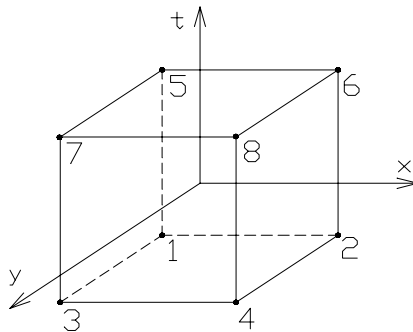
$$1. \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi_{jk}(x, y, t) = 0.$$

$$2. \varphi_{jk}(x_m, y_m, t_m) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

gdzie (x_m, y_m, t_m) – węzły elementu $\overline{\Omega}_j$, $k, m = 1, \dots, N$.

$$3. \sum_{k=1}^N \varphi_{jk}(x, y, t) \equiv 1.$$

W celu przybliżonego rozwiązania zagadnienia identyfikacji źródła, została w obszarze $\overline{\Omega} = \Omega \times \langle t_0, t_0 + \Delta t \rangle$ wprowadzona siatka prostokątna równoległa do osi układu współrzędnych, powstała z podziału odcinka osi OX na $L1$ części, a odcinka osi OY na $L2$ części. W każdym prostopadłościennym elemencie $\overline{\Omega}_j$ obrany został przedstawiony na rysunku 7.3 układ ośmiu węzłów położonych w wierzchołkach elementów. W całym obszarze $\overline{\Omega}$ jest więc $2(L1+1)(L2+1)$ węzłów.



Rys. 7.3. Ułożenie ośmiu węzłów w elemencie

Temperatura w każdym ośmiowęzłowym elemencie wyraża się zależnością:

$$\tilde{T}_j(x, y, t) = \sum_{k=1}^8 \varphi_{jk}(x, y, t) T_{jk}, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, L_1 \times L_2.$$

Funkcje bazowe φ_{jk} spełniają równanie (7.1) w sposób ścisły. Należało zatem dopasować rozwiązanie przybliżone do warunków początkowo-brzegowych oraz zminimalizować różnicę pomiędzy strumieniem ciepła wypływającym z elementu a wpływającym do sąsiedniego elementu. Żądano przy tym zgodności temperatury w węzłach i zgodności strumieni ciepła (w sensie średniokwadratowym) wzdłuż wspólnych wewnętrznych brzegów pomiędzy elementami. Zagadnienie to rozwiązywano sekwencyjnie w kolejnych przedziałach czasowych $\langle r \Delta t, (r+1)\Delta t \rangle$ dla $r = 0, 1, \dots, R$.

Funkcjonał celu ma postać:

$$\begin{aligned} J = & \sum_i \iint_{D_1^i} \left(\tilde{T}_{l_i}(x, y, t_0) - T_0 \right)^2 dx dy + \sum_i \iint_{D_2^i} \left(\frac{\partial \tilde{T}_{l_i}}{\partial y}(x, 0, t) \right)^2 dx dt + \\ & + \sum_i \iint_{D_3^i} \left(\tilde{T}_{l_i}(0, y, t) - \tilde{T}_{k_i}(l, y, t) \right)^2 dy dt + \\ & + \sum_i \iint_{D_3^i} \left(\frac{\partial \tilde{T}_{l_i}}{\partial y}(0, y, t) - \frac{\partial \tilde{T}_{k_i}}{\partial y}(l, y, t) \right)^2 dy dt + \\ & + \sum_i \sum_j \iint_{D_4^{i,j}} \left(\frac{\partial \tilde{T}_{l_i}}{\partial x}(x_j, y, t) - \frac{\partial \tilde{T}_{k_i}}{\partial x}(x_j, y, t) \right)^2 dy dt + \\ & + \sum_i \sum_j \iint_{D_5^{i,j}} \left(\frac{\partial \tilde{T}_{l_i}}{\partial y}(x, y_j, t) - \frac{\partial \tilde{T}_{k_i}}{\partial y}(x, y_j, t) \right)^2 dx dt + \\ & + \sum_p \left(\tilde{T}(x_p, y_p, t_p) - W_p \right)^2. \end{aligned}$$

gdzie:

$$\bigcup_{i=1} D_1^i = \left\{ (x, y, t_0) \in R^3 : 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq b \right\},$$

$$\bigcup_{i=1} D_2^i = \left\{ (x, 0, t) \in R^3 : 0 \leq x \leq l, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t \right\},$$

$$\bigcup_i D_3^i = \{(0, y, t) \in R^3 : 0 \leq y \leq b, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t\},$$

$$\bigcup_j \bigcup_i D_4^{i,j} = \bigcup_j \{(x_j, y, t) \in R^3 : 0 \leq y \leq b, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t\},$$

$$\bigcup_j \bigcup_i D_5^i = \bigcup_j \{(x, y_j, t) \in R^3 : 0 \leq x \leq l, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t\}.$$

Składniki funkcjonału (którego minimalizacja pozwoliła wyznaczyć przybliżony rozkład temperatury w obszarze), odpowiadają kolejno warunkom początkowemu i brzegowym w każdym przedziale czasowym. Ostatnie dwa składniki odpowiadają tzw. warunkom szczytia na powierzchniach pomiędzy elementami.

Po znalezieniu rozkładu temperatury w rozważanym obszarze wyznacza się strumień ciepła na brzegu $y = b$ liczbowo równy wartości pochodnej temperatury po zmiennej y na tym brzegu, tzn. $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(x,b,t)}$, pomnożonej przez jedynkę o wymia-

rze [W/mK]. Jednostką tak otrzymanego strumienia ciepła jest [W/m²].

Do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe:

$$\lambda = 45 \text{ W/mK}, a = 0,119 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \bar{l} = 0,5 \text{ m}, \quad \bar{b} = 0,05 \text{ m},$$

$$\bar{w} = 0,15 \text{ m}, \quad \bar{v} = 0,01 \text{ m/s}, \quad \theta_0 = 293 \text{ K}, \quad Q = 300.$$

Punkty pomiarowe umieszczono w węzłach elementów skończonych na dwóch poziomach, w odległości 0,005 m i 0,01 m od brzegu, na którym działało źródła ciepła. Liczba punktów pomiarowych zależała od liczby elementów skończonych. W przykładzie numerycznym rozpatrzono dwa warianty, gdy obszar podzielony został na 400 czasoprzestrzennych elementów ośmiowęzłowych oraz na 800 elementów ośmiowęzłowych. Przy podziale obszaru na 400 elementów skończonych liczba punktów pomiarowych wynosiła 82, zaś przy podziale na 800 elementów skończonych – punktów pomiarowych było 162. Obliczenia wykonane zostały dla pierwszych sześciu przedziałów czasowych ze stałym krokiem czasowym wynoszącym $\Delta t = 1,05 \text{ s}$. Wartości temperatury wygenerowane z rozwiązania dokładnego zaburzone zostały błędem losowym o rozkładzie normalnym $N(0; 0,01)$.

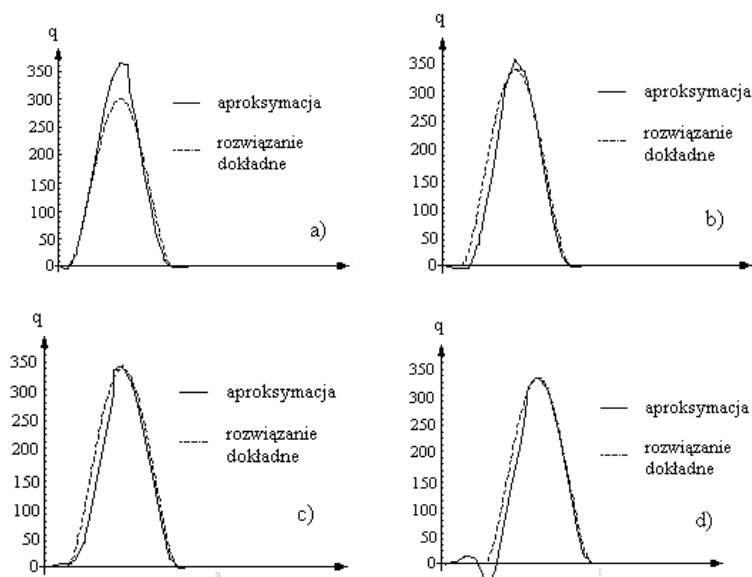
Porównano rozwiązania dokładne i przybliżone na powierzchni $y = b$ w chwilach kończących przedziały czasowe poprzez obliczenie błędu względnego, zgodnie ze wzorem:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\int_0^l \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \Big|_{(x,b,t_k)} - q(x,t_k) \right)^2 dx}{\int_0^l (q(x,t_k))^2 dx}}, \quad (7.3)$$

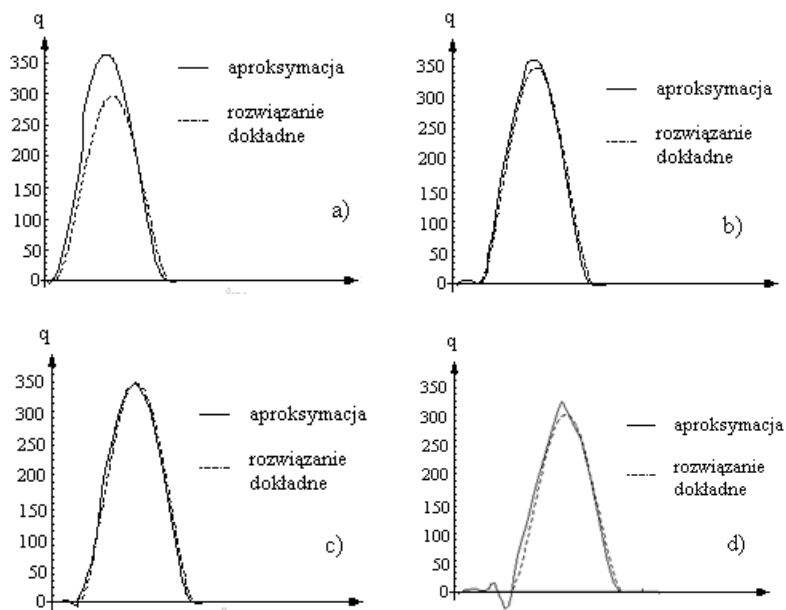
w którym $\tilde{T}$ oznacza aproksymatę temperatury otrzymaną metodą elementów skończonych, zaś q ma takie znaczenie, jak we wzorze (7.2).

Na rysunkach od 7.4a do 7.4d oraz od 7.5a do 7.5d przedstawiono przybliżone i dokładne rozkłady gęstości strumienia na brzegu $y = b$ w chwilach kończących pierwszy, drugi, trzeci i szósty przedział czasowy. Rozkłady przybliżone otrzymane zostały metodą elementów skończonych przy podziale obszaru na 400 elementów (rysunki od 7.4a do 7.4d) oraz przy podziale na 800 elementów (rysunki od 7.5a do 7.5d). Rozkłady dokładne określone są wzorem (7.2). Na wszystkich rysunkach linią ciągłą naszkicowano przybliżony rozkład gęstości strumienia ciepła, natomiast linią przerywaną zaznaczono wykres dokładny.

W tablicy 7.1 przedstawiono zestawienie błędów identyfikacji gęstości strumienia ciepła na brzegu obszaru powstałego pod wpływem działania ruchomego źródła ciepła. Błędy względne obliczone zostały ze wzoru (7.3) w chwilach kończących kolejne przedziały czasowe.



Rys. 7.4. Rozkład gęstości strumienia ciepła na brzegu $y = b$ w chwili t równej: a) 1,05 s, b) 2,1 s, c) 3,15 s, d) 6,3 s przy podziale obszaru na 400 elementów



RYS. 7.5. Rozkład gęstości strumienia ciepła na brzegu $y = b$ w chwili t równej: a) 1,05 s, b) 3,15 s, c) 4,2 s, d) 6,3 s przy podziale obszaru na 800 elementów

TABLICA 7.1. Wartości błędów względnych gęstości strumienia ciepła na brzegu $y = b$ w chwilach kończących kolejny przedział czasowy

Czas	Podział obszaru na 400 elementów	Podział obszaru na 800 elementów
$t = 1,05 \text{ s}$	$\sigma = 16\%$	$\sigma = 26\%$
$t = 2,1 \text{ s}$	$\sigma = 15\%$	$\sigma = 11\%$
$t = 3,15 \text{ s}$	$\sigma = 14\%$	$\sigma = 7\%$
$t = 4,2 \text{ s}$	$\sigma = 18\%$	$\sigma = 6\%$
$t = 5,25 \text{ s}$	$\sigma = 12\%$	$\sigma = 7\%$
$t = 6,3 \text{ s}$	$\sigma = 13\%$	$\sigma = 9\%$

Przedstawiony przykład pokazuje, że funkcje Trefftza (wielomiany ciepłne) nadają się do konstruowania czasoprzestrzennych funkcji kształtu w metodzie elementów skończonych w celu identyfikacji gęstości strumienia ciepła powstałego na skutek nagrzewania ciała ruchomym źródłem ciepła. Najgorsze wyniki otrzymuje się dla pierwszego przedziału czasowego, z czego wynika, że powinien on być krótszy od pozostałych.

Po wykonaniu wielu eksperymentów numerycznych polegających na różnych podziałach obszaru $\Omega \times \langle 0, t \rangle$, przedstawiony w rozwiązaniu podział obszaru na 800 elementów daje wyniki nie różniące się znacznie od dokładnych. Dla źródła poruszającego się z większą prędkością konieczne jest dalsze rozdrobnienie obszaru. Podobnie, jeśli poruszające się źródło ma mniejsze rozmiary, to siatka elementów skończonych musi być gęstsza. Przedstawione rozwiązanie dotyczy obszaru prostokątnego, lecz oczywiście jest, że można je skonstruować dla obszarów o bardziej złożonych kształtach.

8. Uwagi końcowe

Pierwsze 10 lat badań zastosowania metody Trefftza dla niestacjonarnych zagadnień odwrotnych wskazało kilka ważnych kierunków badawczych.

Wydaje się, że – podobnie jak to się stało z metodą Trefftza dla zagadnień stacjonarnych – konieczne jest przeprowadzenie szeroko zakrojonych badań dotyczących metody elementów skończonych z funkcjami Trefftza jako funkcjami bazowymi. Jest to szczególnie ważne przy zastosowaniach MEST do zagadnień odwrotnych, co pokazuje zarówno przykład przedstawiony w rozdziale siódmym, jak i badania przeprowadzone w pracy [M06a]. Problem elementów skończonych czasoprzestrzennych trzeba – jak się wydaje – powiązać z rodzajem równań niestacjonarnych, dla których będą budowane, i z funkcjami Trefftza dla tych równań. Zagadnienie wielkości kroku czasowego (długości „boku” mierzonej na osi bezwymiarowego czasu) jest kluczowe szczególnie dla zagadnień dotyczących równań falowych, co bardzo wyraźnie uwidoczniło się w pracach Maciąga [M09, M09a].

W zakresie zastosowań dla niestacjonarnych zagadnień odwrotnych dotychczas głównie rozwijana była jedna z metod pośrednich Trefftza, a mianowicie podejście wykorzystujące metodę najmniejszych kwadratów, często w połączeniu z metodą elementów skończonych. Była ona uzupełniana członami regularyzującymi, wynikającymi – jak to miało miejsce w przypadku rozważań zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła – z fizyki zagadnienia. Stosowano też z powodzeniem bezwęzłową metodę elementów skończonych z członami minimalizującymi skok poszukiwanego przybliżonego rozwiązania na granicy elementów. Okazało się, że odejście od konieczności przyjmowania w węzłach elementów takich samych wartości przez rozwiązania w poszczególnych elementach i zastąpienie tego wymogu warunkiem minimalizacji skoku wartości funkcji i ewentualnie wartości jej pochodnej normalnej na granicach pomiędzy elementami, pozwoliło zmniejszyć błąd rozwiązania, przy czym same nieciągłości wynikające z zastosowanej metody okazały się bardzo nieznaczne. Równie obiecująca okazała się metoda bezwęzłowa, w której także warunek równości wartości poszukiwanej funkcji w węzłach (których w tej metodzie nie ma) zastąpiono warunkiem minimalizacji skoku wartości funkcji i jej pochodnych normalnych na granicach pomiędzy elementami. Przy okazji pojawił się bardzo ważny i wymagający gruntownych badań problem złego uwa-

runkowania macierzy układu równań, wynikającego z warunku minimalizacji funkcjonału celu – jest to więc kolejny obszar badawczy, związany z zastosowaniem funkcji Trefftza w rozwiązywaniu zagadnień niestacjonarnych.

Niewiele jest prac badających wykorzystanie metody Trefftza w przypadku zagadnień niestacjonarnych w obszarach wielospójnych. Można tu wymienić tylko kilka prac Ciałkowskiego i współautorów.

W chwili obecnej brak jest zupełnie artykułów o charakterze podstawowym, teoretycznym, napisanych przez matematyków. W zakresie zagadnień *stricte* niestacjonarnych nie występuje jeszcze, zauważalny w odniesieniu do metody Trefftza dla zagadnień stacjonarnych, podział autorów na „inżynierów” i „matematyków” (por. [KK95a, L98, CC05, LLHC07]) czy też raczej podział artykułów na aplikacyjne i teoretyczne. Wynika to zapewne także z szybkości „dyfuzji” nowych idei do umysłów badaczy. Pomysł Trefftza z 1926 roku potrzebował, nie licząc pracy Rosenbloom i Widdera z 1956 roku, około 50 lat, aby spowodować lawinę artykułów, rozwijających go. Wydaje się jednak, że konieczność coraz dokładniejszego rozwiązywania zagadnień opisanych równaniami zawierającymi czas spowoduje zarówno odejście od metod sprowadzających zagadnienia niestacjonarne do pseudo-ustalonych (metodami różnic skończonych, założenia rozwiązania w postaci szeregu Fouriera lub w postaci funkcji periodycznych, wykorzystania reprezentacji zawierających zmienną czasową w wykładniku funkcji eksponencjalnej i innych), jak i dalsze rozwinięcie metody elementów skończonych z funkcjami Trefftza i elementami czasoprzestrzennymi, co może przyczynić się do powstania nowych metod rozwiązywania zagadnień opisanych równaniami nieliniowymi.

Cykliczne konferencje i spotkania poświęcone rozwojowi metody Trefftza odbywają się od roku 1997. Bardzo wiele artykułów poświęconych różnym aspektom tej metody można więc co dwa lata przedyskutować w gronie osób, które mają dorobek i doświadczenie w tym zakresie. Dalszy rozwój tej metody, między innymi w odniesieniu do zagadnień niestacjonarnych, w tym do zagadnień odwrotnych, jest więc tylko kwestią czasu, potrzeb i rozwoju metod numerycznych.

Bibliografia

- [A85] J. Ascough, *A single step finite element analysis of the temperature distribution around a moving laser heat source*. Optics and Laser in Eng. 6, 137-143, 1985.
- [A94] O.M. Alifanov, *Inverse Heat Transfer Problems*. Springer, 1994.
- [A95] H.-M. Adorf, *Hubble space telescope image restoration in its fourth year*. Inverse Problems 11, 639-653, 1995.
- [A97] Ju.N. Anikonov, *Formulas in inverse and ill-posed problems*. VSP BV, The Netherlands, 1997.
- [ABB99] S. Andrieux, A. Ben Abda, H.D. Bui, *Reciprocity principle and crack identification*. Inverse Problems 15, 59-65, 1999.
- [ABVD08] K. Atchonouglo, M. Banna, C. Vallee, J-C. Dupre, *Inverse transient heat conduction problems and identification of thermal parameters*. Heat Mass Transfer 45, 23-29, 2008.
- [AGM08] M.J. Al-Khatib, K. Grysa, A. Maciag, *The method of solving polynomials in the beam vibration problems*. J. Theoret. Appl. Mech. 46, 2, 347-366, 2008.
- [AHD99] C.J.S. Alves, T. Ha Duong, *Inverse scattering for elastic plane cracks*. Inverse Problems 15, 91-97, 1999.
- [AJ01] R. Abou Khachfe, Y. Jarny, *Determination of heat sources and heat transfer coefficient for two-dimensional heat flow - numerical and experimental study*. Int. J. Heat Mass Transfer 44, 1309-1322, 2001.
- [AK00] M.R. Akella, G.R. Kotamraju, *Trefftz indirect method applied to nonlinear potential problems*. Eng. Anal. Bound. Elem. 24, 459-465, 2000.
- [AK04] H. Ammari, H. Kang, *Reconstruction of Small Inhomogenities from Boundary Measurements*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1846, Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.
- [AM09] C.J. S. Alves, N.F. M. Martins, *The direct method of fundamental solutions and the inverse Kirsch-Kress method for the reconstruction of elastic inclusions or cavities*. J. Int. Eqs and Appl. 21, 2, 153-178, 2009.
- [ANZ04] V. Asokan, B. Narayanan, N. Zabaras, *Stochastic inverse heat conduction using a spectral approach*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 60, 1569-1593, 2004.
- [AP96] N.D. Aparicio, M.K. Pidcock, *The boundary inverse problem for the Laplace equation in two dimensions*. Inverse Problems 12, 565-577, 1996.
- [ARR05] L. Autrique, N. Ramdani And S. Rodier, *Mobile source estimation with an iterative regularization method*. Proc. 5th Int. Conf. Inv. Probl. in Eng., Cambridge, UK, 11-15th July 2005.
- [AS72] M. Abramowitz, I.A. Stegun, (Eds.). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing. New York, Dover, 1972.
- [AS97] N. Al-Khalidy, J. Skorek, *Applying of Kalman Filter Method for Solving Inverse Thermal Problems*. Bul. of Polish Acad. of Sci. THERMODYNAMICS 45, 1-2, 87-98, 1997.
- [ATB05] R.C. Aster, C.H. Thurber, B. Borchers, *Parameter estimation and inverse problems*. Elsevier Academic Press, 2005.
- [B02] C. Bodyajiev, *Incorrect inverse problem connected with the parameter identification of the heat and mass transfer models*. Thermal Science 6, 23-28, 2002.
- [B57] D.R. Bartz, *A simple equation for rapid estimation of rocket nozzle convective heat transfer coefficients*. Jet Propulsion 27, 49-51, 1957.

- [B64] O.R. Burggraf, *An exact Solution of the Inverse Problem in Heat Conduction Theory and Application*. Trans. ASME J. Heat Transfer 86, 373–382, 1964.
- [B78] C.A. Brebbia, *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, 1978.
- [B79] J.V. Beck, *Criteria for comparison of methods of solution of the inverse heat conduction problem*. Nucl. Eng. Design 53, 11–22, 1979.
- [B87] J. Baumeister, *Stable Solution of Inverse Problems*. Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [B87a] H. Brakhage, *On Ill-Posed Problems and the Method of Conjugate Gradients*. Inverse and Ill-Posed Problems, pp. 165–175, Engl, H.W. and Groetsch, C. W. eds., Academic Press, New York, 1987.
- [B95] J.V. Beck, *Function specification method for solution of the inverse heat conduction problem*. pp. 1–20. In: *Inverse problems in diffusion processes: Proceedings of the GAMM SIAM Symposium*, eds. H.W. Engl, W. Rundell, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.
- [B95a] N.D. Botkin, *Identification of unknown parameters from heat conductivity equations*. Numer. Funct. Anal. Optimiz. 16, 5–6, 583–599, 1995.
- [BBC85] J.V., Beck, B. Blackwell, C. St. Clair, *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. Wiley-Interscience Publication, New York, 1985.
- [BBP03] P.J. Bendeich, J.M. Barry, W. Payten, *Determination of specific heat with a simple inverse approach*. Appl. Math. Mod. 27, 337–344, 2003.
- [BBS85] J.V. Beck, B. Blackwell and C.R. St-Clair Jr., *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. Wiley Intersciences, New York, 1985.
- [BC05] M. Bonnet, A. Constantinescu, *Inverse problems in elasticity*. Inverse Problems 21, R1–R50, 2005.
- [BCL96] A.F. Bennett, B.S. Chua and L.M. Leslie, *Generalized inversion of a global numerical weather prediction model*. Meteorology and Atmospheric Physics 60, 1–3, 165–178, 1996.
- [BD02] T. Burczyński, A. Długosz, *Application of Boundary Element Method in Identification Problems of Thermoelasticity*. Electr. J. Bound. Elem., 3, 291–302, 2002.
- [BG95] A. Bakushinskii and A. Goncharsky, *Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [BHP97] M. Bouberechene, C. Hochard, A. Poitou, *Domain optimisation using Trefftz functions - application to free boundaries*. Comp. Ass. Mech. Eng. Sci. CAMES 4, 317–326, 1997.
- [BHTY06] A. Böttcher, B. Hofmann, U. Tautenhahn, Y. Yamamoto, *Convergence rates for Tikhonov regularization from different kinds of smoothness conditions*. Applicable Analysis 85, 555 – 578, 2006.
- [BIJL09] D. Borman, D.B. Ingham, B.T. Johansson, D. Lesnic, *The method of fundamental solutions for detection of cavity in EIT*. J.Int. Eqs and Appl. 21, 3, 381–404, 2009.
- [BJK05] B.M. Brown, M. Jais, I.W. Knowles, *A variational approach to an elastic inverse problem*. Inverse Problems 21, 1953–1973, 2005.
- [BLM06] L. Baratchart, J. Leblond, J.-P. Marmorat, *Inverse Source Problem in a 3D Ball from Best Meromorphic Approximation on 2D Slices*. Electr. Trans. Num. Anal. 25, 41–53, 2006.
- [BM97] C. Bernardi, Y. Maday, *Spectral method*. In: *Techniques of scientific computing (part 2)*. (eds: P.G. Ciarlet, J.L. Lions), North-Holland, 209–485, 1997.
- [BMCG92] E. Bayo, H. Moulin, O. Cristalle, G. Gimenez, *Well-conditioned numerical approach for the solution of the inverse heat conduction problem*. Num. Heat Transfer, B, 21, 79–98, 1992.

- [BPF01] F.L.S. Bussamra, P.M. Pimenta, J.A.T. Freitas, *Hybrid-Trefftz stress elements for three-dimensional elastoplasticity*. Comp. Ass. Mech. Eng. Sci. CAMES 8, 235-246, 2001.
- [BRT98] G. Blanc, M. Raynaud, The Hiep Chau, *A guide for the use of the function specification method for 2D inverse heat conduction problems*. Revue Générale de Thermique 37, 1, 17-30, 1998.
- [BSK04] K.L. Berrier, D.C. Sorensen, D.S. Khoury, *Solving the inverse problem of electrocardiography using a Duncan and Horn formulation of the Kalman filter*. IEEE Trans. Biomed. Eng. 51, 3, 507-515, 2004.
- [BS87] M.A. Bravo, F.J. Sanchez-Sesma, *Trefftz's Method for Vibration of Rigid Plate*. J. Eng. Mech. 113, 6, 885-892, 1987.
- [BY09] G. Bao, K. Yun, *On the stability of an inverse problem for the wave equation*. Inverse Problems 25, 4, doi: 10.1088/0266-5611/25/4/045003, (7pp), 2009.
- [C00] S. Chantasiriwan, *Boundary Element Method for Solving the Two-dimensional Time-dependent Inverse Heat Conduction Problem*. Thammasat I. J. Sc. Tech. 5, 2, 64-71, 2000.
- [C00a] C. Cismasiu, *The Hybrid-Trefftz displacement element for static and dynamic structural analysis problems*. Rozprawa doktorska, Instituto Superior Tecnico, Lisboa, 2000.
- [C01] M.J. Ciałkowski, *Trefftz functions as basic functions of FEM in application to solution of inverse heat conduction problem*. Comp. Ass. Mech. Eng. Sci. CAMES 8, 2-3, 247-260, 2001.
- [C02] M.J. Ciałkowski, *New Type of Basic Functions of FEM in Application to Solution of Inverse Heat Conduction Problems*. J. of Thermal Science 11, 2, 163-171, 2002.
- [C04] M.J. Ciałkowski, *Application of the Principle of Minimal Entropy Production to Solving an Integral Inverse Heat Conduction Problem*. Proc. Int. Symp. Trends in Continuum Physics. TRECOP'04, Poznań, Poland, 17-19 November 2004 (red.: Maruszewski B.T.), Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 72-86, 2004.
- [C04a] M.J. Ciałkowski, *Zastosowanie zasady minimum produkcji entropii do rozwiązania zagadnienia odwrotnego przewodzenia ciepła*. XII Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy, Kraków, 15-18 czerwca 2004. Wyd. AGH., T. 1, 183-198, 2004.
- [C05] M.J. Ciałkowski, *Application of the principle of minima entropy production and minima energy dissipation to solving an integral and Cauchy inverse heat conduction problem*. EURO THERM 82, pp. 993-1004, Num. Heat Transfer, eds. A.J. Nowak, R.A. Bialecki, G. Węcel, 2005.
- [C94] A.C. Chiang, *Podstawy ekonomii matematycznej*. PWE, Warszawa, 1994.
- [C97] Yun Chin, *An experimental study on flow boiling in a narrow channel: from convection to nucleate boiling*. University of Houston, Ph.D. Thesis, 1997.
- [C98] M.J. Ciałkowski, *Rozwiązywanie zagadnień przewodnictwa ciepła za pomocą wielomianów cieplnych*. Raporty Katedry Techniki Ciepłej Politechniki Poznańskiej, 1, 1-28, Poznań, 1998.
- [C99] M.J. Ciałkowski, *Solution of inverse heat conduction problem with use new type of finite element base functions*. In: Proc. Int. Symp. on Trends in Cont. Phys. (eds: B.T. Maruszewski, W. Muschik, A. Radowicz), World Scientific Publishing, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 64-78, 1999.
- [CC05] A.H.-D. Cheng, D.T. Cheng, *Heritage and early development of boundary element*. Eng. Anal. Bound. Elem. 29, 268-302, 2005.
- [CDJP01] A. Cimetiere, F. Delvare, F. Jaoua, F. Pons, *Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization*. Inverse Problems 17, 553-570, 2001.

- [CEJ04] S. Chaabane, C. Elhechmi, M. Jaoua, *A stable recovery method for the Robin inverse problem*. Math. Comp. Simul. 66, 367–383, 2004.
- [CELMR00] D.L. Colton, H.W. Engl, A.K. Louis, J.R. McLaughlin, W. Rundell, *Surveys on solution methods for inverse problems*. Springer, Wien, New York, 2000.
- [CF00] M.J. Ciałkowski, A. Frąckowiak, *Funkcje cieplne i ich zastosowanie do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła i mechaniki*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2000.
- [CF02] M.J. Ciałkowski, A. Frąckowiak, *Solution of the stationary 2D inverse heat conduction problem by Trefftz Method*. Journal of Thermal Science 11, 2, 148–162, 2002.
- [CF03] M.J. Ciałkowski, A. Frąckowiak, *Funkcje cieplne i pokrewne w rozwiązywaniu wybranych równań mechaniki, Część I. Rozwiązywanie niektórych równań różniczkowych za pomocą operacji odwrotnych*. Uniwersytet Zielonogórski, Studia i Materiały, Technika 3, 7–70, Zielona Góra 2003.
- [CF03a] M.J. Ciałkowski, A. Frąckowiak, *Funkcje cieplne i pokrewne w rozwiązywaniu wybranych równań mechaniki, Część II. Efektywne wyznaczanie operacji odwrotnych z funkcji harmonicznych*. Uniwersytet Zielonogórski, Studia i Materiały, Technika 3, 71–98, Zielona Góra 2003.
- [CF03b] M.J. Ciałkowski, A. Frąckowiak, *Lösung des inversen Problems für Wärmeleitung unter Anwendung des inversen Laplace-Operators*. Proc. Appl. Math. Mech. PAMM 2, 358–359, 2003.
- [CF06] M.J. Ciałkowski, A. Frąckowiak, *Analiza numerycznego defektu energii, natężenia produkcji entropii i dyssypacji energii rozwiązywania prostego i odwrotnego zagadnienia stacjonarnego przewodzenia ciepła*. Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Maszyny Robocze i Transport 61, 39–57, 2006.
- [CFG07] M.J. Ciałkowski, A. Frąckowiak, K. Grysa, *Physical regularization for inverse problems of stationary heat conduction*. J. Inv. Ill-Posed Problems 15, 4, 347–364, 2007.
- [CFG07a] M.J. Ciałkowski, A. Frąckowiak, K. Grysa, *Solution of a stationary inverse heat conduction problem by means of Trefftz non-continuous method*. Int. J. Heat Mass Transfer 50, 2170–2181, 2007.
- [CFH99] M.J. Ciałkowski, S. Futakiewicz, L. Hożejowski, *Method of heat polynomials in solving the inverse heat conduction problems*. ZAMM 79, 709–710, 1999.
- [CFH99a] M.J. Ciałkowski, S. Futakiewicz, L. Hożejowski, *Heat polynomials applied to direct and inverse heat conduction problems*. In: *Proc. Int. Symp. on Trends in Cont. Phys.* (eds: B.T. Maruszewski, W. Muschik, A. Radowicz), World Scientific Publishing, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 79–88, 1999.
- [CFK01] M.J. Ciałkowski, A. Frąckowiak, J.A. Kołodziej, *Investigation of laminar flow through solution of inverse problem for heat conduction equation*. Mech. Res. Comm. 28, 6, 623–628, 2001.
- [CFR01] M.J. Ciałkowski, A. Frąckowiak, M. Raddatz, *Determination of heat transfer coefficient at the surface of a solid in the ground of an inverse problem solution by means of heat functions*. Proc. of the Fifth Int. Symp. on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows. 1, 547–554, Gdańsk, 2001.
- [CFS03] M.J. Ciałkowski, A. Frąckowiak, M. Sokała, *Trefftz-Funktionen für Gleichung der instationären Wärmeleitung. Lösung des inversen Problems*. Proc. Appl. Math. Mech PAMM 3, 376–377, 2003.
- [CG01] M.T. Chu, G. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems: Theory and Applications*. A Series of Lectures Presented at IRMA, CNR, Bari, Italy; Department of Mathematics, North Carolina State University, 2001.

- [CG10] M.J. Ciałkowski, K. Grysa, *A sequential and global method of solving an inverse problem of heat conduction equation*. J. Theoret. Appl. Mech. 48, 1, 1-24, 2010.
- [CG80] M.J. Ciałkowski, K. Grysa, *On a certain inverse problem of temperature and thermal stresses fields*. Acta Mechanica, 36, 169-185, 1980.
- [CGML04] H.A. Cho, M.A. Golberg, A.S. Muleshkov, Xin Li, *Trefftz Methods for Time Dependent Partial Differential Equations*. J. of Computers, Materials, and Continua 1, 1, 1-37, 2004.
- [CJ03] M.J. Ciałkowski, M. Jarosławski, *Zastosowanie obliczeń symbolicznych do generowania rozwiązania równania falowego*. Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, Seria Maszyny Robocze i Transport, 56, 115-140, 2003.
- [CJ59] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*. Oxford at the Clarendon Press, 1959.
- [CJZ89] Y.K. Cheung, W.G. Jin, O.C. Zienkiewicz, *Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions*. Comm. Num. Meth. Eng. 5, 3, 159-169, 1989.
- [CK97] D. Colton, R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2nd ed., 1997.
- [CKS08] C.S. Chen, A. Karageorghis, Y.S. Smyrlis, eds., *The Method of Fundamental Solutions – A Meshless Method*. Dynamic Publishers, Inc., Atlanta, 2008.
- [CL08] J. Cheng J.J. Liu, *A quasi Tikhonov regularization for a two-dimensional backward heat problem by a fundamental solution*. Inverse Problems 24, 065012 (18pp) 2008.
- [CLKY03] J.-R. Chang, R.-F. Liu, S.-R. Kuo, W. Yeih, *Application of symmetric indirect Trefftz method to free vibration problems in 2D*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 56, 1175-1192, 2003.
- [CLS09] J.T. Chen, Y.T. Lee, S.C. Shieh, *Revisit of two classical elasticity problems by using the Trefftz method*. Eng. Anal. Bound. Elem. 33, 890-895, 2009.
- [D66] J.M. Davies, *Input power determined from temperatures in a simulated skin protected against thermal radiation*. Trans. ASME, J. Heat Transfer 88, 154-160, 1966.
- [D90] E.H. Doha, *An accurate solution of parabolic equations by expansion in ultraspherical polynomials*. Comp. Math. Appl. 19, 4, 75-88, 1990.
- [D94] Ding Nho Hao, *A mollification method for ill-posed problems*. Numer. Math 68, 469-506, 1994.
- [D95] Dai Hua, *About an inverse eigenvalue problem arising in vibration analysis*. Math. Modelling and Num. Analysis 29, 4, 421-434, 1995.
- [D98] Dinh Nho Hao, *Methods for Inverse Heat Conduction Problems*. Peter Lang Verlag, Frankfurt/Main, Bern, New York, Paris, 1998.
- [D99] A.M. Denisov, *Elements of the theory of inverse problems*. VSP BV, Utrecht-Tokyo 1999.
- [DDY04] B.H. Dennis, G.S. Dulikravich, S. Yoshimura, *A Finite Element Formulation for the Determination of Unknown Boundary Conditions for 3-D Steady Thermoelastic Problems*. ASME J. Heat Transfer 126, 110-118, 2004.
- [DHS97] T. Doi, S. Hayano, Y. Saito, *Wavelet solution to the inverse source problem*. IEEE Trans. of Magnetics 33, 2, 1935-1938, 1997.
- [DKKC05] E. Divo, A.J. Kassab, J.S. Kapat, M.-K. Chyu, *Retrieval of multidimensional heat transfer coefficient distributions using an inverse BEM-based regularized algorithm: numerical and experimental results*. Eng. Anal. Bound. Elem. 29, 150-160, 2005.

- [DMAU08] R. Dasa, S.C. Mishraa, M. Ajithb, R. Uppaluri, *An inverse analysis of a transient 2-D conduction–radiation problem using the lattice Boltzmann method and the finite volume method coupled with the genetic algorithm*. J. of Quant. Spectr. and Radiative Transfer 109, 2060-2077, 2008
- [DMD99] G.S. Dulikravich, T.J. Martin, B.H. Dennis, *Multidisciplinary inverse problems*. 3rd Int. Conf. on Inv. Probl. in Eng., Proceedings, June 13-18, 1999, Port Ludlow, USA, 1999.
- [DS05] A.M. Denisov, S.I. Solov'eva, *Iterative Method of Solving the Inverse Problem for a Quasilinear Hyperbolic Equation*. Comp. Math. Mod. 16, 3. 193-198, 2005.
- [E07] H.W. Engl, *Calibration problems – an inverse problems view*. Wilmott Magazine, p.16-20, <http://www.unrisk.com/download/Calibration%20July%2007.pdf>
- [E90] G.A. Erokhin, *Application of the image method in electrodynamic synthesis problems*. Radiophysics and Quantum Electronics 33, 2, 166-172, 1990.
- [E99] A.F. Emery, *Stochastic regularization for thermal problems with uncertain parameters*. Proc. 3rd Int. Conf. Inv. Probl. in Eng., Port Ludlow, June 13-18, 1999.
- [EBR99] L. Elden, F. Berntsson, T. Regińska, *Wavelet and Fourier Methods for Solving the Sideways Heat Equation*. SIAM J. on Scientific Computing 21, 6, 2187-2205, 1999.
- [EHN00] H.W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht Boston London, 2000.
- [EKS01] P. Ebenfelt, D. Khavinson, H.S. Shapiro, *An Inverse Problem for the Double Layer Potential*. Comp. Meth. Funct. Theory 1, 2, 387-401, 2001.
- [EYMM09] H. Egger, Yi Heng, W. Marquardt, A. Mhamdi, *Efficient solution of a three-dimensional inverse heat conduction problem in pool boiling*. Inverse Problems 25, 095006 (19pp), 2009.
- [F59] B.M. Filonenko, *Theory of Elasticity*. Netherlands, Scientific Publishers, 1959.
- [F66] G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN, Warszawa, 1966.
- [F69] Y.C. Fung, *Podstawy mechaniki ciała stałego*. PWN, Warszawa, 1969.
- [F99] S. Futakiewicz, *Metoda funkcji cieplnych do rozwiązywania prostych i odwrotnych zagadnień przewodnictwa ciepła*. Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań 1999.
- [FGH99] S. Futakiewicz, K. Grysa, L. Hożejowski, *On a problem of boundary temperature identification in a cylindrical layer*. In: *Proc. Int. Symp. Trends in Cont. Phys.* (eds: B.T. Maruszewski, W. Muschik, A. Radowicz), World Scientific Publishing Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 119-125, 1999.
- [FH98] S. Futakiewicz, L. Hożejowski, *Heat polynomials method in the n-dimensional direct and inverse heat conduction problems*. In: *Advanced Computational Method in Heat Transfer V* (eds: A.J. Nowak, C.A. Brebbia, R. Bialecki, M. Zerroukat), Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston, 103-112, 1998.
- [FI01] D. Fasino, G. Inglese, *Stability of the solutions of an inverse problem for Laplace's equation in a thin strip*. Num. Funct. Anal. Opt. 22, 5-6. 549–560, 2001.
- [FI99] D. Fasino, G. Inglese, *Discrete methods in the study of an inverse problem for Laplace's equation*. IMA J. Num. Anal. 19, 1, 105-118, 1999.
- [FL09] Yang Fan, DunGang Li, *Identifying the Heat Source for the Heat Equation with Convection Term*. Int. J. Math. Analysis, 3, 27, 1317-1323, 2009.
- [FL98] C.T. Fernandes, V.A. Leitao, *On a multi-region Trefftz collocation method for plate bending*. In: *IV World Congress on Computational Mechanics* (eds: E.O. Sergio, R. Idelsohn and E.N. Dvorkin), Buenos Aires, Argentina, 20 June - 2 July 1998.

- [FL99] C.T. Fernandes, V.A. Leitao, *On a least-squares Trefftz collocation method for plate bending*. J. Mech. Eng. 50, 6, 387- 397, 1999.
- [FMGA00] S. Futakiewicz, A. Maciąg, K. Grysa, J.M. Al-Khatib, *Temperature identification in a turbine casing based on two internal responses with the use of two independent methods*. ZAMM 80, 3, 675-676, 2000.
- [FMM05] R. Fedeles, G. Maier, B. Miller, *Identification of elastic stiffness and local stresses in concrete dams by in situ tests and neural networks*. Struct. Infrastruct. Eng. 1, 3, 165-180, 2005.
- [FOP04] G.R. Feijoo, A. Oberai, P.M. Pinsky, *An application of shape optimization in the solution of inverse acoustic scattering problems*. Inverse Problems 20, 199-228, 2004.
- [FZQ03] C.-L. Fu, Y.-B. Zhu, C.-Y. Qiu, *Wavelet regularization for an inverse heat conduction problem*. J. Math. Anal. Appl. 288, 212-222, 2003.
- [G03] K. Grysa, *Heat polynomials and their applications*. Arch. Thermodyn. 24, 2, 107-124, 2003.
- [G82] K. Grysa, *O zagadnieniu odwrotnym dla równania falowego*. Mech. Teoret. Stos. 20, 1/2, 49-59, 1982.
- [G82a] K. Grysa, *Metody określania liczby Biota i współczynnika przejmowania ciepła*. Mech. Teoret. Stos. 20, 1/2, 71-86, 1982.
- [G83] C.W. Groetsch. *Comments on Morozov's discrepancy principle*. In: G. Hammerlin and K.H. Hoffmann, eds., *Improperly Posed Problems and Their Numerical Treatment*, pp. 97-104. Birkhaeuser, Basel, 1983.
- [G84] S.J. Gdula, *Przewodzenie ciepła*. PWN, Warszawa, 1984.
- [G84] V.B. Glasko. *Inverse Problems of Mathematical Physics*. American Institute of Physics, New York, 1984.
- [G85] K. Grysa, *Graniczne zagadnienie odwrotne dla równania falowego*. Mech. Teoret. Stos. 23, 1, 97-111, 1985.
- [G89] K. Grysa, *O ścisłych i przybliżonych metodach rozwiązywania zagadnień odwrotnych pół temperatur*. Politechnika Poznańska, Rozprawy nr 204, 1989.
- [G99] S.A. Gusiev, *Numerical solution of inverse heat transfer problems by parameters estimation of ordinary differential equations*. 3rd Int. Conf. on Inv. Probl. in Eng., Proceedings, June 13-18, 1999, Port Ludlow, USA, 1999.
- [GC80] K. Grysa, M.J. Ciałkowski, *Zagadnienia odwrotne pół temperatur – przegląd temperatury*. Mech. Teoret. Stos. 18, 4, 535-554, 1980.
- [GCK81] K. Grysa, M.J. Ciałkowski, H. Kamiński, *An inverse temperature field problem in the theory of thermal stresses*. Nucl. Eng. Design 64, 2, 169-184, 1981.
- [GH81] H. Gurgeon, I. Herrera, *Boundary Methods. C-complete systems for biharmonic equations*. In: *Boundary Element Methods*, ed. C.A. Brebbia, CML Publ. Springer, New York, 1981.
- [GK82] K. Grysa, Z. Kozłowski, *One-dimensional problems of temperature and heat flux determination at the surfaces of a thermoelastic slab. Part I - The analytical solution*. Nucl. Eng. Design 74, 1, 1-14, 1982.
- [GL10] K. Grysa, R. Leśniewska, *Different finite element approaches for inverse heat conduction problems*. Inv. Probl. in Science and Eng. 18, 1, 3-17, 2010.
- [GL96] G. Golub, C. Van Loan, *Matrix Computations*. Baltimore: Johns Hopkins Univ Press, 1996.
- [GLM08] K. Grysa, R. Leśniewska, A. Maciąg, *Energetic approach to direct and inverse heat conduction problems with Trefftz functions used in FEM*. Comp. Ass. Mech. Eng. Sci. CAMES 15, 171-182, 2008.

- [GM07] B.B. Guzina, A.I. Madyarov, *A linear sampling approach to inverse elastic scattering in piecewise-homogeneous domains*. Inverse Problems 23, 1467-1493, 2007.
- [GMM09] K. Grysa, A. Maciag, B. Maciejewska. *Wave polynomials as base functions of FEM in problems of elastokinetics*. 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, Proceedings, J. Ambrósio et.al. (eds.), 191-192; CD-edition, 12 pages, Lizbona 7-11.09.2009.
- [GMS09] K. Grysa, A. Maciag, M. Sokała, *Wave functions in solving direct and inverse problems of elastokinetics*. 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, Proceedings, J. Ambrósio et.al. (eds.), 195-196; CD-edition, 11 pages, Lizbona 7-11.09.2009.
- [H00] I. Herrera, *Trefftz method: A general theory*. Numer. Meth. Partial Diff. Eq. 16, 561-580, 2000.
- [H02] J. Hadamard, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. Princeton University Bulletin, 49-52, 1902.
- [H02] T. Hohage, *Lecture notes on Inverse Problems*. University of Goettingen, 2002, <http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/Inverse-Probleme-Kaltenbacher-WS0607/ip.pdf>
- [H03] A. Hasanov, *An inverse polynomial method for the identification of the leading coefficient in the Sturm-Liouville operator from boundary measurements*. Appl. Math. Comp. 140, 501-551, 2003.
- [H07] A. Hasanov, *An inversion method for identification of elastoplastic properties for engineering materials from limited spherical indentation measurements*. Inv. Probl. Sci. and Eng. 15, 6, 601-627, 2007.
- [H77] I. Herrera, *Theory of connectivity for formall symmetric operators*, Proc. Natl. Acad. Sc. USA (Appl. Math. Phys. Sc.) 74, 11, 4722-4725.
- [H80] I. Herrera, *Boundary methods; A criterion for completeness*. Appl. Math. Phys. Sci. 77/8, 4395-4398, 1980.
- [H84] I. Herrera, *Boundary Elements – an Algebraic Theory*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1984.
- [H84a] I. Herrera, *Trefftz method*. In: *Topics in Boundary Element Research* (Brebbia C.A. ed.), Vol. 1, New York, Springer-Verlag, 1984.
- [H86] B. Hofmann. *Regularization of Applied Inverse and Ill-Posed Problems*. Teubner, Leipzig, 1986.
- [H95] I. Herrera, *Trefftz-Herrera domain decomposition*. Adv. Eng. Softw. 24, 43-56, 1995.
- [H99] L. Hożejowski, *Wielomiany cieplne i ich zastosowania w prostych i odwrotnych zagadnieniach przewodnictwa cieplnego*. Rozprawa doktorska, Politechnika Świętokrzyska, Kielce 1999.
- [HD08] A. Hasanov, A. Demir, *Identification of the unknown diffusion coefficient in a linear parabolic equation by the semigroup approach*. J. Math. Anal. Appl. 340, 1, 5-15, 2008.
- [HDP06] A. Hasanov, P. Duchateau, B. Pektaş, *An adjoint problem approach and coarse-fine mesh method for identification of the diffusion coefficient in a linear parabolic equation*. J. of Inverse and Ill-Posed Problems 14, 5, 435-463, 2006.
- [HE08] A. Hasanov, A. Erdem, *Determination of unknown coefficient in a nonlinear elliptic problem related to the elasto-plastic torsion of a bar*. IMA J. Appl. Math. 73, 4, 579-591, 2008.
- [HG98] M. Hanke, C.W. Groetsch, *Nonstationary Iterated Tikhonov Regularization*. J. Opt. Theory and Appl. 98, 1, 37-53, 1998.

- [HGMS09] L. Hożejowski, K. Grysa, W. Marczewski, E. Sendek-Matysiak, *Thermal diffusivity estimation from temperature measurement with a use of a thermal probe*. Int. Conf. Exp. Fluid Mech. Liberec, Czechy, Nov. 25.-27.11.2009, Proc. 63-71, 2009.
- [HGPP99] L. Hożejowski, K. Grysa, S. Piwowarski, M.E. Poniewski, *Heat transfer coefficient identification on the solid-fluid boundary with the phase change in the fluid*. GAMM'99, Annual Meeting, Metz, France, pp. 2, 1999.
- [HH09] L. Hożejowski, S. Hożejowska, *Prediction of a local heat transfer coefficient in flow boiling inside a minichannel - application of equalizing calculus*. Int. Conf. Exp. Fluid Mech. Liberec, Czechy, Nov. 25.-27.11.2009, Proc. 55-62, 2009.
- [HHP09] S. Hożejowska, L. Hożejowski, M.E. Poniewski, *Numerical methods of minichannel flow boiling heat transfer coefficient calculation and their modifications*. 1st Int. Conf. Comp. Meth. Therm. Probl. ThermoComp2009, Proc., M. Massarotti, P. Nithiarasu eds., 385-388, Napoli, Italy, September 8-10, 2009.
- [HHS01] L. Hożejowski, S. Hożejowska, M. Sokała, *Stability of solutions for some inverse heat conduction problems by heat functions method*. ZAMM 81, 499-500, 2001.
- [HHS05] D.N. Hao, P.M. Hien, H. Sahli, *A Cauchy problem for an elliptic equation in a strip*. Proc. 5th Int. Conf. Inv. Probl. in Eng.: Theory and Practice, Cambridge, UK, 11-15th July 2005.
- [HL08] A. Hasanov, D. Lesnic, *Determination of the leading coefficient in fourth-order Sturm-Liouville operator from boundary measurements*. Inv. Probl. In Science and Eng. 16, 413-424, 2008.
- [HM92] D.T. Haimo, C. Markett, *A representation theory for solution of a higher order heat equation II*. J. of Math. Anal. Appl., 168, 289-305, 1992.
- [HNS95] M. Hanke, A. Neubauer, O. Scherzer, *A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems*. Num. Math. 72, 1, 21-37, 1995.
- [HP09] S. Hożejowska, M.E. Poniewski, *Various approaches to the calculation of minichannel flow boiling heat transfer*. Proc. of 7th World Conf. Exp. Heat Transfer, Fluid Mech. and Thermodyn. eds. J.S. Szmyd, J. Spalek, T.A. Kowalewski, paper MEMS-10, 1807-1814, 2009.
- [HP92] Ch. Hochard, L. Proslier, *Trefftz method for a simplified analysis of elastic structures*. In: *Numerical Methods in Engineering '92*, (Proc. 1st European Conf. Num. Meth. Eng., Brussels, Belgium, 1992), eds. Ch. Hirsh, O.C. Zienkiewicz, E. Onate, 375-382, Elsevier 1992.
- [HP92a] Ch. Hochard, L. Proslier, *A simplified analysis for plane structures using Trefftz functions*. Int. J. Numer. Meth. Eng., 34, 179-195, 1992.
- [HPP09] S. Hożejowska, M. Piasecka, M.E. Poniewski, *Boiling heat transfer in vertical minichannels. Liquid crystal experiments and numerical investigations*. Int. J. Therm Sci. 48, 1049-1059, 2009.
- [HRG98] W.M. Hartmann, B. Rakerd, J.B. Gaalaas, *On the source-identification method*. J. Acoust. Soc. Am. 104, 6, 3546-3557, 1998.
- [HS52] M.R. Hestenes, E. Stiefel, *Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*. J. Research of the National Bureau of Standards 49, 6, 409-436, 1952; także <http://nvl.nist.gov/pub/nistpubs/jres/049/6/V49.N06.A08.pdf>
- [HS78] I. Herrera, F. Sabina, *Connectivity as an alternative to boundary integral equations: Construction of bases*. Appl. Math. Phys. Sci. 75, 5, 2059-2063, 1978.
- [HTC05] C.-H. Huang, Y.-L. Tsai, H.-M. Chen, *A 3-D inverse problem in estimating the time dependent heat transfer coefficient for plane fins*. Proc. 5th Int. Conf. Inv. Probl. in Eng.: Theory and Practice, Cambridge, UK, 11-15th July 2005.

- [HW99] C.-H. Huang, S.-P. Wang, *A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method*. Int. J. Heat Mass Transfer 42, 3387-3403, 1999.
- [I59] J. Ignaczak, *Direct Determination of Stresses from the Stress Equations on Motion in Elasticity*. Arch. Mech. Stos. 11, 5, 671-678, 1959.
- [I63] J. Ignaczak, *A Completeness Problem for Stress Equations of Motion*. Arch. Mech. Stos., 15, 225-234, 1963.
- [I98] V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer, 1998.
- [IKKK07] U.Z. Ijaz, A.K. Khambampati, M.-C. Kim, S. Kim, K.-Y. Kim, *Estimation of time-dependent heat flux and measurement bias in two-dimensional inverse heat conduction problems*. Int. J. Heat and Mass Transfer 50, 4117-4130, 2007.
- [J05] T. Johansson, *An iterative method for reconstruction of temperature*. Proc. 5th Int. Conf. Inv. Probl. in Eng.: Theory and Practice, Cambridge, UK, 11-15th July 2005.
- [J78] J. Jiroušek, *Basis for development of large finite elements locally satisfying all fields equations*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 14, 65-92, 1978.
- [J93] J. Jiroušek, *Variational formulation of two complementary hybrid-Trefftz FE models*. Comm. Numer. Meth. Eng., 837-845, 1993.
- [JC95] W.G. Jin, Y.K. Cheung, *Trefftz direct method*. Advances in Engineering Software, 24, 65-69, 1995.
- [JCZ93] W.G. Jin, Y.K. Cheung, O.C. Zienkiewicz, *Trefftz method for Kirchhoff plate bending problems*. Int. J. Num. Meth. Eng. 36, 5, 765-781, 1993.
- [JG86] J. Jiroušek, L. Guex, *The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 23, 651-693, 1986.
- [JL99] K.C. Jane, Z.Y. Lee, *Thermoelastic Transient Response of an Infinitely Long Annular Multilayered Cylinder*. Mech. Res. Comm. 26, 6, 709-718, 1999.
- [JL08] B.T. Johansson, D. Lesnic, *A method of fundamental solutions for transient heat conduction*. Eng. Anal. with Boundary Elements 32, 9, 697-703, 2008.
- [JL77] J. Jiroušek, N. Leon, *A powerful finite element for plate bending*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 12, 77-96, 1977.
- [JM02] M. Jourhmane, N.S. Mera, *An iterative algorithm for the backward heat conduction problem based on variable relaxation factors*. Inv. Probl. Eng. 10, 4, 293-308, 2002.
- [JM07] B. Jin, L. Marin, *The method of fundamental solutions for inverse source problems associated with the steady-state heat conduction*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 69, 1570-1589, 2007.
- [JMY03] L. Ji, J.R. McLaughlin, D. Renzi, J.-R. Yoon, *Interior elastodynamics inverse problems: shear wave speed reconstruction in transient elastography*. Inverse Problems 19, S1-S29, 2003.
- [JN90] J. Jiroušek, M. N'Diaye, *Solution of orthotropic plates based on p-extension of the hybrid-Trefftz finite element model*. Comp. Struct. 34, 1, 51-62, 1990.
- [JQ96] J. Jiroušek, Q.H. Qin, *Application of hybrid-Trefftz element approach to transient heat conduction analysis*. Comput. Struct. 58, 195-201, 1996.
- [JT82] J. Jiroušek, P. Teodorescu, *Large finite elements method for the solution of problems in the theory of elasticity*. Comp. Struct. 15, 575-587, 1982.
- [JV90] J. Jiroušek, A. Venkatesh, *A new FE approach for adaptive reliability assurance*. Comp. Struct., 37, 217-230, 1990.

- [JV91] J. Jiroušek, G.M. Vörös, *Application of the hybrid-Trefftz finite element model to thin shell analysis*. In: *Proc. Euro. Conf. New Adv. Comp. Struc. Mech.*, P. Ladeveze, O.C. Zienkiewicz, (Eds.), Elsevier, Giens, France, 547-554, 1991.
- [JV92] J. Jiroušek, A. Venkatesh, *A Hybrid-Trefftz plane elasticity elements with p-method capabilities*. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 35, 261-278, 1992.
- [JW06] X.Z. Jia, Y.B. Wang, *A Boundary Integral Method for Solving Heat Conduction Problem*. *J. Inv. and Ill-Posed Problems* 14, 4, 375-384, 2006.
- [JW94] J. Jiroušek, A. Wróblewski, *Least-squares T-elements: equivalent FE and BE forms of a substructure-oriented boundary solution approach*. *Comm. Numer. Meth. Eng.* 10, 21-32, 1994.
- [JW96] J. Jiroušek, A. Wróblewski, *T-elements: State of Art and Future Trends*. *Arch. Comp. Meth. Eng.* 3,4,323-434, 1996.
- [JWH 95] J. Jiroušek, A. Wróblewski, X.Q. He, *A family of quadrilateral hybrid-Trefftz p-elements for thick plate analysis*. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* 127, 1/4, 315-344, 1995.
- [JWQH94] J. Jiroušek, A. Wróblewski, Q.-H. Qin, X.Q. He, *A family of quadrilateral hybrid-Trefftz p-elements for thick plate analysis*. Internal Report 94/22, Laboratoire de Mécanique des Structures et Milieux Continus, Institut de Statique et Structures, Département de Génie Civil, École Polytechnique Fédéral de Lausanne, Lausanne, December 1994.
- [JWS95] J. Jiroušek, A. Wróblewski, B. Szybiński, *A new 12DOF quadrilateral element for analysis of thick and thin plates*. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 38, 2619-2638, 1995.
- [K01] B. Kruk, *Metoda współczynników wrażliwości i funkcji cieplnych w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła*. Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań 2001.
- [K01a] J.A. Kołodziej, *Zastosowanie metody kollokacji brzegowej w zagadnieniach mechaniki*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2001.
- [K04] S. Kim, K.J. Lee, Y.J. Ko, M.C. Kim, K.Y. Kim, *Estimation of temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity per unit volume with a simple integral approach*. *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 31, 7, 981-990. 2004.
- [K67] V.A. Koveryanov, *Inverse problem of Non-Steady Thermal Conductivity*. *Teplofizika Vysokich Temperatur* 1, 5, 141-143, 1967.
- [K79] V.D. Kupradze, *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North-Holland Publ. Cmp., Amsterdam, 1979.
- [K79a] W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*. PWN, Warszawa 1979.
- [K89] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989.
- [K94] V. Kompiš, *Finite elements satisfying all governing equations inside the element*. *Comp. Struct.* 30, 273-278, 1994.
- [K95] R. Kress, *Integral equation methods in inverse obstacle scattering*. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 15, 171-180, 1995.
- [K96] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [KFK98] V. Kompiš, L. Frastia, M. Kaukic, P. Novak, *Accuracy of direct Trefftz FE formulations*. In: *Computational Mechanics New Trends and Applications* (eds: S. Idelsohn, E. Onnate and E. Dvorkin), Barcelona, 1998.
- [KK06] J.A. Kołodziej, T. Klekiel, *Trefftz metod for large deflection of plates with application of evolutionary algorithms*. *Comp. Ass. Mech. Eng. Sci.* 13, 407-416, 2006.

- [KK68] G. Korn, T. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [KK95] E. Kita, N. Kamiya, *Trefftz method: an overview*. Adv. in Eng. Software 24, 3-12, 1995.
- [KK95a] N. Kamiya, E. Kita, *Trefftz method 70 Years*. Adv. Eng. Softw. 24, 1-3, 1, 1995.
- [KKK03] S. Kim, M.C. Kim, K.Y. Kim, *Non-iterative estimation of temperature-dependent thermal conductivity without internal measurements*. Int. J. Heat Mass Transfer 46, 1801-1810, 2003.
- [KKV01] V. Kompiš, F. Konkol, M. Vaško, *Trefftz-polynomial reciprocity based FE formulation*. Int. Workshop on the Trefftz Method, Lisbon, Portugal, 2, 1999; Comp. Ass. Mech. Eng. Sci. CAMES 8, 2-3, 385-395, 2001.
- [KLS03] S.D. Kim, H.C. Lee, B.C. Shin, *Pseudospectral least-squares methods for the second-order elliptic boundary value problem*. SIAM J. Numer. Anal. 41, 1370-1380, 2003.
- [KLKK03] S. Kim, K.J. Lee, M.C. Kim, K.Y. Kim, *Estimation of temperature-dependent thermal conductivity with a simple integral approach*. Int. Comm. Heat Mass. Transfer 30, 4, 485-494, 2003.
- [KMF91] V.A. Koslov, V.G. Maz'ya, A.F. Fomin, *An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations*. Comput. Math. Phys. 31, 45-52, 1991.
- [KN95] K. Kurpisz, A.J. Nowak, *Inverse Thermal Problems*, International Series on Computational Mechanics Publications, Southampton, UK and Boston, USA, 1995.
- [KS00] B. Kruk, M. Sokala, *Sensitivity coefficients and heat polynomials in the inverse heat conduction problems*. J. Appl. Math. Mech. ZAMM 80, Suppl. 3, 693-694, 2000.
- [KS01] H. Kamiński, G. Sypniewska-Kamińska, *The method of fictitious sources applied to the solution of two-dimensional inverse problems of heat conduction*. 5th Int. Symp. Ukrainian Mech. Engineers, p.64 Abstracts, Lviv, 18-18.05.2001.
- [KS01a] B. Kruk, M. Sokala, *Sensitivity coefficients applied to two-dimensional transient inverse heat conduction problems*. J. Appl. Math. Mech. ZAMM 81, 4, 945-946, 2001.
- [KS04] V. Kompiš, M. Štiavnický, *Evaluation of local fields by the boundary point method*. In: *Computational Mechanics WCCM VI in conjunction with APCOM'04*, Beijing, China, Tsinghua University Press & Springer Verlag, 2004.
- [KS06] V. Kompiš, M. Štiavnický, *Trefftz functions in FEM, BEM and meshless methods*. Comp. Ass. Mech. Eng. Sci. CAMES 13, 417-426, 2006.
- [KSKZ05] V. Kompiš, M. Štiavnický, M. Kompiš, M. Žmindák, *Trefftz interpolation based multi-domain boundary point method*. Eng. Anal. Bound. Elements 29, 4, 391-396, 2005.
- [KSSB09] J. Kozanek, J. Simek, P. Steinbauer, A. Bilkovsky, *Identification of stiffness and damping coefficients of aerostatic journal bearing*. Engineering Mechanics 16, 3, 209-220, 2009.
- [KW03] J.A. Kołodziej, A. Wachowska, *Special purpose Trefftz functions for the torsion of bars with regular polygonal cross-section*. Int. Workshop on MeshFree Methods 2003.
- [KZ09] J.A. Kołodziej, A.P. Zieliński, *Boundary Collocation Techniques and their Application in Engineering*. WIT Press, Southampton, Boston, 2009.
- [L00] J.L. Liu, *Exact a posteriori error analysis of the least square finite element method*. Appl. Math. Comp. 116, 3, 297-305, 2000.
- [L00a] K.J. Langenberg, M. Brandfaß, R. Hannemann, Ch. Hofmann, T. Kaczorowski, J. Kostka, R. Marklein, K. Mayer, A. Pitsch, *Inverse scattering with acoustic, electromagnetic, and elastic waves as applied in nondestructive evaluation*. In: *Wavefield Inversion* (ed. A Wirgin), Springer, Berlin, 59-118, 2000.

- [L02] D. Lesnic, *The determination of the thermal properties of a heat conductor in a nonlinear heat conduction problem*. Z. angew. Math. Phys. 53, 175-196, 2002.
- [L08] C.-S. Liu, *A Highly Accurate Collocation Trefftz Method for Solving the Laplace Equation in the Doubly Connected Domains*. Num. Meth. Par. Diff. Eq. 24, 1, 179-192, 2008.
- [L44] K. Levenberg, *A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares*. Quart. Appl. Math. 2, 164-168, 1944.
- [L53] G.G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*. University of Toronto Press, Toronto, 1953.
- [L67] M. Lavrentiev, *Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics*. Springer, New York, 1967.
- [L89] A.K. Louis, *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1989.
- [L89a] D. Lefeber, *Solving problems with singularities using boundary elements*. Computational Mechanics Publication, Southampton, 1989.
- [L98] Z.C. Li, *Combined methods for elliptic equations with singularities, interfaces and infinities*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1998.
- [LALP03] M.M. Lavrentiev, A.V. Avdeev, M.M. Lavrentiev Jr., V.I. Priimenko, *Inverse problems of mathematical physics*. VSP, Utrecht-Boston, 2003.
- [LB91] R.L. Lagendijk and J. Biemond, *Iterative Identification and Restoration of Images*. Kluwer, Dordrecht, London, 1991.
- [LCH06] X. Ling, H.P. Cherukuri, M.F. Horstemeyer, *A hybrid regularization method for inverse heat conduction problems*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 65, 2246-2264, 2006.
- [LEI97] D. Lesnic, L. Elliott, D.B. Ingham, *Spacewise coefficient identification in steady and unsteady one-dimensional diffusion problems*. IMA J. Appl. Math. 59, 2, 183-192, 1997.
- [LHL04] T.T. Lu, H.Y. Hu, Z.C. Li, *Highly accurate solution of Motz's and the cracked beam problems*. Eng. Anal. Bound. Elem. 28, 1387-1403, 2004.
- [LHY05] L. Ling, Y.C. Hon, M. Yamamoto, *Inverse source identification for Poisson equation*. Inverse Problems in Science and Engineering 13, 4, 433-447, 2005.
- [LLHC07] Z.C. Li, T.T. Lu, H.T. Huang, A.H.-D. Cheng, *Trefftz, Collocation, and Other Boundary Methods – A Comparison*. Numer. Meth. Par. Diff. Eq. 23, 93-144, 2007.
- [LLHC08] Z.C. Li, T.T. Lu, H.T. Huang, A.H.-D. Cheng, *Trefftz and Collocation Methods*. WIT Press, Southampton-Boston, 2008.
- [LMS87] Z.C. Li, R. Mathon, P. Sermer, *Boundary methods for solving elliptic problem with singularities and interfaces*. SIAM J. Numer. Anal. 24, 487-498, 1987.
- [LQW08] C.-Y. Lee, Q.-H. Qin, H. Wang, *Trefftz functions and application to the indirect Trefftz method in three-dimensional isotropic elasticity*. Proc. of LSAME.08, 255-269, 2008.
- [LR84] N. Liron, J. Rubinstein, *Calculating the fundamental solution to linear convection-diffusion problems*. SIAM J. Appl. Math. 44, 3, 493-511, 1984.
- [LS06] Yu. A. Lyashenko and O.A. Shmatko, *Entropy production as a regularization factor in solving an inverse diffusion problem*. Russian Physics Journal 49, 6, 2006, 658-663.
- [LT08] L. Ling, T. Takeuchi, *Boundary Control for Inverse Cauchy Problems of the Laplace Equations*. CMES 29, 1, 45-54, 2008.
- [LTP09] Lihua Cheng, Teyan Lian, Ping Li, *A Method for Recovering the Shape for Inverse Scattering Problem of Acoustic Waves*. Int. J. of Nonlinear Science 7, 3, 371-378, 2009.
- [M00] M. Monde, *Analytical method in inverse heat transfer problem using Laplace transform technique*. Int. J. Heat and Mass Transfer 43, 3965-3975, 2000.
- [M00a] W.B. Muniz, *Entropy- and Tikhonov-Based Regularization Techniques Applied to the Backwards Heat Equation*. Comp. Math. Appl. 40, 1071-1084, 2000.

- [M04] A. Maciąg, *Solution of the Three-dimensional Wave Equation by Using Wave Polynomials*. PAMM, 4, 706-707, 2004.
- [M04a] B. Maciejewska, *Application of the modified method of finite elements for identification of temperature of a body heated with a moving heat source*. J. Theor. Appl. Mech. JTAM 42, 4, 771-788, 2004.
- [M04b] B. Maciejewska, *The transient temperature field in a rectangular area with movable heat sources at its edge*. Theor. Appl. Mech. JTAM 42, 4, 789-804, 2004.
- [M05] A. Maciąg, *Three-dimensional wave polynomials*. Math. Probl. in Eng. 5, 583-598, 2005.
- [M06] A. Markoe, *Analytic tomography*. serie "Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 106", Cambridge University Press, 2006.
- [M06a] B. Maciejewska, *Rozkład temperatury i naprężeń cieplnych w ciele nagrzewanym ruchomym źródłem ciepła*. Rozprawa doktorska, Politechnika Świętokrzyska, Kielce, 2006.
- [M07] A. Maciąg, *Wave polynomials in elasticity problems*. Eng. Trans. 55, 2, 129-153, 2007.
- [M09] A. Maciąg, *Funkcje Trefftza dla wybranych prostych i odwrotnych zagadnień mechaniki*. Politechnika Świętokrzyska, Kielce 2009.
- [M09a] A. Maciąg, *The usage of wave polynomials in solving direct and inverse problems for two-dimensional wave equation*. Commun. Numer. Meth. Eng. 2009, published on line (www.interscience.wiley.com). DOI: 10.1002/cnm.1338
- [M49] N.I. Muskhelishvili, *Nekotorye osnovnye zadaci matematiceskoj teorii uprugosti*, Izd. 3. Izd. AN SSSR, Moskva-Leningrad, 1949.
- [M53] N.I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen, Holland, 1953.
- [M63] D. Marquardt, *An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters*. SIAM J. Appl. Math. 11, 431-441, 1963.
- [M64] N.W. McLachlan, *Funkcje Bessela dla inżynierów*. PWN, Warszawa, 1964.
- [M66] V.A. Morozov, *On the solution of functional equations by the method of regularization*. Soviet Math. Dokl. 7, 414-417, 1966.
- [M79] R.C. Mehta, *Extension of the solution of inverse conduction problem*. Int. J. Heat Mass Transfer 22, 1149-1150, 1979.
- [M93] V.A. Morozov, *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*. CRC Press, Boca Raton, CA, 1993.
- [M93a] D.A. Murio, *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems*. Wiley-Interscience, 1993.
- [MA09] A. Monroy, L. Alvarez-Icaza, *Wind turbine power coefficient real-time identification*. Int. J. Modelling, Identification and Control 6, 3, 181-187, 2009.
- [MALMH03] M. Monde, H. Arima, W. Liu, Y. Mitutake, J.A. Hammad, *An analytical solution for two-dimensional inverse heat conduction problems using Laplace transform*. Int. J. Heat Mass Transfer 46, 2135-2148, 2003.
- [ME86] L. Michalski, K. Eckersdorf, *Pomiary temperatury*. WNT, Warszawa, 1986.
- [MEHILW04] L. Marina, L. Elliott, P.J. Heggs, D.B. Ingham, D. Lesnic, X. Wen, *BEM solution for the Cauchy problem associated with Helmholtz-type equations by the Landweber method*. Eng. Anal. with Boundary Elements 28, 1025-1034, 2004.
- [MEIL05] N.S. Mera, L. Elliott, D.B. Ingham, D. Lesnic, *Comparison of a genetic algorithm and a gradient based optimisation technique for a three-dimensional boundary detection problem*. Proc. 5th Int. Conf. Inverse Problems in Engineering, Cambridge, UK, 11-15th July 2005.

- [MG08] R. Madoliat, A. Ghasemi, *Inverse finite element formulations for transient heat conduction problems*. J. Heat Mass Transfer 44, 5, 569-577, 2008.
- [MHL02] L. Marin, D.N. Hao, D. Lesnic, *Conjugate gradient – boundary element method for the Cauchy problem in elasticity*. Q. J. Mech. Appl. Math. 55, 2, 227-247, 2002.
- [ML02] L. Marin, D. Lesnic, *Boundary element solution for the Cauchy problem in linear elasticity using singular value decomposition*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 191, 3257-3270, 2002.
- [ML03] L. Marin, D. Lesnic, *BEM first-order regularization method in linear elasticity for boundary identification*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 192, 2059-2071, 2003.
- [ML05] L. Marin, D. Lesnic, *Boundary element-Landweber method for the Cauchy problem in linear elasticity*. IMA J. of Applied Mathematics 70, 323-340, 2005.
- [MMD03] E. Majchrzak, J. Mendakiewicz, D. Janisz, *Identification of boundary heat flux using the sequential function specification method*. Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej 76, 290, 267-270, 2003.
- [MMS08] E. Majchrzak, B. Mochnacki, J.S. Suchy, *Estimation of boundary heat flux between casting and mould using the global function specification method*. Arch. of Foundry Eng. 8, 1, 193-198, 2008.
- [MP05] A.M. Maniatty, E. Park, *Finite Element Approach to Inverse Problems in Dynamic Elastography*. Proc. 5th Int. Conf. on Inv. Probl. in Eng., Cambridge, UK, 11-15th July 2005.
- [MW05] A. Maciąg, J. Wauer, *Solution of the two-dimensional wave equation by using wave polynomials*. J. of Eng. Math. 51, 4, 339-350, 2005.
- [MW05a] A. Maciąg, J. Wauer, *Wave Polynomials for Solving Different Types of Two-Dimensional Wave Equations*. Comp. Ass. Mech. Eng. Sci. CAMES 12, 87-102, 2005.
- [N70] W. Nowacki, *Teoria sprężystości*. PWN, Warszawa, 1970.
- [N77] F. Natterer. *Regularisierung schlecht gestellter Probleme durch Projektions-verfahren*. Numer. Math. 28, 329-341, 1977.
- [N99] F. Natterer, *Numerical Methods in Tomography*. Acta Numerica, 8, 107-141, 1999.
- [NG04] F.S. Nintcheu, B.B. Guzina, *A linear sampling method for near-field inverse problems in elastodynamics*. Inverse Problems, 20, 713–736, 2004.
- [NK95] N. Nishimura, S. Kobayashi, *Determination of cracks having arbitrary shape with boundary integral method*. Eng. Anal. Bound. Elem. 15, 189–197, 1995.
- [NN05] A.J. Nowak, I. Nowak, *2D and 3D inverse boundary and inverse geometry BEM solution in continuous casting*. Proc. 5th Int. Conf. on Inv. Probl. in Eng., Cambridge, UK, 11-15th July 2005.
- [NPT09] P. Neittaanmaeki, A. Pennanen, D. Tiba, *Fixed domain approaches in shape optimization problems with Dirichlet boundary conditions*. Inverse Problems 25, 1-18, 2009.
- [O68] E.R.A. Oliveira, *Plane stress analysis by a general integral metod*. J. Eng. Mech. Div., Proc. ASME 94, 79-101, 1968.
- [O72] J. Osowski, *Zarys rachunku operatorowego*. WNT, Warszawa, 1972.
- [OIL08] T.T.M. Onyango, D.B. Ingham, D. Lesnic, *Reconstruction of heat transfer coefficient using the boundary element method*. Comp. Math. Appl. 56, 114-126, 2008.
- [OO00] M.N. Ozisik, H.R.B. Orlande, *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications* Taylor & Francis, New York, 2000.

- [OO01] K. Onishi, Y. Ohura, *Numerical Method for Inverse Boundary Value Problems of the Laplace Equation*. Proc. Conf. Comp. Eng. Sci., Japan ICRACM 2001, 6, 1, 331-334, 2001.
- [P01] R. Potthast, *Point sources and multipoles in inverse scattering theory*. Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [P03] R. Piltner, *Solution representations for Trefftz-type finite elements*. Comp. Ass. Mech. Eng. Sci. CAMES, 10, 587-596, 2003.
- [P85] R. Piltner, *Special finite elements with holes and internal cracks*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 21, 1471-1485, 1985.
- [P90] J. Petrolito, *Hybrid-Trefftz quadrilateral elements for thick plate analysis*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 78, 331-351, 1990.
- [P92] R. Piltner, *A quadrilateral hybrid-Trefftz plate bending element for the inclusion of warping based on a three-dimensional plate formulation*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 33, 387-408, 1992.
- [P97] V. Pohanka, *Method for the solution of the inverse problem of gravimetry for a planetary body of arbitrary shape*. Contr. Geophys. Inst. Slov. Acad. Sci., 27, 1-8, 1997.
- [PB05] R. Puiša, R. Belevičius, *Grading the PVC material by solving a static inverse problem with genetic algorithm*. Mechanika 2, 52, 11-16, 2005.
- [PBH00] A. Poitou, M. Bouberebachene, C. Hochard, *Resolution of three-dimensional Stokes fluid flows using a Trefftz method*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 190, 561-578, 2000.
- [PHHP06] M. Piasecka, S. Hożejowska, L. Hożejowski, M.E. Poniewski, *Wyznaczenie lokalnego współczynnika przejmowania ciepła w badaniach wymiany ciepła w mini kanale*. Inżynieria i Aparatura Chemiczna 6, 188-189, 2006.
- [PN98] M. Prud'homme and T.H. Nguyen, *On the iterative regularization of inverse heat conduction problems by conjugate gradient method*. Int. Comm. Heat Mass Transfer, 25, 7, 999-1008, 1998.
- [POV00] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin, *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*. Marcel Dekker, Inc., 2000.
- [PPH05] M.E. Poniewski, M. Piasecka, S. Hożejowska, *Boiling heat transfer in minichannels - experiment and numerical calculations*. Proc. 4th Int. Conf. Transp. Phen. Multiphase Systems HEAT 2005, 87-102, 2005.
- [PS05] J.P. Petrov, V.S. Sizikov, *Well-posed, ill-posed, and intermediate problems with applications*. Koninklijke Brill NV, Leiden, The Netherlands, 2005.
- [PS82] C. Patterson, M.A. Sheikh, *On the use of fundamental solutions in Trefftz method for harmonic problems*. In: *Boundary Element Method in Engineering* (Proc. 4th Int. Conf. on BEM, Southampton, England, 1982), ed. C.A. Brebbia, 43-57, Springer, 1982.
- [PS82a] C. Patterson, M.A. Sheikh, *A modified Trefftz method for stress analysis*. In: *Proc. Int. Conf. Finite Element Method*, eds: H. Guangqian & Y.K. Cheung, Science Press/Gordon and Breach, 1982.
- [PS83] C. Patterson, M.A. Sheikh, *A modified Trefftz method for threedimensional elasticity*. In: *Boundary Elements* (Proc. 5th Int. Conf. on BEM, Hiroshima, Japan, 1983), eds: A.C. Brebbia T. Futagami & M. Tanaka, 427-237, Comp. Mech. Pub./Springer, 1983.
- [PW69] H. Pollard, D.V. Widder, *Gaussian representations related to heat conduction*. Archive for Rational Mechanics and Analysis 35, 4, 253-258, 1969.
- [PW78] P. Percell, M.F. Wheeler, *A local residual finite element procedure for elliptic equations*. SIAM J. Numer. Anal. 15, 705-714, 1978.

- [PY00] H.M. Park, T.Y. Yoon, *Solution of the inverse radiation problem using a conjugate gradient method*. Int. J. Heat and Mass Transfer 43, 1767-1776, 2000.
- [Q00] Q.-H. Qin, *The Trefftz Finite and Boundary Element Method*. WIT Press, Southampton, Boston, 2000.
- [Q04] Q.-H. Qin, *Dual variational formulation for Trefftz finite element method of elastic materials*. Mech. Res. Comm. 31, 321-330, 2004.
- [QW09] Q.-H. Qin, H. Wang, *MATLAB and C Programming for Trefftz Finite Element Method*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, 2009.
- [R04] A.G. Ramm, *Inverse problems*. Springer, 2004.
- [R09] E.V. Rozhkova, *On Solutions of Problem in Stresses with the Use of Maxwell Stress Functions*. Mechanics of Solids, 44, 4, 526-536, 2009; po rosyjsku, [w:] Izv. AN Mekhanika Tverdogo Tela 4, 38-51, 2009.
- [R73] G. Ruoff, *Die praktische Berechnung der Kopplungsmatrizen bei der Kombination der Trefftzschen Methode und der Methode der Finiten Elemente*. In: *Finite Elemente in der Statik*, ed. K.E. Buck, D.W. Scharpf, E. Stein, W. Wunderlich, Verlag Ernst and Sohn, 242-259, Berlin, 1973.
- [R81] R. Reemtsen, *On level sets and approximation problem for the numerical solution of a free boundary problem*. Computing 27, 1, 27-35, 1981.
- [R97] K. Rakoczy, *On some class of the parabolic polynomials*. Fasciculi Mathematici 27, 81-93, 1997.
- [RDHP08] J. Rejlek, F. Diwoky, A. Hepberger, B. Pluymers, *Wave Based Technique: enrichment of the set of basis functions*. Int. Conf. Uncert. Struct. Dyn. ISMA2008, Proc., 2008 (także <http://www.isma-isaac.be/publications/isma2008>).
- [RK06] E.B. Rudnyi, J.G. Korvink, *Model order reduction for large scale finite element engineering models*. ECCOMAS CDF 2006, P. Wesseling, E. Oñate, J. Périaux (Eds), TU Delft, Delft The Netherland, 2006.
- [RW56] P.C. Rosenbloom, D.V. Widder, *Expansion in terms of heat polynomials and associated functions*. Trans. Am. Math. Soc. 92, 220-266, 1956.
- [S04] Sokała M., *Metoda analityczno-numeryczna rozwiązywania zagadnień przewodnictwa ciepła z zastosowaniem funkcji cieplnych i operacji odwrotnych*. Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań, 2004.
- [S04a] R. Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis*. John Wiley and Sons Inc., 2004.
- [S07] E. Sendek, *Badanie własności termicznych ośrodka za pomocą sondy termicznej Mupus-Pen*. Rozprawa doktorska, Politechnika Świętokrzyska, Kielce 2007.
- [S09] D. Słota, *Reconstruction of the heat transfer coefficient on the grounds of experimental data*. J. Achiev. Met. Manuf. Eng. 34, 1, 63-70, 2009.
- [S73] E. Stein, *Die Kombination des modifizierten Trefftzschen Verfahrens mit der Methode der finiten Elemente*. In: *Finite Elemente in der Statik*, ed. K.E. Buck, D.W. Scharpf, E. Stein, W. Wunderlich, Verlag Ernst and Sohn, 172-185, Berlin, 1973.
- [S74] M.M. Smirnow, *Zadania z równań różniczkowych cząstkowych*. PWN, Warszawa 1974.
- [S98] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley, MA: Wellesley Cambridge Press, 1998.
- [SE00] G.H. Schmitz, J. Edenhofer, *Exact closed-form solution of the two-dimensional Laplace equation for steady groundwater flow with nonlinearized free-surface boundary condition*. Water Resources Research 36, 7, 1975-1980, 2000.

- [SHA82] F.J. Sanchez-Sesma, I. Herrera, J. Aviles, *A boundary method for elastic wave diffraction: Application to scattering of AH-waves by surface irregularities*. Bull. Seismological Soc. Am. 72, 473-490, 1982.
- [SI99] A. Soulaïmani, M. Idrissi, *Identification of the Friction Coefficient in Shallow-Water Flows Using Optimal Control Theory*. Int. J. Comp. Fluid Dyn. 12, 1, 29-48, 1999.
- [SLG02] H. Sol, T. Lauwagie, P. Guillaume, *Identification of distributed material properties using measured modal data*. Proceedings of ISMA2002, Vol. II: *Material Characterisation Based On Dynamic Measurements*, 695-704, 2002.
- [SO91] M. Sanayei, O. Onipede, *Damage assessment of structures using statistic data*. AIAA Journal 29, 7, 1174-1179, 1991.
- [SS02] V. Sladek, J. Sladek, *BIE and Trefftz approximation*. In: *Boundary Elements XXIV, and Simulation* vol. 32, eds: C.A. Brebbia and V. Popov, Wessex Institute of Technology, United Kingdom, 2002.
- [SSK02] J. Sladek, V. Sladek, R. Van Keer, *Global and local Trefftz boundary integral formulations for sound vibration*. Advances in Engineering Software 33, 469-476, 2002.
- [SW02] H. Sol, W.P. De Wilde, *Complex Stiffness Identification by Inverse Methods*. In: *Recent Advances in Experimental Mechanics*, ed. E.E. Gdoutos, 2002 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, 595-608, 2002.
- [SWZ01] B. Szybiński, A. Wróblewski, A.P. Zieliński, *General strategy of h-p adaptive solutions in structural Trefftz-type element analysis*. Comp. Ass. Mech. Eng. Sci. CAMES 8, 469-477, 2001.
- [SZ06] H. Sanecki, A.P. Zieliński, *Crack propagation modelled by T-elements*. Engineering Computations Vol. 23, No. 2, 100-123, 2006.
- [SZ95] B. Szybiński, A.P. Zieliński, *Alternative T-complete systems of shape functions applied in analytical Trefftz finite elements*. Num. Meth. for Part. Diff. Equations 11, No. 4, 375-388, 1995.
- [T07] J. Taler, *Determination of local heat transfer coefficient from the solution of the inverse heat conduction problem*. Forsch Ingenieurwes 71, 69-78, 2007.
- [T26] E. Trefftz, *Ein Gegenstueck zum Ritz'schen Verfahren*. Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics, 131-137, Zurich, 1926.
- [T63] A.N. Tikhonov, *The Regularization of Ill-Posed Problems*. Dokl. Akad. Nauk. (SSR 153), 1, 49-52, 1963.
- [T95] A.N. Tikhonov, A.V. Goncharsky, V.V. Stephanov, A.G. Yagola. *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*. Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1995.
- [T95a] J. Taler, *Teoria i praktyka identyfikacji procesów przepływu ciepła*. Wyd. Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1995.
- [T99] M. Tanaka, *Applications of the boundary element method to same inverse problems in engineering mechanics*. 3rd Int. Conf. on Inv.Probl. in Eng., Proceedings, June 13-18, 1999, Port Ludlow, USA, 1999.
- [TA77] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, *Solution of Ill-Posed Problems*. New York: Wiley, 1977.
- [TS63] A.N. Tichonow, A.A. Samarski, *Równania fizyki matematycznej*. PWN, Warszawa, 1963.
- [TW07] G.-P.J. Too, B.-H. Wu, *Application of similar source method for noise source identification*. Mech. Systems and Signal Processing 21, 8, 2007, 3167-3181.
- [U08] A. Uściłowska, *Application of the Trefftz Method to nonlinear potential problems*. Proceedings of LSAME08, CD-ROM, 417-431, 2008.

- [V05] K.E. Vurgin, *On the effects of noise on parameter identification optimization problems*. Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in Mathematics, Blacksburg, Virginia, USA, 2005, także http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-05032005-133146/unrestricted/vurgin_dissertation.pdf
- [VV86] G.M. Vainikko, A.Y. Veretennikov, *Iteration Procedures in Ill-Posed Problems*. ed S.F. McCormick (Moscow: Nauka) (in Russian), 1986.
- [VW04] N. Valdivia, E.G. Williams, *Implicit methods of solution to integral formulations in boundary element method based nearfield acoustic holography*. J. Acoust. Soc. Am. 116, 3, 1559–1572, 2004.
- [W03] A.B. Weglein, F.V. Araujo, P.M. Carvalho, R.H. Stolt, K.H. Matson, R.T. Coates, D. Corrigan, D.J. Foster, S.A. Shaw, Z. Haiyan, *Inverse scattering series and seismic exploration*. Inverse Problems 19, R27–R83, 2003.
- [W52] M.L. Williams, *Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension*. J. Appl. Mech. 19, 526–528, 1952.
- [W59] M.L. Williams, *The stresses around a fault or crack in dissimilar media*. Bull. Seismol. Soc. Am. 49, 199–204, 1959.
- [WJ93] A. Wróblewski, J. Jiroušek, *Application of the hybrid-Trefftz p-elements to stress analysis in shafts*. Proc. XI Polish Conf. Comp. Meth. Mech., Kielce-Cedzyna, Poland, 2, 983–990, 1993.
- [WMM06] P.L. Woodfield, M. Monde, Y. Mitsutake, *Implementation of an analytical two-dimensional inverse heat conduction technique to practical problems*. Int. J. Heat Mass Transfer 49, 187–197, 2006.
- [WSSZ04] A. Wróblewski, H. Sanecki, B. Szybiński, A.P. Zieliński, *Different Areas of Application of Trefftz Finite Element Approach*. In: *Computational Mechanics*, WCCM VI in conjunction with APCOM'04, Sept. 5–10, 2004, Beijing, China, Tsinghua University Press & Springer-Verlag, 2004.
- [WZ04] J. Wang, N. Zabaras, *A Bayesian inference approach to the inverse heat conduction problem*. Int. J. Heat Mass Transfer, 47, 17–18, 3927–3941, 2004.
- [WZ06] A. Wróblewski, A.P. Zieliński, *Structural inverse problems by the T-element approach*. Comp. Ass. Mech. Eng. Sci. CAMES 13, 473–480, 2006.
- [XFL06] X.-T. Xiong, C.-L. Fu, H.-F. Li, *Fourier regularization method of a sideways heat equation for determining surface heat flux*. J. Math. Anal. Appl. 317, 331–348, 2006.
- [XMJ05] Y. Xin, C. Mourad, C. Jin, *An iterative BEM for the inverse problem of detecting corrosion in a pipe*. Num. Math., J. Chinese Universities 14, 3, 252–266, 2005.
- [YDYL09] L. Yung, Z.-C. Deng, J.-N. Yu, G.-W. Luo, *Two regularization strategies for an evolutionary type inverse heat source problem*. J. Phys. A: Math. Theor. 42, 365203 (16pp), 2009.
- [YFK83] H. Yano, S. Fukutani, A. Kieda, *A boundary residual method with heat polynomials for solving unsteady heat conduction problems*. Franklin Inst. 316, 291–298, 1983.
- [YYF09] L. Yan, F. Yang, C. Fu, *A Bayesian inference approach to identify a Robin coefficient in one-dimensional parabolic problems*. J. Comp. Appl. Math., 231, 2, 840–850, 2009.
- [YZ09] Y.J. Deng, Z.H. Liu, *Iteration methods on sideways parabolic equations*. Inverse Problems 25 095004 (14pp), 2009.
- [Z88] A.P. Zieliński, *Trefftz method: elastic and elasto-plastic problems*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 69, 185–204, 1988.

- [Z89] A.P. Zieliński, *Metoda T-kompletnych funkcji i jej zastosowanie do zagadnień sprężystych i sprężysto-plastycznych*. Politechnika Krakowska, Monografia 86, Kraków 1989.
- [Z95] A.P. Zieliński, *On trial functions applied in the generalized Trefftz method*. Adv. in Eng. Software 24, 147-155, 1995.
- [Z97] O.C. Zienkiewicz, *Trefftz type approximation and the generalized finite element method – history and development*. Comp. Ass. Mech. Eng. Sci. CAMES 4 305-316, 1997.
- [ZKB77] O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelley, P. Bettess, *The coupling of the finite element method and boundary solution procedures*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 11, 2, 355-375, 1977.
- [ZZ85] A.P. Zieliński, O.C. Zienkiewicz, *Generalized finite element analysis with T- complete boundary solution functions*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 21, 509-528, 1985.